

Corso di Laurea in Matematica

Appunti
Analisi di Fourier 2

Francesca Astengo

Università di Genova, A.A. 2011/2012

Edito in proprio.

Indice

Capitolo 1. La Trasformata di Fourier	1
1. Lo spazio euclideo \mathbb{R}^d	1
1.1. Integrazione	3
1.2. Criteri di integrabilità locale e globale	5
2. La convoluzione	7
2.1. Mean filter	13
2.2. Gaussian filter	13
2.3. Laplacian of Gaussian	14
3. Il Teorema di Riesz Thorin e prime applicazioni	16
4. Identità approssimate	21
5. La Trasformata di Fourier: il Caso di L^1 e lo spazio di Schwartz	24
6. La formula di inversione	32
7. Trasformata di funzioni L^p , $1 < p \leq 2$	34
8. Teoremi di incertezza	37
9. Applicazioni	44
9.1. Trasformate di immagini	45
9.2. Filtri	49
9.3. Riconoscimento caratteri	50
9.4. Calcolare il diametro di una stella	51
9.5. Equazione di Laplace sul semipiano	53
9.6. Equazione del calore	55
9.7. Equazione delle onde	55
9.8. Diffrazione	56
10. Esercizi	61
Capitolo 2. Armoniche sferiche	65
1. Il caso di \mathbb{R}^2	65
2. Il caso di \mathbb{R}^d	70
2.1. Polinomi omogenei e armoniche sferiche	71
2.2. Armoniche sferiche zonali	74
2.3. Polinomi di Gegenbauer	81
2.4. Minimalità della decomposizione	83
2.5. Decomposizione di $L^2(\mathbb{R}^d)$	86
3. Esercizi	89
Capitolo 3. Wavelet	91
1. La WFT o STFT	92
1.1. Pregi	94
1.2. Difetti	96

2. La CWT	99
2.1. Alcuni scalogrammi	105
2.2. Rettangoli di Heisenberg	110
2.3. Un confronto tra STFT e CWT	112
2.4. Studio della regolarità	113
3. Analisi Multi-Risoluzione (MRA)	116
3.1. Basi di Riesz	116
3.2. MRA	116
4. Wavelet generate da una MRA	125
4.1. Risoluzione e dettagli	126
4.2. Filtro passa-basso	127
4.3. Generazione di wavelet ortonormali	128
4.4. Wavelet ortonormali e condizione di ammissibilità	133
5. Wavelet ortonormali a banda limitata	134
5.1. La Shannon wavelet	134
5.2. Meyer Wavelet	135
5.3. Una proprietà delle wavelet a banda limitata	137
5.4. Journé wavelet	141
6. L'algoritmo di Mallat	145
6.1. Rimozione del rumore	151
7. Altri esempi di wavelet ortonormali	152
7.1. Spline di ordine 1 e la Franklin wavelet	152
7.2. Splines di ordine più alto e Battle-Lemarie' wavelet	155
7.3. Daubechies wavelet	155
8. Cenno al caso di dimensione maggiore	157
9. Esercizi	160
Elenco delle Figure	161
Riferimenti bibliografici	163

CAPITOLO 1

La Trasformata di Fourier

Nel corso di Analisi di Fourier avete già visto in cosa consiste il metodo della trasformata di Fourier. In questo capitolo ci occupiamo del caso multidimensionale, ovvero tratteremo prevalentemente della trasformata di funzioni su \mathbb{R}^d con $d > 1$. La teoria si arricchisce perché entra in gioco l'interazione con il gruppo delle rotazioni.

1. Lo spazio euclideo \mathbb{R}^d

Indichiamo con \mathbb{R}^d l'insieme delle d -uple di numeri reali (x_1, \dots, x_d) con x_j in \mathbb{R} per $j = 1, \dots, d$. Per quanto sia comodo scrivere la d -upla in riga, in realtà stiamo trattando vettori colonna.

Ricordiamo che \mathbb{R}^d è uno spazio vettoriale rispetto all'addizione dei vettori componente per componente e alla moltiplicazione per scalari anch'essa componente per componente.

Dato $x = (x_1, \dots, x_d)$ in \mathbb{R}^d , definiamo la norma di x come

$$|x| = (x_1^2 + \dots + x_d^2)^{1/2}$$

ossia come la lunghezza del vettore x . Il prodotto interno sarà denotato con il puntino

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d = {}^t x y$$

e quindi $|x|^2 = x \cdot x$.

Se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ è un multiindice in \mathbb{N}^d , definiamo il monomio

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$$

e l'operatore differenziale

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d}$$

Infine $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$.

Ci sono importanti gruppi di simmetrie per l'analisi su \mathbb{R}^d :

- traslazioni
- dilatazioni
- rotazioni

Probabilmente avete già visto l'importanza delle traslazioni e delle dilatazioni nel caso unidimensionale.

Una rotazione è una trasformazione lineare che conserva il prodotto interno e si descrive mediante una matrice R del gruppo ortogonale $O(d)$. In formule, una rotazione è una mappa $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ lineare, quindi, rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^d a φ è associata una matrice che chiamo R :

$$\varphi(x) = Rx \quad \forall x \in \mathbb{R}^d;$$

inoltre φ conserva il prodotto interno, ossia

$$(\varphi(x)) \cdot (\varphi(y)) = x \cdot y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d.$$

In termini della matrice R questo vuol dire che

$$Rx \cdot Ry = x \cdot y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d \Leftrightarrow {}^tRR = I_{\mathbb{R}^d},$$

quindi R è una rotazione se e solo se ${}^tR = R^{-1}$. Si denota con $O(d)$ l'insieme delle matrici reali R quadrate di ordine d tali che ${}^tR = R^{-1}$. Rispetto al prodotto di matrici $O(d)$ è un gruppo che viene detto gruppo ortogonale.

Si noti che una mappa lineare φ è una rotazione se e solo se conserva le distanze, ossia se e solo se $|\varphi(x)| = |x|$ per ogni x in \mathbb{R}^d .

Infine, $\det \varphi = \det R = \pm 1$. Quando $\det \varphi = 1$, la rotazione φ è una rotazione propria e la matrice R associata fa parte di $SO(d)$, il gruppo ortogonale speciale; altrimenti la rotazione si dice impropria.

Sulla retta reale \mathbb{R} ci sono solo due rotazioni, l'identità e la riflessione $x \mapsto -x$. Invece in dimensione maggiore il gruppo delle rotazioni è molto più ricco e interessante e per questo ci aspettiamo che giochi un ruolo fondamentale nello studio dell'analisi su \mathbb{R}^d . Inoltre molti degli operatori fondamentali che si studiano in \mathbb{R}^d presentano una simmetria rispetto al gruppo delle rotazioni. Ad esempio, il laplaciano $\Delta = \sum_{j=1}^d \partial_j^2$ commuta con l'azione del gruppo delle rotazioni in questo senso:

$$(\Delta f(R \cdot))(x) = (\Delta f)(R(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^d).$$

ESEMPIO 1.1. In \mathbb{R}^2 possiamo descrivere il gruppo delle rotazioni anche usando l'identificazione col piano complesso. Spero vi sia noto che

$$SO(2) = \left\{ R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

e che

$$O(2) = SO(2) \cup \{UR : R \in SO(2)\} \quad \text{dove } U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

ovvero ogni rotazione di \mathbb{R}^2 è una rotazione propria associata alla matrice R_θ (che ruota di un angolo θ in senso antiorario) oppure è composizione di una rotazione propria e della riflessione rispetto all'asse delle y .

Chiamiamo $c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ l'identificazione col piano complesso, ossia la mappa

$$c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + iy \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Sia $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la rotazione propria associata alla matrice R_θ . Analizziamo la mappa $\tilde{\varphi} = c^{-1} \circ \varphi \circ c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Si ha

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x + iy) &= \tilde{\varphi} \circ c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c \circ \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \cos \theta x - \sin \theta y \\ \sin \theta x + \cos \theta y \end{pmatrix} \\ &= (\cos \theta x - \sin \theta y) + i(\sin \theta x + \cos \theta y) \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta)(x + iy) = e^{i\theta}(x + iy), \end{aligned}$$

ossia $\tilde{\varphi}$ coincide con la moltiplicazione per $e^{i\theta}$.

Se invece consideriamo $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la rotazione associata alla matrice U e analizziamo la mappa $\tilde{\psi}$ otteniamo

$$\tilde{\psi}(x + iy) = c \circ \psi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c \left(U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = c \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = x - iy$$

ossia $\tilde{\psi}$ coincide con il coniugio.

Identificando \mathbb{R}^2 con il piano complesso, una rotazione propria è allora la moltiplicazione per $e^{i\theta}$ con θ opportuno; una rotazione impropria è la composizione del coniugio con una rotazione propria.

ESEMPIO 1.2. In \mathbb{R}^3 una rotazione propria ha sempre un asse di rotazione, ossia esiste un vettore h in \mathbb{R}^3 tale che $Rh = h$ e inoltre R è una rotazione sul piano ortogonale a h . Se invece R è impropria, allora $-R$ è propria, ossia una rotazione impropria si ottiene componendo una rotazione propria con la simmetria rispetto all'origine.

ESEMPIO 1.3. Un modo ovvio di ottenere una rotazione in \mathbb{R}^d è quello di scegliere due basi ortonormali e di mandare base ortonormale in base ortonormale.

1.1. Integrazione. In tutto il corso, se non diversamente specificato, ci riferiremo sempre alla σ -algebra e alla misura di Lebesgue.

Sia f una funzione integrabile (ossia Lebesgue misurabile e assolutamente integrabile su \mathbb{R}^d rispetto alla misura di Lebesgue). Allora se $\tau_y f(x) = f(x - y)$ con y in \mathbb{R}^d si ha

$$\int_{\mathbb{R}^d} \tau_y f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx.$$

Se $\delta_r f(x) = r^{-d} f(x/r)$ con $r > 0$, allora

$$\int_{\mathbb{R}^d} \delta_r f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx.$$

Infine, se R è una rotazione, indichiamo con Rf la funzione ruotata, ovvero $(Rf)(x) = f(R^{-1}x)$. Allora

$$\int_{\mathbb{R}^d} (Rf)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx.$$

Vi ricordo le formule di integrazione in coordinate polari. Iniziamo dai casi semplici e noti di $d = 2, 3$.

ESEMPIO 1.4. In \mathbb{R}^2 le coordinate polari sono determinate dal cambio di variabili

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

con $r \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Questa risulta essere una trasformazione con determinante Jacobiano r e invertibile tra l'aperto $(r, \theta) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi)$ e \mathbb{R}^2 privato di una semiretta. Siccome la porzione di piano che stiamo trascurando ha misura nulla, possiamo scrivere che

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

ESEMPIO 1.5. In \mathbb{R}^3 le coordinate polari sono determinate dal cambio di variabili

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

con $r \geq 0$, $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi)$. Questa risulta essere una trasformazione con determinante Jacobiano $r^2 \sin \theta$ e invertibile tra l'aperto $(r, \theta, \phi) \in (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ e $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$. Siccome la porzione di spazio che stiamo trascurando ha misura nulla, possiamo scrivere che

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty f(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi.$$

In \mathbb{R}^d il passaggio a coordinate polari è definito da

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta_1 \\ x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ \vdots \\ x_{d-1} = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{d-2} \cos \theta_{d-1} \\ x_d = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{d-2} \sin \theta_{d-1} \end{cases} \quad r \in [0, +\infty), \theta_j \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi).$$

Si può dimostrare che il determinante jacobiano di questa trasformazione è

$$r^{d-1} (\sin \theta_1)^{d-2} (\sin \theta_2)^{d-3} \cdots \sin \theta_{d-2}$$

Indichiamo più brevemente con $d\sigma(\theta)$ l'elemento di superficie della sfera unitaria S^{d-1} in \mathbb{R}^d , ossia $d\sigma(\theta) = (\sin \theta_1)^{d-2} (\sin \theta_2)^{d-3} \cdots \sin \theta_{d-2}$.

Si ha

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} f(r\theta) r^{d-1} d\sigma(\theta) dr$$

dove indichiamo più brevemente con $\theta = x/|x|$ un punto sulla sfera unitaria in \mathbb{R}^d . In particolare, se f è una funzione che dipende solo dalla distanza dall'origine, cioè $f(x) = f_0(|x|)$, allora

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = |S^{d-1}| \int_0^\infty f_0(r) r^{d-1} dr,$$

dove $|S^{d-1}|$ è l'area della sfera S^{d-1} in \mathbb{R}^d . (Da calcolare per esercizio)

Si noti che se f è una funzione integrabile sulla sfera e R è una rotazione, allora anche

$$\int_{S^{d-1}} (Rf)(\theta) d\sigma(\theta) = \int_{S^{d-1}} f(\theta) d\sigma(\theta).$$

Infatti, si estenda f a tutto \mathbb{R}^d ponendo, ad esempio,

$$\tilde{f}(x) = f(x/|x|) \mathbb{1}_{[1/2, 2]}(|x|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

dove $\mathbb{1}$ è la funzione indicatrice. Allora l'uguaglianza

$$\int_{\mathbb{R}^d} (R\tilde{f})(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(x) dx$$

scritta in coordinate polari diventa

$$\int_{1/2}^2 \int_{S^{d-1}} (Rf)(\theta) d\sigma(\theta) r^{d-1} dr = \int_{1/2}^2 \int_{S^{d-1}} f(\theta) d\sigma(\theta) r^{d-1} dr$$

da cui l'invarianza per rotazioni della misura sulla superficie della sfera.

1.2. Criteri di integrabilità locale e globale. Sia $\alpha > 0$ e sia f una funzione misurabile e tale che $|f(x)| \leq C|x|^{-\alpha}$ per q.o. x ; allora

- se $\alpha > d$, $f\mathbb{1}_{|x|>1}$ è integrabile;
- se $\alpha < d$, $f\mathbb{1}_{|x|<1}$ è integrabile.

Infatti $f\mathbb{1}_{|x|>1}$ è dominata in modulo dalla funzione $|x|^{-\alpha}\mathbb{1}_{|x|>1}$, che dipende solo dalla distanza e risulta integrabile

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x|^{-\alpha}\mathbb{1}_{|x|>1}(x) dx = |S^{d-1}| \int_1^\infty r^{d-1-\alpha} dr$$

quando $\alpha > d$. Analogamente si verifica l'altro asserto.

Al solito, se $1 \leq p < \infty$, indichiamo con L^p lo spazio delle funzioni f misurabili tali che $|f|^p$ è integrabile, dotato della (semi)norma

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

modulo le funzioni nulle q.o.

Infine indichiamo con L^∞ lo spazio delle funzioni f misurabili tali che l'estremo superiore essenziale è finito, dotato della (semi)norma

$$\|f\|_\infty = \inf \{M > 0 : |f(x)| \leq M \text{ per q.o. } x\}$$

modulo le funzioni nulle q.o.

Gli spazi L^p forniscono una scala con cui misurare la regolarità delle funzioni e il loro decadimento all'infinito. Se f sta in un certo L^p ma anche in un altro L^q con $q > p$, allora vuol dire che le eventuali singolarità al finito della funzione f non sono gravi.

Infine indichiamo con C_0 , C_b , C_c , C^∞ , C_c^∞ rispettivamente gli spazi delle funzioni continue che tendono a zero all'infinito, delle funzioni continue e limitate, delle funzioni continue a supporto compatto, delle funzioni infinitamente differenziabili, delle funzioni infinitamente differenziabili e a supporto compatto. Ricordiamo il seguente fatto, trattato nel corso di IAS1.

PROPOSIZIONE 1.6. *Sia $1 \leq p < \infty$. Allora l'inclusione*

$$C_c \subset L^p$$

è a immagine densa.

Una proprietà importante degli spazi L^p è la continuità rispetto alle traslazioni.

TEOREMA 1.7. *Sia $1 \leq p < \infty$ e sia f in L^p . Allora $\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$, ossia*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h) - f(x)|^p dx = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Iniziamo a supporre che g sia una funzione continua a supporto compatto. Allora g è anche uniformemente continua e quindi in corrispondenza di $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $|h| < \delta_\varepsilon$ allora $\|\tau_h g - g\|_\infty < \varepsilon$.

Non è restrittivo supporre che $0 < \delta_\varepsilon < 1$. In tal caso, se g ha supporto nella palla B_r di raggio r , allora $\tau_h g - g$ ha supporto contenuto nella palla B_{r+1} di raggio $r+1$. Allora

$$\|\tau_h g - g\|_p \leq \varepsilon |B_{r+1}|^{1/p} \quad \text{se } |h| < \delta_\varepsilon.$$

Ne deduciamo che $\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h g - g\|_p = 0$ per ogni g continua a supporto compatto.

Sia ora f in L^p e $\varepsilon > 0$ fissato. Esiste allora una g continua a supporto compatto tale che $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Sia $\delta_{g,\varepsilon} > 0$ tale che se $|h| < \delta_{g,\varepsilon}$ allora $\|\tau_h g - g\|_p < \varepsilon$. Allora per la disuguaglianza triangolare e l'invarianza rispetto alle traslazioni

$$\|\tau_h f - f\|_p \leq \|\tau_h f - \tau_h g\|_p + \|\tau_h g - g\|_p + \|g - f\|_p < 3\varepsilon. \quad \square$$

OSSERVAZIONE 1.8. Analogamente si dimostra che se f è localmente integrabile (ovvero: se per ogni K compatto di \mathbb{R}^d l'integrale $\int_K |f(x)| dx$ è finito), allora per ogni K compatto

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_K |\tau_h f(x) - f(x)| dx = \lim_{h \rightarrow 0} \int_K |f(x-h) - f(x)| dx = 0.$$

Infatti, siano K compatto e $\varepsilon > 0$ fissati. Sia $K_1 = K + \overline{B(0, 1)}$. Allora esiste g continua a supporto compatto tale che $\|g - 1_{K_1} f\|_1 < \varepsilon$.

Come prima, sia $\delta_{g,\varepsilon} > 0$ tale che se $|h| < \delta_{g,\varepsilon}$ allora $\|\tau_h g - g\|_\infty < \varepsilon$.

Per la disuguaglianza triangolare, se $|h| < \min\{1, \delta_{g,\varepsilon}\}$

$$\begin{aligned} \int_K |\tau_h f(x) - f(x)| dx &\leq \int_K (|\tau_h f(x) - \tau_h g(x)| + |\tau_h g(x) - g(x)| + |g(x) - f(x)|) dx \\ &\leq \int_{K+h} |f(x) - g(x)| dx + |K| \|\tau_h g - g\|_\infty + \int_{K_1} |g(x) - f(x)| dx \\ &< 2 \int_{K_1} |f(x) - g(x)| dx + |K| \varepsilon \\ &\leq 2 \|1_{K_1} f - g\|_1 + |K| \varepsilon \\ &\leq (2 + |K|) \varepsilon. \end{aligned}$$

2. La convoluzione

In questa sezione introduciamo un'operazione molto importante sulle funzioni: la convoluzione. Questa operazione, insieme alla struttura di spazio vettoriale, rende L^1 un'algebra.

DEFINIZIONE 1.1. Siano f e g due funzioni misurabili. Definiamo la convoluzione $f * g$ di f e g come la funzione

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) dy \quad x \in \mathbb{R}^d$$

tutte le volte che l'integrale esiste finito.

Alcuni casi importanti in cui l'integrale esiste finito sono i seguenti.

PROPOSIZIONE 1.9. Se f è integrabile e g è limitata, allora $f * g$ è una funzione continua e

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in L^1$ e g è limitata, si deduce facilmente che l'integrale è assolutamente convergente per ogni x dalla disuguaglianza di Hölder. Per la continuità (che vedremo

anche essere uniforme), sia h un vettore di \mathbb{R}^d e valutiamo

$$\begin{aligned} |f * g(x+h) - f * g(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x+h-y) - f(x-y)) g(y) dy \right| \\ &\leq \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h-y) - f(x-y)| dy \\ &= \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |f(t+h) - f(t)| dt \\ &= \|g\|_\infty \|\tau_{-h}f - f\|_1. \end{aligned}$$

La tesi segue dalla continuità delle traslazioni. \square

OSSERVAZIONE 1.10. Analogamente, se f è in un certo L^p e g è in $L^{p'}$, dove p' è il coniugato di p , allora $f * g$ è una funzione (continua e) limitata e $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$.

TEOREMA 1.11. *Se f e g sono integrabili, allora $f * g$ è una funzione integrabile e*

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che f e g siano Borel-misurabili e sia

$$h(x, y) = f(x - y) g(y).$$

Allora h è ancora una funzione Borel-misurabile (si veda Rudin, Real and Complex Analysis, Theorem 7.14) e dal Teorema di Tonelli

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} |h(x, y)| dx dy = \int \int |f(x - y)| |g(y)| dx dy = \int \int |f(x - y)| |g(y)| dy dx$$

Siccome il secondo integrale è il prodotto delle norme 1 di f e g , tutti gli integrali sono finiti. Quindi per quasi ogni x , la funzione $y \mapsto f(x - y) g(y)$ è (assolutamente) integrabile e la funzione $x \mapsto f * g(x)$ è assolutamente integrabile e si ha il controllo desiderato sulla sua norma 1.

Se f e g sono Lebesgue misurabili, allora esistono f_0 e g_0 Borel misurabili che coincidono quasi ovunque con f e g rispettivamente e tutti gli integrali non variano se sostituiamo f e g con f_0 e g_0 . \square

Un'algebra di Banach è uno spazio di Banach X su cui è definito un prodotto ossia un'operazione binaria $\pi : X \times X \rightarrow X$, $(x, y) \mapsto \pi(x, y) = xy$ che gode delle seguenti proprietà:

- a) $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ per ogni x, y in X ;
- b) (legge associativa) $(xy)z = x(yz)$ per ogni x, y, z in X ;
- c) (leggi distributive) $(x + y)z = xz + yz$ $x(y + z) = xy + xz$ per ogni x, y, z in X ;
- d) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$ per ogni x, y in X e per ogni scalare α .

L'algebra di Banach X si dice commutativa se per ogni x, y in X si ha $xy = yx$. L'algebra di Banach X ha identità (o unità) se esiste un elemento e in X tale che $ex = xe = x$ per ogni x in X .

Si verifichi che L^1 è un'algebra di Banach commutativa rispetto alla convoluzione.

PROPOSIZIONE 1.12. *Siano f e g due funzioni continue e a supporto compatto. Allora $f * g$ è ancora una funzione continua a supporto compatto e*

$$\text{supp}(f * g) \subseteq \text{supp}(f) + \text{supp}(g).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia x in $\mathbb{R}^d \setminus (\text{supp}(f) + \text{supp}(g))$. Allora per ogni y nel supporto di g , il punto $x - y$ non è nel supporto di f , quindi

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) g(y) dy = \int_{\text{supp}(g)} f(x - y) g(y) dy = 0,$$

ovvero

$$\{x \in \mathbb{R}^d : f * g(x) \neq 0\} \subseteq \text{supp}(f) + \text{supp}(g).$$

Siccome $\text{supp}(f)$ e $\text{supp}(g)$ sono compatti, la loro somma è un compatto, in particolare è un chiuso, quindi

$$\text{supp}(f * g) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : f * g(x) \neq 0\}} \subseteq \text{supp}(f) + \text{supp}(g). \quad \square$$

La convoluzione di due funzioni (ad esempio integrabili) può essere pensata come una media pesata: sia g una densità, ovvero $g(x) \geq 0$ per ogni x e $\int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx = 1$. Allora il valore di $f * g(x)$ è la media dei valori di $\tau_x \check{f}$ rispetto alla densità $g(x) dx$:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \tau_x \check{f}(y) g(y) dy.$$

La convoluzione è un'operazione molto usata, anche in altri ambiti. Ad esempio, in probabilità, siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti con densità f_X e f_Y rispettivamente. Allora la densità congiunta di X e Y è $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$. La densità della somma è proprio la convoluzione delle due densità. Infatti per ogni funzione g continua e limitata, il valore atteso di $g(X + Y)$ è da una parte $\int_{\mathbb{R}} g(t) f_{X+Y}(t) dt$, dall'altra coincide con

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(x + y) f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} g(t) \int_{\mathbb{R}} f_X(t - y) f_Y(y) dy dt$$

da cui $f_{X+Y}(t) = \int_{\mathbb{R}} f_X(t - y) f_Y(y) dy$.

Una proprietà importante è l'effetto "regolarizzante" della convoluzione.

TEOREMA 1.13. *Se f è (localmente) integrabile e g è liscia e a supporto compatto, allora la funzione $f * g$ è liscia e per ogni multiindice α*

$$\partial^\alpha (f * g) = f * (\partial^\alpha g)$$

DIMOSTRAZIONE. Basta verificare che $f * g$ ha derivate parziali (continue) in ogni punto e verificare la formula dell'enunciato per un multiindice di lunghezza 1. La tesi segue per induzione. Si fissino x_0 , un incremento h reale e un versore e_j . Allora

$$\begin{aligned} \frac{f * g(x_0 + he_j) - f * g(x_0)}{h} - f * (\partial_j g)(x_0) &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \left(\frac{g(x_0 + he_j - y) - g(x_0 - y)}{h} - \partial_j g(x_0 - y) \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x_0 - t) \left(\frac{g(t + he_j) - g(t)}{h} - \partial_j g(t) \right) dt \end{aligned}$$

Se il supporto di g è contenuto nella palla di centro 0 e raggio r e ci limitiamo a prendere $|h| < 1$, allora nell'ultimo integrale t varia al più nella palla B_{r+1} . Inoltre per il Teorema di Lagrange (da applicare eventualmente a parte reale e immaginaria di g)

$$\left| \frac{g(t + he_j) - g(t)}{h} - \partial_j g(t) \right| = |\partial_j g(t + \theta he_j) - \partial_j g(t)| \leq |h| |\partial_j^2 g(t + \theta' he_j)| \leq |h| \|\partial_j^2 g\|_\infty,$$

dove $0 < \theta' < \theta < 1$. Quindi

$$\left| \frac{f * g(x_0 + he_j) - f * g(x_0)}{h} - f * (\partial_j g)(x_0) \right| \leq |h| \|\partial_j^2 g\|_\infty \int_{B_{r+1}} |f(x_0 - t)| dt,$$

da cui segue la formula cercata passando al limite per h tendente a zero:

$$\partial_j (f * g)(x_0) = f * (\partial_j g)(x_0)$$

e la continuità della j -esima derivata parziale. \square

In maniera analoga si dimostra che

TEOREMA 1.14. *Se f è integrabile e g è liscia e limitata con derivate limitate, allora $f * g$ è liscia e per ogni α in \mathbb{N}^d*

$$\partial^\alpha (f * g) = f * (\partial^\alpha g).$$

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo che $f * g$ ha derivate parziali (continue) in ogni punto e la formula dell'enunciato. La tesi segue per induzione. Si fissino x_0 , un incremento h reale e un versore e_j . Allora come prima

$$\begin{aligned} \frac{f * g(x_0 + he_j) - f * g(x_0)}{h} - f * (\partial_j g)(x_0) &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \left(\frac{g(x_0 + he_j - y) - g(x_0 - y)}{h} - \partial_j g(x_0 - y) \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x_0 - t) \left(\frac{g(t + he_j) - g(t)}{h} - \partial_j g(t) \right) dt \end{aligned}$$

Di nuovo, per il Teorema di Lagrange,

$$\left| \frac{g(t + he_j) - g(t)}{h} - \partial_j g(t) \right| = |\partial_j g(t + \theta he_j) - \partial_j g(t)| \leq |h| |\partial_j^2 g(t + \theta' he_j)| \leq |h| \|\partial_j^2 g\|_\infty,$$

dove $0 < \theta' < \theta < 1$. Quindi

$$\left| \frac{f * g(x_0 + he_j) - f * g(x_0)}{h} - f * (\partial_j g)(x_0) \right| \leq |h| \|\partial_j^2 g\|_\infty \|f\|_1,$$

da cui segue la formula cercata passando al limite per h tendente a zero:

$$\partial_j(f * g)(x_0) = f * (\partial_j g)(x_0)$$

e la continuità della j -esima derivata parziale. □

Nello studio delle immagini si vede bene come la convoluzione sia una media pesata e diventa evidente il suo effetto regolarizzante. Partiamo dall'immagine seguente.



FIGURA 1.1. Una immagine in bianco e nero

Un'immagine in bianco e nero è una funzione su \mathbb{R}^2 tale che

$$f(x, y) = \begin{cases} h(x, y) & \text{se } (x, y) \text{ è un punto nell'immagine} \\ 0 & \text{se } (x, y) \text{ è al di fuori dell'immagine} \end{cases}$$

e il valore $h(x, y)$ è un intero non negativo che corrisponde alla luminosità del grigio nel punto (x, y) . Il valore 0 rappresenta il nero mentre il massimo valore di luminosità (in una scala di 256 grigi, ad esempio 255) rappresenta il bianco.

In un'immagine digitale, si campiona (come visto lo scorso anno) dividendo l'immagine in un numero adeguato di quadratini (=pixel) e scegliendo come valore corrispondente in quel pixel il valore medio di $h(x, y)$ per tutti i punti (x, y) che stanno in quel pixel. ¹

In sintesi, **MatLab** legge la nostra immagine come una matrice. Nel nostro caso è una matrice 137×180 , in cui ogni entrata è un valore tra 0 e 255.

Ora facciamo la convoluzione della nostra immagine f con due funzioni k_m e k_g , dove

$$k_m(x, y) = \begin{cases} 1/25 & \text{se } |x| \leq 2.5, |y| \leq 2.5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad k_g(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/4}.$$

¹ci sono anche le immagini digitali non rasterizzate o vettoriali, buone a qualsiasi risoluzione, ma non di queste trattiamo

Nel gergo delle applicazioni diciamo che applichiamo due filtri all'immagine. Il primo si chiama *mean filter* e, nel nostro caso, fa la media su 25 pixel adiacenti. Il secondo filtro si chiama *gaussian filter* e fa una media pesata da una gaussiana di deviazione 2. Entrambi i filtri sono discretizzati e quindi realizzati come matrici, il primo è una matrice 5×5 in cui ogni entrata vale $1/25$; l'effetto dell'applicazione di questo filtro è semplicemente quello di sostituire il valore in ciascun pixel con la media dei 25 pixel che gli stanno intorno (incluso lui stesso). Il secondo filtro è realizzato come una matrice 3×3 con entrata centrale più alta e simmetrico in ogni direzione.

$$k_m = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1/25 & 1/25 & 1/25 & 1/25 & 1/25 \\ \hline 1/25 & 1/25 & 1/25 & 1/25 & 1/25 \\ \hline 1/25 & 1/25 & 1/25 & 1/25 & 1/25 \\ \hline 1/25 & 1/25 & 1/25 & 1/25 & 1/25 \\ \hline 1/25 & 1/25 & 1/25 & 1/25 & 1/25 \\ \hline \end{array} \quad k_g = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0.1018 & 0.1154 & 0.1018 \\ \hline 0.1154 & 0.1308 & 0.1154 \\ \hline 0.1018 & 0.1154 & 0.1018 \\ \hline \end{array}$$

L'operazione di convoluzione nel discreto è sostanzialmente qualcosa del tipo

$$f * k(n_1, n_2) = \sum_{m_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{m_2 \in \mathbb{Z}} f(m_1, m_2) k(n_1 - m_1, n_2 - m_2).$$

Nell'implementare questa operazione occorre stare attenti però al fatto che l'elemento centrale della matrice sarebbe quello che matematicamente indichiamo con $k(0, 0)$ si guarda bene dall'essere il primo elemento della matrice corrispondente a k .

Il risultato è mostrato nella figura 1.2.

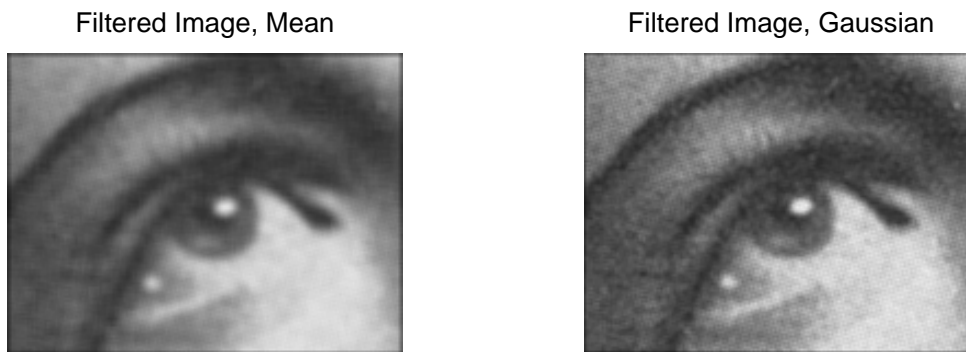


FIGURA 1.2. Le immagini filtrate: a sinistra l'effetto del mean filter a destra del gaussian filter

Si noti come il mean filter realizzi un effetto regolarizzante maggiore (del resto abbiamo adoperato anche una matrice più grande) mentre il gaussian filter privilegia i pixel vicini e fornisca contorni più netti.

Si noti che in entrambi i casi compare una cornicetta nera intorno all'immagine, perché per poter effettuare l'operazione di convoluzione anche su un elemento del bordo, l'immagine viene circondata di zeri.

Veniamo ora alla complessità computazionale: l'immagine di partenza è una matrice 137×180 , le cui entrate hanno valori tra 0 e 255 (stiamo parlando di ogni entrata come 8 bit; l'immagine è piccola: $8 \times 137 \times 180 = 197280$ bit; in effetti il computer afferma che il file corrispondente ha dimensione 180K). Nel fare il filtraggio, adoperiamo una matrice che ha, per esempio, dimensioni 5×5 . A parte problemi di bordo, occorrono moltissime operazioni: sostituire ciascuna entrata con la media delle 25 caselle che la circondano. Circa, ci vorranno $25 \times 137 \times 180 = 616500$ operazioni, un numero astronomico per un'immagine così piccola.

Un possibile codice `MatLab` per ottenere le immagini filtrate è il seguente:

```
I=imread('da_sfocare.tiff');
h = ones(5,5) / 25;
I2 = imfilter(I,h);
imshow(I), title('Original Image');
figure, imshow(I2), title('Filtered Image, Mean')
h2 = fspecial('gaussian', 3, 2) ;
I3=imfilter(I,h2);
figure,imshow(I3),title('Filtered Image, Gaussian');
```

In questo codice non sono state effettivamente scritte le convoluzioni, ma abbiamo usato la relazione che già conoscete con la trasformata di Fourier (e tacitamente implementata da `MatLab` nel comando `imfilter`) per ridurre la complessità computazionale.

Molti dei filtri che trovate nei software che trattano immagini sono filtri di tipo convoluzione.

2.1. Mean filter. Abbiamo già parlato di questo filtro, che è soprattutto adoperato per rimuovere rumore da un'immagine. Il suo svantaggio consiste nel fatto che è sensibile in ugual maniera ai valori “buoni” dell'immagine e a quelli completamente fuori scala.

Ad esempio, quando il rumore è del tipo “salt and pepper” (localizzato e con valori di intensità 0 o massima), il risultato del mean filter è quello di spargere il “salt and pepper” ancora di più. Talvolta per ovviare a questo inconveniente si usa il median filter, che però non si ottiene tramite convoluzione (non è lineare).

2.2. Gaussian filter. Questo filtro è molto usato anche in combinazione con altri filtri. Da una parte ha un effetto regolarizzante, dall'altra non riduce di molto i bordi della figura.

Ad esempio, se sottraiamo dall'immagine data una sua regolarizzata otteniamo evidenziati i contorni. Possiamo ottenere un miglioramento (nel senso di mettere in maggior evidenza i soggetti) dell'immagine di partenza aggiungendo all'immagine stessa una percentuale dei contorni.

$$f \xrightarrow{\text{regolarizzazione}} f * g \xrightarrow{\text{contorni}} f - f * g \xrightarrow{\text{miglioramento}} f + c(f - f * g)$$

f è l'immagine di partenza, g è una gaussiana stretta (3×3 , con varianza 0.5), c è una costante, che di solito ha valori tra 0.2 fino a 0.8.

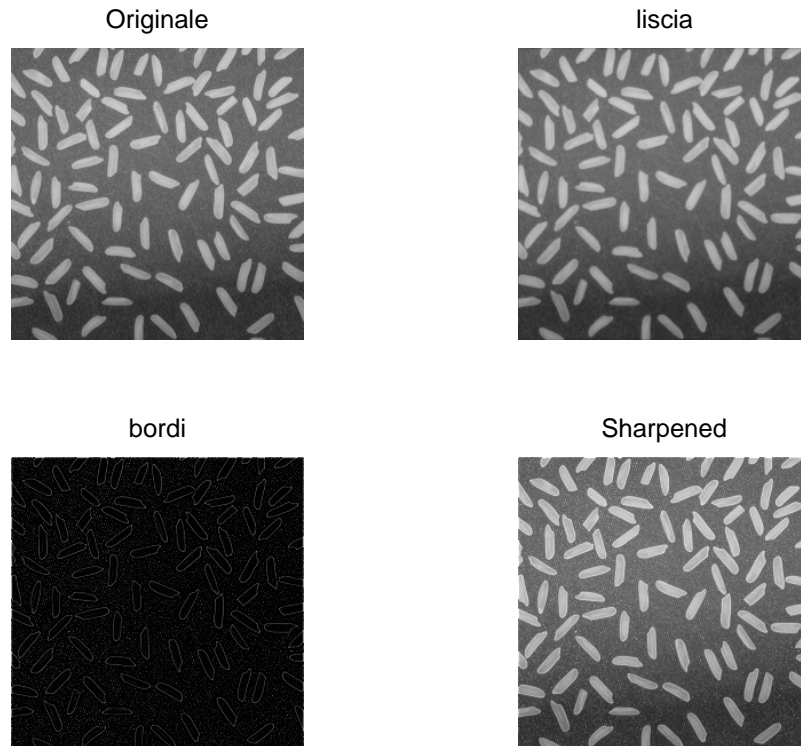


FIGURA 1.3. Altri modi di usare il gaussian filter

2.3. Laplacian of Gaussian. Questo filtro è adoperato come edge detector. L'idea è basata sul fatto che un bordo è solitamente un improvviso cambio dei valori di una funzione; ad esempio, per un soggetto chiaro in campo scuro si passa rapidamente da valori prossimi a 0 sullo sfondo a valori molto più alti sul soggetto.

Il problema di edge detection è molto studiato e oltre a Laplacian of Gaussian ci sono moltissimi altri filtri da adoperare. Per rimanere nell'ambito delle convoluzioni, c'è il Sobel filter (metodo del gradiente), Robert Cross, Canny,...

Descriviamo ora il metodo alla base del filtro Laplacian of Gaussian. Un primo passo consiste nell'ottenere una versione liscia della nostra immagine f tramite convoluzione con una gaussiana g , per poterla poi derivare.

Ottenuta l'immagine liscia $f * g$, se ne calcola il laplaciano, che è un'operatore isotropico, quindi tiene conto simultaneamente di tutte le direzioni. I valori di $\Delta(f * g)$ sono grossi in prossimità del bordo. Nel grafico, per semplicità, vi ho disegnato la situazione relativa al brusco cambiamento di un segnale unidimensionale.

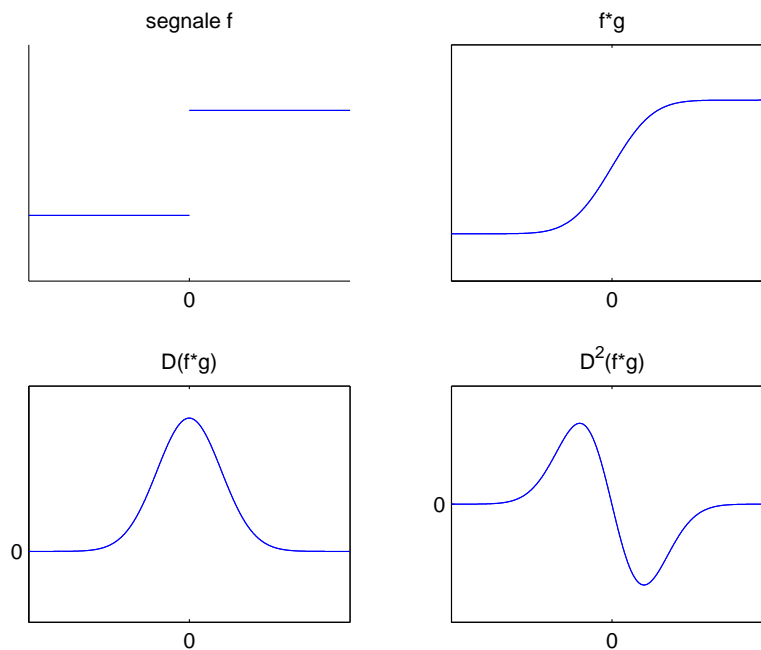
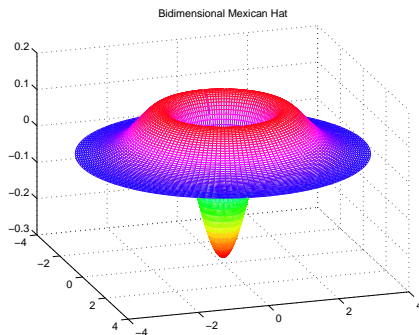


FIGURA 1.4. Un segnale unidimensionale: comportamento del filtro LoG



Si noti che

$$\Delta(f * g) = f * (\Delta g),$$

quindi in realtà è sufficiente calcolare la convoluzione con il laplaciano di una gaussiana, il cosiddetto cappello messicano.

FIGURA 1.5. Il cappello messicano bidimensionale

Il procedimento termina con la scelta di una soglia: dove $f * (\Delta g)$ ha valori al di sotto di questa soglia, l'immagine ha valori pressoché costanti, quindi non vi è un bordo (possiamo definire una nuova immagine contenente i bordi e porla uguale a zero in questi punti). Invece dove $f * (\Delta g)$ ha valori al di sopra di questa soglia, l'immagine presenta un bordo (possiamo definire una nuova immagine contenente i bordi e porla uguale a 255 in questi punti). In questo modo verranno esaltati i punti dove c'è un cambiamento e praticamente annullati i punti dove i valori della funzione sono sostanzialmente gli stessi. Il risultato è mostrato nella figura 1.6

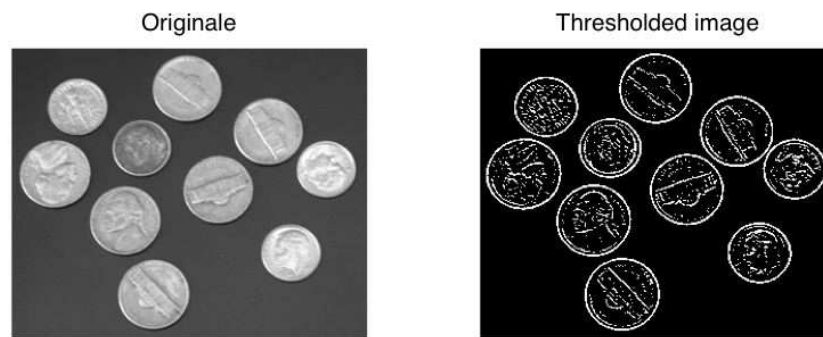
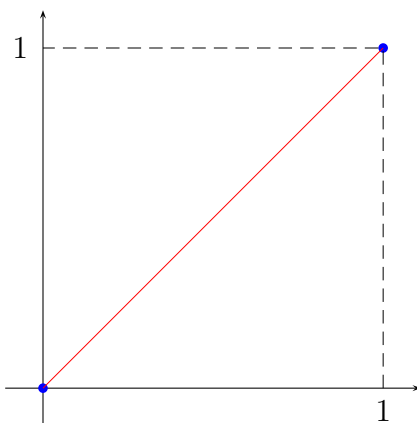


FIGURA 1.6. Effetto del filtro LoG su una immagine

3. Il Teorema di Riesz Thorin e prime applicazioni

Questo è un esempio (forse il più noto e facile) di un teorema di interpolazione per operatori lineari. Sostanzialmente il Teorema dice che l'insieme delle coppie $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ del quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$, per cui un certo operatore T lineare è limitato, è convesso.

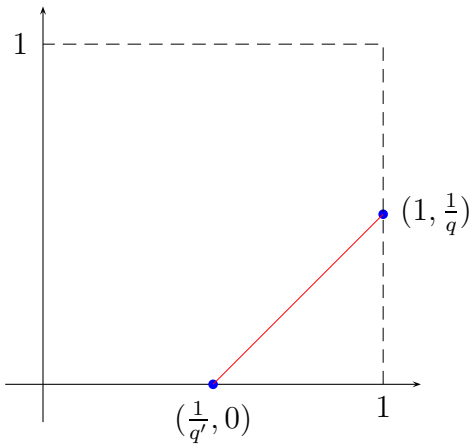


Disegnare un punto (x, y) nel quadrato significa dire che l'operatore lineare che stiamo considerando è limitato da L^p a L^q , dove $\frac{1}{p} = x$ e $\frac{1}{q} = y$.

Desideriamo applicare questo teorema al caso dell'operatore di convoluzione con una funzione L^1 , che abbiamo visto essere limitato su L^1 e su L^∞ : nel disegno questa ipotesi corrisponde ai due punti blu.

Ne ricaviamo che l'operatore di convoluzione con una funzione L^1 è limitato su L^p per ogni p (ovvero la linea rossa). Nel teorema si ricava anche una limitazione sulla norma che dà la disuguaglianza

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$$



Sia ora h in un certo L^q . Le informazioni che abbiamo a disposizione sono la limitatezza dell'operatore di convoluzione per h da L^1 a L^q (appena visto) e da $L^{q'}$ a L^∞ (Proposizione 1.9), come prima rappresentate dai punti blu.

Ne ricaveremo ancora qualche informazione: la limitatezza sui punti corrispondenti alla linea rossa e una stima della norma operatoriale.

La dimostrazione del Teorema di Riesz Thorin si basa sul Lemma delle tre linee, che fa parte di una famiglia di teoremi di analisi complessa sulla limitazione delle funzioni olomorfe sui settori del piano complesso.

LEMMA 1.15 (Tre linee). *Sia F una funzione limitata continua sulla striscia chiusa $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$ e olomorfa nell'interno di tale striscia. Sia inoltre*

$$|F(iy)| \leq m_0 \quad |F(1 + iy)| \leq m_1 \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$|F(x + iy)| \leq m_0^{1-x} m_1^x \quad \forall x + iy \in S.$$

DIMOSTRAZIONE. Iniziamo a dimostrare il lemma nel caso in cui $m_0 = m_1 = 1$. Supponiamo quindi che $m_0 = m_1 = 1$ e dimostriamo che $|F(z)| \leq 1$, per ogni z in S .

Se valesse l'ipotesi aggiuntiva

$$(1.1) \quad \lim_{|y| \rightarrow +\infty} F(x + iy) = 0, \quad \text{uniformemente rispetto a } x,$$

allora potremmo concludere applicando il principio del massimo. Infatti, esisterebbe un certo $y_0 > 0$ tale che

$$|F(x + iy)| \leq 1 \quad |y| \geq y_0 \quad \forall x$$

e quindi F sarebbe una funzione continua sul rettangolo $R = \{x + iy : |y| \leq y_0\}$ (che è un insieme limitato) olomorfa all'interno di questo rettangolo. La funzione F avrebbe quindi massimo modulo sulla frontiera. Ma sui lati del rettangolo il modulo di F sarebbe minore o uguale a 1, quindi $|F(z)| \leq 1$ anche per ogni z nel rettangolo R . Siccome $S = R \cup \{x + iy : |y| \geq y_0\}$, si avrebbe $|F(z)| \leq 1$ per ogni z in S .

Una famiglia di funzioni che godono della proprietà (1.1) è $f_\varepsilon(z) = e^{\varepsilon(z^2-1)}$, con $\varepsilon > 0$. Infatti se $0 \leq x \leq 1$ si ha $|f_\varepsilon(x + iy)| = e^{\varepsilon \operatorname{Re}((x+iy)^2-1)} = e^{\varepsilon(x^2-1)} e^{-\varepsilon y^2} \leq e^{-\varepsilon y^2}$.

Cerchiamo quindi di ridurci al caso facile (1.1), considerando per $\varepsilon > 0$

$$G_\varepsilon(z) = F(z) e^{\varepsilon(z^2-1)}.$$

Si ha $|G_\varepsilon(iy)| = |F(iy)| e^{-\varepsilon} e^{-\varepsilon y^2} \leq 1$, $|G_\varepsilon(1+iy)| = |F(1+iy)| e^{-\varepsilon y^2} \leq 1$ e, siccome F è limitata,

$$|G_\varepsilon(x+iy)| \leq M e^{-\varepsilon y^2} \xrightarrow{|y| \rightarrow \infty} 0,$$

ovvero vale ancora la (1.1) per la funzione G_ε .

Possiamo concludere che $|G_\varepsilon(z)| \leq 1$ per ogni z nella striscia S . Quindi per ogni $\varepsilon > 0$

$$|F(z)| = |G_\varepsilon(z)| |e^{-\varepsilon(z^2-1)}| \leq e^{-\varepsilon \operatorname{Re}(z^2-1)} \quad \forall z \in S.$$

La tesi (nel caso $m_0 = m_1 = 1$) segue facendo tendere ε a zero.

Se poi $m_0, m_1 > 0$, basta ragionare sulla funzione $\tilde{F}(z) = F(z) m_0^{z-1} m_1^{-z}$ che permette di riportarsi al caso $m_0 = m_1 = 1$.

Se infine m_0 (oppure m_1) è uguale a zero, allora usando il teorema con $m_0 = \varepsilon > 0$, si ha $|F(x+iy)| \leq \varepsilon^{1-x} m_1^x$. Quindi, passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ha $F(x+iy) = 0$ se $0 \leq x < 1$ e per continuità $F(z) = 0$ su S . \square

OSSERVAZIONE 1.16. Se f è in $L^{p_0} \cap L^{p_1}$, allora f è in L^p dove $\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}$ e inoltre $\|f\|_p \leq \|f\|_{p_0}^{1-t} \|f\|_{p_1}^t$. (Da fare per esercizio, usando la disuguaglianza di Hölder)

OSSERVAZIONE 1.17. Ricordiamo che per h in $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$,

$$\|h\|_p = \sup \{ |\langle h, \phi \rangle| : \|\phi\|_{p'} = 1 \},$$

dove $\langle h, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} h(x) \phi(x) dx$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Infatti, dalla disuguaglianza di Hölder $|\langle h, \phi \rangle| \leq \|h\|_p \|\phi\|_{p'}$ segue banalmente

$$\sup \{ |\langle h, \phi \rangle| : \|\phi\|_{p'} = 1 \} \leq \|h\|_p.$$

Verifichiamo la disuguaglianza opposta. Un caso banale è quello in cui $\|h\|_p = 0$. Supponiamo quindi che $\|h\|_p \neq 0$ e, inizialmente, $1 \leq p < \infty$. Definiamo

$$\phi(x) = \begin{cases} \|h\|_p^{1-p} \frac{|h(x)|^p}{h(x)} & \text{se } h(x) \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si noti che ϕ è in $L^{p'}$, $\|\phi\|_{p'} = 1$ e $\langle h, \phi \rangle = \|h\|_p$. Quindi per $1 \leq p < \infty$ abbiamo trovato che

$$\|h\|_p = \max \{ |\langle h, \phi \rangle| : \|\phi\|_{p'} = 1 \}.$$

Se $p = \infty$ (e $\|h\|_\infty \neq 0$), verifichiamo che per ogni $0 < \varepsilon < 1$ fissato, $(1-\varepsilon)\|h\|_\infty$ non è un maggiorante per l'insieme $\{ |\langle h, \phi \rangle| : \|\phi\|_1 = 1 \}$.

Consideriamo l'insieme

$$E_\varepsilon = \{ x \in \mathbb{R}^d : |h(x)| > (1-\varepsilon)\|h\|_\infty \}.$$

L'insieme E_ε è misurabile e ha misura positiva, per la definizione di estremo superiore essenziale. Potrebbe avere misura infinita, ma siccome la misura di Lebesgue è σ -finita, possiamo

trovare un sottoinsieme \tilde{E}_ε misurabile di E_ε di misura positiva e finita. Poniamo

$$\phi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{|\tilde{E}_\varepsilon|} \frac{\overline{h(x)}}{|h(x)|} & \text{se } x \in \tilde{E}_\varepsilon \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora $\|\phi_\varepsilon\|_1 = 1$. D'altra parte

$$\langle h, \phi_\varepsilon \rangle = \int_{\tilde{E}_\varepsilon} \frac{1}{|\tilde{E}_\varepsilon|} \frac{\overline{h(x)}}{|h(x)|} h(x) dx = \int_{\tilde{E}_\varepsilon} \frac{1}{|\tilde{E}_\varepsilon|} |h(x)| dx > (1 - \varepsilon) \|h\|_\infty.$$

Sia T un operatore lineare definito su un qualche sottospazio \mathcal{D} delle funzioni misurabili in \mathbb{R}^d tale che Tf sia ancora una funzione misurabile. Supponiamo che \mathcal{D} sia denso in L^p e che valga

$$\|Tf\|_q \leq C \|f\|_p \quad \forall f \in \mathcal{D}.$$

Allora è facile vedere che T si estende (in modo unico) a un operatore lineare e continuo da L^p a L^q . Più brevemente diremo che T è un operatore lineare e continuo da L^p a L^q .

TEOREMA 1.18 (Riesz Thorin). *Siano $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, e sia T un operatore lineare e continuo da L^{p_0} a L^{q_0} e da L^{p_1} a L^{q_1} .² Allora, dato t in $[0, 1]$ e posto*

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1},$$

T è continuo da L^{p_t} a L^{q_t} e

$$\|T\|_{L^{p_t} \rightarrow L^{q_t}} \leq \|T\|_{L^{p_0} \rightarrow L^{q_0}}^{1-t} \|T\|_{L^{p_1} \rightarrow L^{q_1}}^t.$$

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $M_0 = \|T\|_{L^{p_0} \rightarrow L^{q_0}}$ e $M_1 = \|T\|_{L^{p_1} \rightarrow L^{q_1}}$. Dobbiamo verificare che T è ben definito su L^{p_t} e che

$$\|Tf\|_{q_t} \leq M_0^{1-t} M_1^t \quad \forall f \in L^{p_t} \text{ (o in un sottospazio denso), } \|f\|_{p_t} = 1.$$

Siccome $\|h\|_{q_t} = \sup \{ |\langle h, g \rangle| : \|g\|_{q_t} = 1 \}$, dobbiamo stimare

$$\sup \{ |\langle Tf, g \rangle| : \|f\|_{p_t} = \|g\|_{q_t} = 1 \}.$$

Supponiamo dapprima che $p = p_t$ sia finito e $q = q_t > 1$ ovvero q' sia finito. Allora le funzioni limitate e a supporto compatto sono dense in L^p e $L^{q'}$ e basta quindi considerare f e g siffatte nel calcolo del sup.

Per z complesso definiamo $p(z)$ e $q'(z)$ ponendo

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1} \quad \frac{1}{q'(z)} = \frac{1-z}{q'_0} + \frac{z}{q'_1}.$$

Inoltre per q.o. x, y in \mathbb{R}^d definiamo

$$\varphi_z(x) = |f(x)|^{p/p(z)} \frac{f(x)}{|f(x)|} \quad \psi_z(y) = |g(y)|^{q'/q'(z)} \frac{g(y)}{|g(y)|}$$

²più precisamente sarebbero due operatori, che tuttavia coincidono sull'intersezione dei domini

(dove i denominatori sono nulli, le funzioni si definiscano nulle). Siccome f e g sono limitate e a supporto compatto, φ_z e ψ_z sono in L^{p_j} e in $L^{q'_j}$ rispettivamente (si noti che $|\varphi_z| = |f|^{\operatorname{Re}(p/p(z))}$ e $|\psi_z| = |g|^{\operatorname{Re}(q'/q'(z))}$).

Allora $T\varphi_z$ per ipotesi è in L^{q_j} con $j = 0, 1$ e ha senso considerare la funzione

$$F(z) = \langle T\varphi_z, \psi_z \rangle,$$

che è olomorfa nell'interno della striscia S , continua in S , limitata:

$$|F(z)| \leq \|T\varphi_z\|_{q_0} \|\psi_z\|_{q'_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0} \|g\|_{q'_0}.$$

Con l'idea di applicare il lemma delle tre linee, controlliamo

$$|F(iy)| \leq \|T\varphi_{iy}\|_{q_0} \|\psi_{iy}\|_{q'_0} \leq M_0 \|\varphi_{iy}\|_{p_0} \|\psi_{iy}\|_{q'_0} \leq M_0.$$

Infatti, notiamo che $\|\varphi_{iy}\|_{p_0} = \|f\|_p^{p/p_0} = 1$ e $\|\psi_{iy}\|_{q'_0} = \|g\|_{q'}^{q'/q'_0} = 1$.

Analogamente,

$$|F(1+iy)| \leq \|T\varphi_{1+iy}\|_{q_1} \|\psi_{1+iy}\|_{q'_1} \leq M_1 \|\varphi_{1+iy}\|_{p_1} \|\psi_{1+iy}\|_{q'_1} \leq M_1.$$

Ne deduciamo che $|F(x)| \leq M_0^{1-x} M_1^x$. Questo vale per ogni f e g come sopra e quindi abbiamo il risultato voluto.

Se fosse $p = \infty$, allora in tal caso $p_0 = p_1 = \infty$. Se fosse $q = 1$, allora $q_0 = q_1 = 1$. Quindi il caso $p = \infty$ e $q = 1$ è banale.

Supponiamo $p = \infty$ (e $q \neq 1$). Per l'osservazione 1.16 per ogni f in L^∞

$$\|Tf\|_q \leq \|Tf\|_{q_0}^{1-t} \|Tf\|_{q_1}^t \leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_\infty.$$

Infine quando $q = q_0 = q_1 = 1$ si può ripetere il ragionamento scegliendo $\psi_z = g$ non necessariamente a supporto compatto. \square

TEOREMA 1.19 (Disuguaglianza di Young). *Siano f in L^p e g in L^q , con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Allora $f * g$ è in L^r , dove $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ e*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che se $q = \infty$ allora $p = 1$ e quindi $r = \infty$ e ricadiamo in un caso già noto: la Proposizione 1.9.

Iniziamo con il caso $q = 1$, e quindi $r = p$; dobbiamo dimostrare che se f è in L^p e g è in L^1 , allora $f * g$ è in L^p e vale $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$. Si consideri l'operatore T_g di convoluzione per la funzione g : $T_g(f) = f * g$. Tale operatore è lineare e continuo su L^1 e su L^∞ per quanto visto nella Proposizione 1.9 e nel Teorema 1.11. Inoltre,

$$\|T_g\|_{L^1 \rightarrow L^1} \leq \|g\|_1 \quad \text{e} \quad \|T_g\|_{L^\infty \rightarrow L^\infty} \leq \|g\|_1.$$

Quindi per interpolazione possiamo dire che se p è tale che $\frac{1}{p} = \frac{1-t}{\infty} + \frac{t}{1}$ per $0 < t < 1$, ovvero per ogni p , si ha T_g limitato su L^p e $\|T_g\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq \|g\|_1^{1-t} \|g\|_1^t = \|g\|_1$, il che fornisce appunto

$$\|f * g\|_p = \|T_g(f)\|_p \leq \|T_g\|_{L^p \rightarrow L^p} \|f\|_p \leq \|g\|_1 \|f\|_p \quad \forall f \in L^p.$$

Supponiamo ora che g sia in L^q , $1 < q < \infty$, e consideriamo di nuovo l'operatore T_g di convoluzione per g . Per quanto appena visto, T_g risulta essere limitato da L^1 a L^q e $\|T_g\|_{L^1 \rightarrow L^q} \leq \|g\|_q$. Inoltre, come detto nell'osservazione 1.10, T_g è limitato da $L^{q'}$ a L^∞ e di nuovo $\|T_g\|_{L^{q'} \rightarrow L^\infty} \leq \|g\|_q$.

Per il Teorema di Riesz Thorin, se p è tra 1 e q' in modo che

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{1} + \frac{t}{q'} = 1-t + \frac{t}{q'} = 1-t \left(1 - \frac{1}{q'}\right) = 1 - \frac{t}{q}$$

e r è tra q e ∞ in modo che

$$\frac{1}{r} = \frac{1-t}{q} + \frac{t}{\infty} = \frac{1-t}{q}$$

allora T_g è limitato da L^p a L^r con norma controllata da $\|g\|_q$. Il che vuol dire che

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad \forall f \in L^p$$

quando $\frac{1}{r} = \frac{1-t}{q} = \frac{1}{q} - \frac{t}{q} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1$. □

La disuguaglianza di Young si poteva ottenere anche mediante ripetute applicazioni della disuguaglianza di Hölder. Useremo il Teorema di Riesz–Thorin anche in seguito riguardo alla trasformata di Fourier.

4. Identità approssimate

Abbiamo detto che L^1 è un'algebra (rispetto al prodotto di convoluzione). Nella prossima proposizione verifichiamo che è senza identità:

PROPOSIZIONE 1.20. *Non esiste h in L^1 tale che $h * g = g$ per ogni g in L^1 .*

DIMOSTRAZIONE. Si verifica facilmente che

$$\int_{\mathbb{R}^d} f * g(x) dx = \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx \right) \quad \forall f, g \in L^1.$$

Supponiamo per assurdo che esista una funzione h tale che $h * g = g$ per ogni g in L^1 . Allora

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} h(x) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx \right) = \int_{\mathbb{R}^d} h * g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx \quad \forall g \in L^1,$$

da cui $\int_{\mathbb{R}^d} h(x) dx = 1$.

Siccome l'identità $h * g = g$ è vera per ogni g , in particolare essa vale per ogni g continua a supporto compatto e tale che 0 non è nel supporto di g . Ma allora, dal fatto che g è continua

a supporto compatto segue che $h * g$ è continua e quindi $h * g = g$ ovunque, perché si tratta di funzioni continue. A questo punto da $h * g(0) = g(0) = 0$ segue

$$\int_{\mathbb{R}^d} h(y) g(-y) dy = 0 \quad \forall g \in C_c(\mathbb{R}^d), \quad 0 \notin \text{supp} g.$$

Si conclude che h deve essere nulla q.o. e quindi non può essere $\int_{\mathbb{R}^d} h(x) dx = 1$. \square

Un'altra dimostrazione di questo fatto si può ricavare utilizzando la trasformata di Fourier.

Ci sono tuttavia delle identità approssimate.

DEFINIZIONE 1.2. Una successione di funzioni integrabili (K_n) è una identità approssimata se

- (1) $K_n(x) \geq 0$ quasi ovunque;
- (2) $\int_{\mathbb{R}^d} K_n(x) dx = 1$ per ogni n ;
- (3) per ogni $\delta > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq \delta} K_n(x) dx = 0$.

TEOREMA 1.21. Sia (K_n) un'identità approssimata. Allora se f è in L^1 si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f * K_n - f\|_1 = 0;$$

se f è C_0 , allora $f * K_n$ converge a f uniformemente; se f è limitata allora $f * K_n$ converge a f nei punti ove f è continua.

DIMOSTRAZIONE. Siccome $\int_{\mathbb{R}^d} K_n(x) dx = 1$ per ogni n , possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f * K_n(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) K_n(y) dy - f(x) \int_{\mathbb{R}^d} K_n(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x)) K_n(y) dy. \end{aligned}$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Nel primo caso, in cui f è integrabile, per il Teorema di Tonelli,

$$\|f * K_n - f\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)| K_n(y) dy dx = \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_1 K_n(y) dy.$$

In corrispondenza di $\varepsilon > 0$, per la continuità delle traslazioni in L^1 , esiste $\delta > 0$ tale che se $|y| < \delta$ si abbia $\|\tau_y f - f\|_1 < \varepsilon$.

Inoltre $K_n(x) \geq 0$, quindi $\int_{|y| < \delta} K_n(y) dy \leq \int_{\mathbb{R}^d} K_n(y) dy = 1$ e

$$\int_{|y| < \delta} \|\tau_y f - f\|_1 K_n(y) dy < \varepsilon \int_{|y| < \delta} K_n(y) dy \leq \varepsilon.$$

D'altra parte, $\|\tau_y f - f\|_1 \leq \|\tau_y f\|_1 + \|f\|_1 = 2\|f\|_1$, quindi

$$\int_{|y| \geq \delta} \|\tau_y f - f\|_1 K_n(y) dy \leq 2\|f\|_1 \int_{|y| \geq \delta} K_n(y) dy.$$

Siccome $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq \delta} K_n(x) dx = 0$, esiste \bar{n} in \mathbb{N} tale che $\int_{|y| \geq \delta} K_n(y) dy < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$.

Concludendo, se $n \geq \bar{n}$,

$$\begin{aligned}
\|f * K_n - f\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_1 K_n(y) dy \\
&= \int_{|y| < \delta} \|\tau_y f - f\|_1 K_n(y) dy + \int_{|y| \geq \delta} \|\tau_y f - f\|_1 K_n(y) dy \\
&< \varepsilon + 2\|f\|_1 \int_{|y| \geq \delta} K_n(y) dy \\
&< \varepsilon (1 + 2\|f\|_1).
\end{aligned}$$

Nel caso in cui f sia in C_0 , possiamo dire che f è limitata e uniformemente continua, quindi che esiste $\delta > 0$ tale che se $|y| < \delta$ si abbia $\|\tau_y f - f\|_\infty < \varepsilon$. Da cui

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f * K_n(x) - f(x)| &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\tau_y f(x) - f(x)| K_n(y) dy \\
&\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|y| < \delta} |\tau_y f(x) - f(x)| K_n(y) dy + \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|y| \geq \delta} |\tau_y f(x) - f(x)| K_n(y) dy \\
&< \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} K_n(y) dy + 2\|f\|_\infty \int_{|y| \geq \delta} K_n(y) dy \\
&< \varepsilon (1 + 2\|f\|_1),
\end{aligned}$$

per n abbastanza grande.

Nel caso di f limitata e continua in un punto (diciamo sia x_0) possiamo ragionare nello stesso modo: in corrispondenza di $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ tale che se $|y| < \delta$ si abbia $|f(x_0 - y) - f(x_0)| < \varepsilon$. Allora

$$\begin{aligned}
|f * K_n(x_0) - f(x_0)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\tau_y f(x_0) - f(x_0)| K_n(y) dy \\
&= \int_{|y| < \delta} |\tau_y f(x_0) - f(x_0)| K_n(y) dy + \int_{|y| \geq \delta} |\tau_y f(x_0) - f(x_0)| K_n(y) dy \\
&< \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} K_n(y) dy + 2\|f\|_\infty \int_{|y| \geq \delta} K_n(y) dy \\
&< \varepsilon (1 + 2\|f\|_\infty),
\end{aligned}$$

per n abbastanza grande. □

Bella definizione e bel risultato, ma esiste almeno una successione che ha queste proprietà?

Un modo semplice di generare identità approssimate è partire da una funzione non banale, integrabile e non negativa ϕ . A meno di dividere per la sua media, possiamo supporre che ϕ soddisfi anche la seconda proprietà, ovvero $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dx = 1$.

A questo punto si ponga

$$K_n(x) = \delta_{1/n}\phi(x) = n^d \phi(nx) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \forall n \geq 1.$$

È facile verificare che $(K_n)_n$ è un'identità approssimata; infatti, la prima e la seconda proprietà sono banalmente verificate; la terza segue per convergenza dominata

$$\begin{aligned} \int_{|x|>\delta} K_n(x) dx &= \int_{|x|>\delta} n^d \phi(nx) dx \\ &= \int_{|x|>n\delta} \phi(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y) 1_{\{|x|>n\delta\}}(y) dy \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

perché $\phi 1_{\{|x|>n\delta\}} \leq \phi$ con ϕ integrabile e $1_{\{|x|>n\delta\}} \rightarrow 0$ puntualmente.

ESEMPIO 1.22. Sia $G(x) = e^{-\pi|x|^2}$ per ogni x in \mathbb{R}^d . Allora $\int_{\mathbb{R}^d} G(x) dx = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx\right)^d = 1$. Poniamo

$$G_n(x) = n^d e^{-\pi n^2|x|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad n \geq 1.$$

La famiglia $(G_n)_n$ è una identità approssimata.

ESEMPIO 1.23. Un'altra famiglia importante parte da una funzione liscia e a supporto compatto nella palla unitaria

$$\Phi(x) = \begin{cases} c e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & |x| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove la costante c è $1/\int_{B_1} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} dx$. Poniamo

$$\Phi_n(x) = n^d \Phi(nx) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad n \geq 1.$$

La famiglia $(\Phi_n)_n$ è una identità approssimata in cui ciascun termine è una funzione liscia a supporto compatto.

Per esercizio, si verifichi che C_c^∞ è denso in C_0 (rispetto alla norma della convergenza uniforme) e che per $1 \leq p < \infty$, C_c^∞ è denso in L^p (rispetto alla norma L^p).

5. La Trasformata di Fourier: il Caso di L^1 e lo spazio di Schwartz

La trasformata di Fourier è nata come un modo efficace per studiare le equazioni differenziali come l'equazione del calore e quella delle onde. In generale, si desidera scrivere una funzione in termini di funzioni elementari cioè facili da trattare, dove facile vuol dire che la funzione elementare è autofunzione rispetto alla derivazione.

Stiamo quindi cercando funzioni e tali che

$$\partial_j e(x) = \lambda_j e(x)$$

per ogni $j = 1, \dots, d$. Si tratta di un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali molto semplice. Siccome $\partial_1 e = \lambda_1 e$, ne ricaviamo che $e(x_1, x_2, \dots, x_d) = c(x_2, \dots, x_d) e^{\lambda_1 x_1}$.

Ragionando induttivamente ne concludiamo che una tal funzione e deve essere un multiplo di un esponenziale del tipo $e^{\lambda \cdot x}$.

Per descrivere in questo modo le funzioni L^1 vorremmo poter sapere quale è il peso, ossia la correlazione, della funzione elementare e all'interno di ciascuna funzione integrabile: è meglio che tali autofunzioni e siano limitate, quindi che ciascun λ_j sia un immaginario puro. Appare quindi ragionevole la seguente definizione.

DEFINIZIONE 1.3. Sia f una funzione integrabile su \mathbb{R}^d . La trasformata di Fourier di f è la funzione \hat{f} definita da

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

È una buona definizione: l'integrale converge assolutamente e \hat{f} è limitata:

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Inoltre, per il Teorema di convergenza dominata, \hat{f} è continua.

Spesso si usa anche definire la trasformata di Fourier mediante la formula

$$\tilde{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i x \cdot \xi} dx \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

La definizione è sostanzialmente equivalente, infatti

$$(1.2) \quad \hat{f}(\xi) = \tilde{f}(2\pi\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d,$$

ovvero una funzione è la dilatata dell'altra di un fattore 2π . Alcune formule variano, ma si possono ricavare facilmente dalla (1.2).

Indichiamo con

$$e_\xi(x) = e^{-2\pi i x \cdot \xi} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

la funzione elementare che compare nella definizione della trasformata. È quella che i fisici o gli ingegneri chiamano onda piana, nel senso che è costante su un piano e si propaga nella direzione ortogonale a esso. Il vettore ξ rappresenta una frequenza, nel senso di ξ_j cicli nell'unità di spazio nella direzione x_j , $j = 1, \dots, d$. Il prodotto $x \cdot \xi$ rappresenta il numero di cicli della funzione $x \mapsto e^{-2\pi i x \cdot \xi}$ che un osservatore nota partendo dall'origine e arrivando nel punto x .

Se non si mette il fattore 2π all'esponente, ξ rappresenta di nuovo una frequenza, ma è misurata in radianti per unità di spazio.

ESEMPIO 1.24. Calcoliamo la trasformata della gaussiana $G(x) = e^{-\pi|x|^2}$:

$$\begin{aligned}\widehat{G}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|x|^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_1^2} e^{-2\pi i x_1 \xi_1} dx_1 \cdots \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_d^2} e^{-2\pi i x_d \xi_d} dx_d \\ &= e^{-\pi|\xi|^2} = G(\xi).\end{aligned}$$

Quindi la trasformata della Gaussiana è la Gaussiana stessa.

Si noti che in questo modo possiamo verificare che l'operatore (lineare)

$$L^1(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{\widehat{\cdot}} C_b(\mathbb{R}^d) \quad f \mapsto \widehat{f}$$

ha norma 1.

ESEMPIO 1.25. Calcoliamo la trasformata della funzione caratteristica del quadrato in \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{1}_{[-1,1] \times [-1,1]}}(\xi_1, \xi_2) &= \int_{-1}^1 e^{-2\pi i x_1 \xi_1} dx_1 \int_{-1}^1 e^{-2\pi i x_2 \xi_2} dx_2 \\ &= \frac{\sin(2\pi \xi_1)}{\pi \xi_1} \frac{\sin(2\pi \xi_2)}{\pi \xi_2}.\end{aligned}$$

ESEMPIO 1.26. Calcoliamo la trasformata della funzione caratteristica della palla in \mathbb{R}^3 : se utilizziamo le coordinate polari

$$\widehat{\mathbb{1}_{|x| \leq 1}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{-2\pi i r(\sin \theta \cos \phi \xi_1 + \sin \theta \sin \phi \xi_2 + \cos \theta \xi_3)} d\phi \sin \theta d\theta r^2 dr$$

sembra un conto impossibile!

Vediamo ora interazione tra trasformata e le solite operazioni sulle funzioni.

Se A è una matrice invertibile, denotiamo con Af la funzione

$$(Af)(x) = f(A^{-1}x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

PROPOSIZIONE 1.27. *La trasformata di Fourier è un operatore lineare. Inoltre, per ogni funzione f integrabile, valgono le seguenti proprietà.*

- (1) se h è in \mathbb{R}^d , allora $\widehat{\tau_h f} = e_h \widehat{f}$;
- (2) se h è in \mathbb{R}^d , allora $\widehat{\tau_{-h} f} = e_{-h} \widehat{f}$;
- (3) se A è una mappa lineare invertibile, allora $\widehat{Af} = |\det A| {}^t A^{-1} \widehat{f}$; in particolare
 - se $r > 0$, allora $\widehat{\delta_r f} = \widehat{f}(r \cdot)$;
 - se R è una rotazione, allora $\widehat{Rf} = R \widehat{f}$;
 - se f è radiale, allora \widehat{f} è radiale.

DIMOSTRAZIONE. La (1) è banale. Per la (2), si ha

$$\begin{aligned}\widehat{\tau_h f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x - h) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i (y+h) \cdot \xi} f(y) dy \\ &= e^{-2\pi i h \cdot \xi} \hat{f}(\xi) = e_h(\xi) \hat{f}(\xi)\end{aligned}$$

Per la (3) si scriva

$$\begin{aligned}\widehat{e_h f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \cdot \xi} e^{-2\pi i h \cdot x} f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \cdot (\xi+h)} f(x) dx \\ &= \hat{f}(\xi + h) = \tau_{-h} \hat{f}(\xi)\end{aligned}$$

Infine

$$\begin{aligned}\widehat{A f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(A^{-1} x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i A y \cdot \xi} f(y) |\det A| dx \\ &= |\det A| \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i y \cdot {}^t A \xi} f(y) dy \\ &= |\det A| \hat{f}({}^t A \xi) = |\det A| {}^t A^{-1} \hat{f}(\xi)\end{aligned}$$

In particolare, quando $A = \text{diag}(r, \dots, r)$, si ha ${}^t A^{-1} = \text{diag}(r^{-1}, \dots, r^{-1})$, $|\det A| = r^d$ e si ottiene la prima relazione.

Se la matrice A è nel gruppo ortogonale, allora $A = {}^t A^{-1}$ e $|\det A| = 1$, quindi la trasformata di Fourier commuta con le rotazioni.

Infine, quando f è una funzione radiale, equivalentemente $A f = f$ per ogni A nel gruppo ortogonale, allora $\hat{f} = \widehat{A f} = A \hat{f}$ per ogni A nel gruppo ortogonale, ovvero anche \hat{f} è radiale. \square

ESEMPIO 1.28. Ritorniamo alla trasformata della caratteristica del quadrato: basta dilatare per ottenere rettangoli; ruotare per ottenere rombi...

ESEMPIO 1.29. Ritorniamo alla trasformata della caratteristica della palla: è sufficiente calcolarla in un punto (e conviene $(0, 0, \xi_3)$) e poi cavarsela con l'invarianza per rotazioni.

Risulta

$$\widehat{1_B}(\xi) = \frac{1}{\pi |\xi|^3} \left(\frac{\sin(2\pi |\xi|)}{2\pi} - |\xi| \cos(2\pi |\xi|) \right).$$

Più in generale, abbiamo visto che se f è radiale, ovvero $f(x) = f_0(|x|)$, allora

$$\hat{f}(\xi) = F_0(|\xi|)$$

per un'opportuna funzione F_0 . C'è qualche relazione fra f_0 e F_0 ?

La risposta è semplice in dimensione 1 e 3.

Quando $d = 1$ dire che f è radiale vuol semplicemente dire che f è pari, perché ci sono solo due rotazioni. È quindi immediato trovare la relazione, se $|\xi| = \rho$

$$\begin{aligned} F_0(\rho) &= \hat{f}(|\xi|) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x |\xi|} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_0(|x|) e^{-2\pi i x |\xi|} dx \\ &= \int_0^\infty f_0(x) e^{-2\pi i x |\xi|} dx + \int_{-\infty}^0 f_0(-x) e^{-2\pi i x |\xi|} dx \\ &= \int_0^\infty f_0(r) (e^{-2\pi i r |\xi|} + e^{2\pi i r |\xi|}) dr \\ &= 2 \int_0^\infty f_0(r) \cos(2\pi i r \rho) dr. \end{aligned}$$

Quando $d = 3$, si ragiona come nell'esercizio precedente; sempre supponendo che ξ sia un qualunque punto con $|\xi| = \rho$

$$\begin{aligned} F_0(\rho) &= \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= \int_0^\infty f_0(r) \int_{S^2} e^{-2\pi i r \omega \cdot \xi} d\sigma(\omega) r^2 dr \\ &= \int_0^\infty f_0(r) \frac{2 \sin(2\pi \rho r)}{\rho r} r^2 dr \\ &= 2\rho^{-1} \int_0^\infty f_0(r) \sin(2\pi \rho r) r dr. \end{aligned}$$

Per altre dimensioni, c'è una descrizione in termini di funzioni di Bessel, che sono funzioni che si trovano spesso in problemi a simmetria radiale. (si vedano gli esercizi).

ESEMPIO 1.30. Sia t positivo e valutiamo la trasformata di $P_t(x) = e^{-t|x|}$. Basta anche $t = 1$, per le dilatazioni. È una funzione radiale, quindi la sua trasformata sarà radiale.

$$\begin{aligned} \hat{P}_t(\xi) &= \hat{P}_t(|\xi|, 0, \dots, 0) \\ &= \int_0^\infty e^{-tr} \int_0^\pi e^{-2\pi i |\xi| r \cos \theta_1} \sin^{d-2} \theta_1 d\theta_1 r^{d-1} dr \left(\prod_{j=2}^{d-2} \int_0^\pi \sin^{d-j-1} \theta_j d\theta_j \right) \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= ??? \end{aligned}$$

In una dimensione si usa integrazione complessa. In dimensione 3 non viene un conto bruttissimo. In generale, si usa il principio di subordinazione (si veda l'esercizio 11 alla fine di questo capitolo).

PROPOSIZIONE 1.31. *Siano f e g due funzioni integrabili. Allora*

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}.$$

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. □

PROPOSIZIONE 1.32. *Sia f di classe C^1 integrabile e inoltre sia $\partial_j f$ integrabile per un certo $j = 1, \dots, d$. Allora*

$$\widehat{\partial_j f}(\xi) = 2\pi i \xi_j \hat{f}(\xi) \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia f una funzione di classe C^1 a supporto compatto. Integrando per parti nella j -esima variabile con le altre variabili fissate si ottiene la tesi.

Se invece il supporto non è compatto, si tagli f con una funzione $\varphi_r \in C_c^1$ a supporto nella palla di raggio r e tale che $\varphi_r(0) = 1$. Basta prendere $\varphi(0) = 1$ a supporto nella palla di raggio 1 e porre $\varphi_r(x) = \varphi(x/r)$. Allora per convergenza dominata

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} \widehat{f \varphi_r}(\xi) &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(x/r) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} \widehat{\partial_j (f \varphi_r)}(\xi) &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_j (f \varphi_r)(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_j f(x) \varphi(x/r) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx + \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) (\partial_j \varphi)(x/r) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \end{aligned}$$

Il primo addendo per convergenza dominata tende a $\widehat{\partial_j f}$; il secondo addendo è $1/r$ per un integrale che è limitato indipendentemente da r . Quindi, siccome la formula è vera per f in C_c^1 si ha

$$\widehat{\partial_j f}(\xi) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \widehat{\partial_j (f \varphi_r)}(\xi) = 2\pi i \xi_j \lim_{r \rightarrow +\infty} \widehat{f \varphi_r}(\xi) = 2\pi i \xi_j \hat{f}(\xi).$$

□

TEOREMA 1.33 (Riemann–Lebesgue). *Sia f una funzione integrabile. Allora \hat{f} è uniformemente continua e $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$.*

OSSERVAZIONE 1.34. Usando il fatto che la trasformata di Fourier porta la convoluzione di due funzioni nel prodotto delle loro trasformate e il Lemma di Riemann–Lebesgue si può verificare in maniera alternativa che L^1 non ha identità (rispetto alla convoluzione). Le identità approssimate hanno trasformate che tendono a uno.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia h un vettore. Allora esiste $r > 0$ tale che $\int_{|x|>r} |f(x)| dx < \varepsilon$ perché f è integrabile. Scriviamo

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)| &= \left| \int (e^{-2\pi i x \cdot (\xi + h)} - e^{-2\pi i x \cdot \xi}) f(x) dx \right| \\ &\leq \int |e^{-2\pi i x \cdot h} - 1| |f(x)| dx \\ &\leq \int_{|x| \leq r} |2\pi \|h\| |x| |f(x)| dx + \int_{|x| > r} 2 |f(x)| dx \\ &\leq 2\pi r \|h\| \|f\|_1 + 2\varepsilon < 3\varepsilon \end{aligned}$$

se si prende $\|h\| < \varepsilon / (2\pi r \|f\|_1)$. Ne segue che \hat{f} è uniformemente continua.

Se poi g è C_c^1 , allora

$$2\pi |\xi_j| |\hat{g}(\xi)| = |\widehat{\partial_j g}(\xi)| \leq \|\widehat{\partial_j g}\|_1$$

Quindi elevando al quadrato e sommando su j

$$4\pi^2 |\xi|^2 |\hat{g}(\xi)|^2 \leq \sum_j \|\partial_j g\|_1^2 = C$$

dove C è una costante che dipende da g ma non da ξ . Quindi se g è C_c^1 , allora $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \hat{g}(\xi) = 0$, ovvero, se $\varepsilon > 0$ è fissato, allora esiste R tale che per $|\xi| > R$ si abbia $|\hat{g}(\xi)| < \varepsilon$.

A questo punto, usiamo la densità di C_c^1 in L^1 : sia f in L^1 e sia $\varepsilon > 0$ è fissato. Allora esiste g in C_c^1 tale che $\|f - g\|_1 < \varepsilon$, da cui

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi)| &\leq |\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)| + |\hat{g}(\xi)| \\ &\leq \|f - g\|_1 + |\hat{g}(\xi)| < 2\varepsilon \quad \forall \xi : |\xi| > R. \quad \square \end{aligned}$$

COROLLARIO 1.35. *Se f è di classe C^k e sia f sia tutte le sue derivate fino all'ordine k sono integrabili, allora $\hat{f}(\xi) = o(|\xi|^{-k})$ per $\xi \rightarrow \infty$.*

DIMOSTRAZIONE. Nelle ipotesi $(2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi) = \widehat{\partial^\alpha f}(\xi)$ tutte le volte che $|\alpha| \leq k$. Per il Lemma di Riemann–Lebesgue, $\widehat{\partial^\alpha f}(\xi)$ tende a zero per $\xi \rightarrow \infty$. Ora $|\xi|^k$ si controlla con $\sum_{j=1}^d |\xi_j|^k$, ovvero esistono due costanti $c_1, c_2 > 0$ tali che

$$(1.3) \quad c_1 |\xi|^k \leq \sum_{j=1}^d |\xi_j|^k \leq c_2 |\xi|^k \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Infatti la (1.3) è banale per $\xi = 0$. D'altra parte, se $\xi \neq 0$, la (1.3) è equivalente a

$$(1.4) \quad c_1 \leq \sum_{j=1}^d \left| \frac{\xi_j}{|\xi|} \right|^k \leq c_2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

La funzione φ definita da $\varphi(\eta) = \sum_{j=1}^d |\eta_j|^k$ è continua, positiva e quindi sulla sfera $S = \{|\eta| = 1\}$ ha massimo e minimo positivi. Poniamo quindi $c_1 = \min_S \varphi$ e $c_2 = \max_S \varphi$. È immediato verificare che vale la (1.4).

Quindi per una opportuna costante C

$$|\xi|^k |\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{c_1} \sum_{j=1}^d |\xi_j|^k |\hat{f}(\xi)| \leq C \sum_{j=1}^d |\widehat{\partial_j^k f}(\xi)| \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0. \quad \square$$

Quindi la regolarità di f si ripercuote sul decadimento all'infinito di \hat{f} : più f è una funzione regolare, maggiore sarà il decadimento all'infinito di f .

Nella prossima proposizione invece vediamo come proprietà sul decadimento di f influenzino la derivabilità di \hat{f} .

Per comodità poniamo $D_j = \frac{i}{2\pi} \partial_j$ e $D = (D_1, \dots, D_d)$.

PROPOSIZIONE 1.36. *Supponiamo che f sia una funzione integrabile e $x_j f$ sia ancora integrabile. Allora \hat{f} è parzialmente derivabile e*

$$\widehat{x_j f}(\xi) = D_j \hat{f}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

OSSERVAZIONE 1.37. Si noti anche che, nelle ipotesi precedenti, la derivata parziale risulta continua.

Ragionando induttivamente possiamo anche dire che se f e $|x|^k f$ sono integrabili, allora \hat{f} è di classe C^k e per $|\alpha| \leq k$

$$D^\alpha \hat{f}(\xi) = \widehat{x^\alpha f}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Innanzitutto si noti che se $|\alpha| \leq k$ allora $x^\alpha f$ sta in L^1 . Infatti se $|x| \leq 1$, allora $|x^\alpha f| \leq |f|$ e se $|x| \geq 1$ allora $|x^\alpha f| \leq |x|^k |f|$. Il resto è lasciato per esercizio.

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\hat{f}(\xi + he_j) - \hat{f}(\xi)}{h} &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \frac{e^{-2\pi i x \cdot (\xi + he_j)} - e^{-2\pi i x \cdot \xi}}{h} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} \frac{e^{-2\pi i x \cdot he_j} - 1}{h} dx \end{aligned}$$

Siccome $|\frac{e^{-2\pi i x \cdot he_j} - 1}{h}| \leq 2\pi |x_j|$ concludiamo per convergenza dominata. □

Introduciamo ora uno spazio di funzioni molto importante per la trasformata di Fourier: lo spazio di Schwartz. Esso è uno spazio di funzioni “test” altamente regolari e preservato dalla trasformata di Fourier. Ne ricaviamo che le sue funzioni devono anche essere rapidamente decrescenti.

DEFINIZIONE 1.4. Si chiama spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ lo spazio delle funzioni f di classe C^∞ e tali che per ogni α in \mathbb{N}^d e per ogni N in \mathbb{N} esiste una costante $C_{\alpha, N}$ in modo che

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C_{\alpha, N} (1 + |x|^2)^{-N} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Lo spazio di Schwartz è uno spazio vettoriale; è normato rispetto a una qualsiasi delle norme seguenti:

$$\|f\|_{(N,k)} = \sup_{|\alpha| \leq k} \|(1 + |\cdot|^2)^N \partial^\alpha f\|_\infty$$

ma non è completo. Risulta completo rispetto alla metrica indotta dalla distanza

$$d(f, g) = \sum_{N,k} 2^{-N-k} \frac{\|f - g\|_{(N,k)}}{1 + \|f - g\|_{(N,k)}}.$$

OSSERVAZIONE 1.38. È ovvio che lo spazio di Schwartz si immerge in L^p per ogni p . In termini di norme risulta

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} &\leq \|f\|_{(N,0)} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|^2)^{-Np} dx \right)^{1/p} \\ &\leq C \|f\|_{(N,0)} \end{aligned}$$

quando $2Np > d$.

Si noti anche che tutte le funzioni C_c^∞ sono nello spazio di Schwartz, quindi siccome C_c^∞ è denso in L^p , $1 \leq p < \infty$, anche lo spazio di Schwartz è denso in L^p , $1 \leq p < \infty$.

COROLLARIO 1.39. Se f è in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, allora anche \hat{f} è in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

6. La formula di inversione

Vediamo ora come ricostruire una funzione, nota la sua trasformata di Fourier, ovvero noti i suoi contributi lungo le onde piane.

Gli ingredienti sono gli stessi del caso unidimensionale:

- il fatto che la trasformata della gaussiana sia la gaussiana stessa, ovvero la formula di inversione è vera per la gaussiana;
- il fatto che, usando le dilatazioni $(e^{-\pi\delta|x|^2})^\wedge = \delta^{-d/2} e^{-\pi|\xi|^2/\delta}$;
- il fatto che la famiglia $\widehat{G}_\delta(\xi) = \delta^{-d/2} e^{-\pi|\xi|^2/\delta}$ sia un'identità approssimata e quindi

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{G}_\delta(\xi) f(\xi) d\xi \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} f(0)$$

tutte le volte che f è limitata e continua nell'origine.

- la formula di moltiplicazione, che ora vediamo.

TEOREMA 1.40 (Formula di Moltiplicazione). Siano f e g in L^1 . Allora

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \hat{g}(x) dx.$$

DIMOSTRAZIONE. Si noti che gli integrali hanno senso per la diseguaglianza Hölder. Per dimostrare la formula è sufficiente applicare il teorema di Fubini alla funzione

$$h(x, \xi) = e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) g(\xi)$$

che è banalmente assolutamente integrabile in \mathbb{R}^{2d} , perché prodotto di due funzioni L^1 , ciascuna dipendente da un diverso gruppo di variabili in \mathbb{R}^d . \square

TEOREMA 1.41 (Formula di Inversione). *Se f e \hat{f} sono integrabili, allora*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi,$$

per quasi ogni x .

DIMOSTRAZIONE. A scopo esemplificativo, premettiamo la seguente dimostrazione semplificata nell'ipotesi aggiuntiva che f sia continua. Mostriamo che allora

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Dalla formula di moltiplicazione

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) G_\delta(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \widehat{G}_\delta(x) dx = f * \widehat{G}_\delta(0).$$

Siccome \widehat{G}_δ è un'identità approssimata, l'integrale a secondo membro tende a $f(0)$. L'integrale a primo membro invece per convergenza dominata tende a $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) d\xi$. A questo punto adoperiamo le traslazioni-modulazioni e otteniamo la tesi:

$$f(x) = \tau_{-x} f(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\tau_{-x} f}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

La dimostrazione funziona quasi allo stesso modo se f è solo L^1 . Dal fatto che \widehat{G}_δ è un'identità approssimata, segue che $\widehat{G}_\delta * f \rightarrow f$ in norma L^1 . D'altra parte, per la formula di moltiplicazione,

$$\begin{aligned} \widehat{G}_\delta * f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{G}_\delta(x-y) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{G}_\delta(y-x) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \tau_x \widehat{G}_\delta(y) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{e_{-x} G_\delta}(y) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e_{-x}(\xi) G_\delta(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x \cdot \xi} G_\delta(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \end{aligned}$$

quasi ovunque per convergenza dominata. Ma allora i due limiti coincidono quasi ovunque, ossia vale la formula di inversione q.o. \square

In particolare abbiamo quindi ottenuto che $f = (\hat{f})^\wedge(-x)$. Siccome la trasformata di Fourier di una funzione integrabile è continua, ne concludiamo il seguente corollario.

COROLLARIO 1.42. *Se f e \hat{f} sono in L^1 , allora f coincide quasi ovunque con una funzione continua e quindi, cambiando f su un insieme di misura nulla, la formula di inversione vale per ogni x .*

Un'altra conseguenza è l'iniettività della trasformata:

COROLLARIO 1.43. *Se $\hat{f} = 0$, allora $f = 0$ (q.o.)*

Infine, per quanto riguarda funzioni di Schwartz, abbiamo detto che la trasformata di Fourier porta \mathcal{S} in sé e è iniettiva. Nel prossimo teorema diciamo che è anche suriettiva e che ha un buon comportamento per quanto riguarda le norme di Schwartz.

TEOREMA 1.44. *La trasformata di Fourier è un isomorfismo dello spazio di Schwartz.*

DIMOSTRAZIONE. Sulla suriettività basta dire che se g è di Schwartz, allora \hat{g} è ancora di Schwartz e quindi lo è $f = \hat{\hat{g}}$. Ma allora $g = \hat{f}$.

Infine il controllo sulla continuità dell'operatore in ogni norma. □

COROLLARIO 1.45. *Se f e g sono di Schwartz, allora la loro convoluzione $f * g$ è di Schwartz.*

DIMOSTRAZIONE. Basta controllare il decadimento di $f * g$ e di tutte le sue derivate; è immediato sul lato della trasformata. □

7. Trasformata di funzioni L^p , $1 < p \leq 2$

TEOREMA 1.46 (Plancherel). *Sia f una funzione in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Allora $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$ e la trasformata di Fourier si estende a un'isometria suriettiva di $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo innanzi tutto l'uguaglianza delle norme. Sia $f^*(x) = \overline{f(-x)}$. Allora $\hat{f}^*(\xi) = \hat{f}(\xi)$. Poniamo a questo punto $h = f * f^*$. Si tratta della convoluzione di due funzioni L^1 , quindi è L^1 . Inoltre anche la trasformata è in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, che è dentro L^1 , quindi dai fatti

$$\hat{h}(\xi) = |\hat{f}(\xi)|^2 \quad h(0) = f * f^*(0) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx$$

Ricaviamo che

$$\|f\|_2^2 = h(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{h}(\xi) d\xi = \|\hat{f}\|_2^2.$$

Ne segue che la trasformata di Fourier si estende a tutto L^2 e per questa estensione che chiamiamo momentaneamente \mathfrak{F} vale $\|f\|_2 = \|\mathfrak{F}f\|_2$. Infatti, se f è in $L^2(\mathbb{R}^d)$, esiste una

successione (Φ_n) di funzioni di Schwartz che tende a f in norma L^2 . Pertanto la successione (Φ_n) è di Cauchy in L^2 e lo è anche la successione $(\hat{\Phi}_n)$. Siccome L^2 è completo, esiste una funzione g in L^2 tale che

$$\|g - \hat{\Phi}_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Definiamo allora $\mathfrak{F}f = g$. È semplice verificare che è una buona definizione, ovvero che g non dipende dalla scelta della successione (Φ_n) convergente a f . Inoltre, per la continuità della norma, $\|\mathfrak{F}f\|_2 = \lim_n \|\hat{\Phi}_n\|_2 = \lim_n \|\Phi_n\|_2 = \|f\|_2$.

Mostriamo che \mathfrak{F} è suriettiva: se g è ortogonale al rango di \mathfrak{F} , in particolare g è ortogonale al rango della trasformata di Fourier di funzioni di Schwartz, che è tutto lo spazio di Schwartz e quindi è denso in L^2 . Per la continuità del prodotto scalare allora g è ortogonale alla chiusura dello spazio di Schwartz dentro $L^2(\mathbb{R}^d)$. Ne segue che g è ortogonale a tutto L^2 e quindi $g = 0$. \square

Mostriamo ora che la trasformata $\mathfrak{F}f$ di una funzione f in $L^1 \cap L^2$ è semplicemente \hat{f} , quindi non abbiamo introdotto una nuova operazione, ma stiamo semplicemente estendendo quella precedente.

Questo fatto discenderà dal poter approssimare una funzione f in $L^1 \cap L^2$ con una successione di funzioni di Schwartz $(\Phi_n)_n$ sia rispetto alla norma 1 sia rispetto alla norma 2.

LEMMA 1.47. *Sia f in $L^1 \cap L^2$. Allora esiste una successione di funzioni di Schwartz $(\Phi_n)_n$ tale che $\|\Phi_n - f\|_p \rightarrow 0$ per $p = 1, 2$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo inizialmente che f sia a supporto in una palla di raggio R , ovvero che $\int_{|x|>R} |f| dx = 0$.

Siccome le funzioni C_c^∞ sono dense in L^2 , allora esiste una successione φ_n di funzioni C_c^∞ e quindi di Schwartz tale che $\|\varphi_n - f\|_2 \rightarrow 0$.

Non è restrittivo supporre che le funzioni φ_n siano ancora a supporto compatto, ad esempio nella palla di raggio $R + 1$. Altrimenti, si taglino le funzioni φ_n con un cutoff liscio, ovvero si considerino $\varphi_n \chi$, dove χ è una funzione liscia, a supporto nella palla di raggio $R + 1$ tale che $0 \leq \chi(x) \leq 1$ per ogni x e $\chi(x) = 1$ se $|x| \leq R$; in questo caso è semplice verificare che $\|\chi\varphi_n - f\|_2 = \|\chi(\varphi_n - f)\|_2 \leq \|\varphi_n - f\|_2 \rightarrow 0$.

Quindi supponiamo che φ_n siano a supporto nella palla di raggio $R + 1$. Ma allora per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,

$$\|\varphi_n - f\|_1 \leq |B_{R+1}|^{1/2} \|\varphi_n - f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Infine, se f non ha supporto compatto, per ogni n fissato, esiste $R_n > 0$ tale che

$$\int_{|x|>R_n} |f(x)| dx < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \int_{|x|>R_n} |f(x)|^2 dx < \frac{1}{n}.$$

Poniamo $f_n = f$ all'interno di $B(0, R_n)$ e zero al di fuori. f_n ha supporto compatto e abbiamo visto che esiste una successione (φ_m) di funzioni lisce a supporto compatto che approssima f_n sia rispetto alla norma 1 sia rispetto alla norma 2. In particolare esiste m (dipendente da n) tale che $\|\varphi_m - f_n\|_2 < \frac{1}{n}$ e $\|\varphi_m - f_n\|_1 < \frac{1}{n}$. Si ponga $\Phi_n = \varphi_m$. Allora per $p = 1, 2$

$$\|f - \Phi_n\|_p \leq \|f - f_n\|_p + \|f_n - \Phi_n\|_p < \frac{2}{n}$$

da cui $\|f - \Phi_n\|_p \rightarrow 0$ per $p = 1, 2$. □

COROLLARIO 1.48. *Se f è in $L^1 \cap L^2$, allora $\hat{f} = \mathfrak{F}f$.*

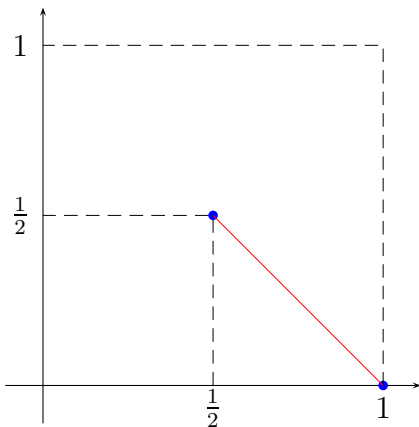
DIMOSTRAZIONE. Siano Φ_n le funzioni del lemma precedente. Dal fatto che (Φ_n) converge a f in L^1 , si ricava che $\|\hat{\Phi}_n - \hat{f}\|_\infty \leq \|\Phi_n - f\|_1 \rightarrow 0$, ovvero che $\hat{\Phi}_n$ converge a \hat{f} uniformemente.

Dal fatto che $\|\Phi_n - f\|_2 \rightarrow 0$ si ricava che $\|\hat{\Phi}_n - \mathfrak{F}f\|_2 \rightarrow 0$, ovvero che $\hat{\Phi}_n$ converge a $\mathfrak{F}f$ in L^2 . Ma allora esiste un'estratta che converge q.o. a $\mathfrak{F}f$. Quindi $\mathfrak{F}f = \hat{f}$ q.o. □

Nel seguito useremo sempre il cappello per indicare la trasformata di Fourier. Si noti che per f in L^2

$$\hat{f}(\xi) = \mathfrak{F}f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx,$$

dove il limite si intende rispetto alla norma L^2 .



Infine, usando il Teorema di Riesz Thorin, otteniamo che la trasformata di Fourier F (definita almeno su \mathcal{S} , sottospazio denso in L^p , $1 \leq p \leq 2$) è un operatore continuo di L^1 in L^∞ e su L^2 , in entrambi i casi la norma è 1. Ne consegue che F si estende a un operatore continuo da L^p a L^q , dove $\frac{1}{p} = \frac{1-t}{1} + \frac{t}{2}$ e $\frac{1}{q} = \frac{1-t}{\infty} + \frac{t}{2}$, ovvero $\frac{1}{p} = 1 - \frac{t}{2}$ e $\frac{1}{q} = \frac{t}{2} = \frac{1}{p'}$.

COROLLARIO 1.49 (Diseguaglianza di Young). *Sia f in L^p , $1 \leq p \leq 2$. Allora la trasformata di Fourier di f è in $L^{p'}$ e*

$$\|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p.$$

8. Teoremi di incertezza

In questa sezione ci occupiamo del fatto che una funzione e la sua trasformata non possono essere entrambe ben localizzate. Questo comporta una serie di problemi nelle applicazioni; numerose sono state le risposte a questo tipo di problema: avete visto la trasformata di Gabor, vedremo un cenno alla trasformata wavelet alla fine del corso.

TEOREMA 1.50. *Se f è una funzione integrabile a supporto compatto (ovvero esiste R tale che $\int_{|x|>R} |f(x)| dx = 0$) e anche \hat{f} ha supporto compatto, allora $f = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Iniziamo con il caso $d = 1$. Se f ha supporto compatto, la funzione di variabile complessa

$$F(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \zeta x} dx$$

è ben definita. Inoltre è olomorfa per il Teorema di Morera (oppure non è difficile verificare le condizioni Cauchy–Riemann). F è un'estensione di \hat{f} . Ma allora, siccome \hat{f} è a supporto compatto, F ha degli zeri non isolati. Per il Teorema sugli zeri delle funzioni olomorfe, F è identicamente nulla. Allora per la formula di inversione $f = 0$.

In dimensione maggiore, si ragiona per assurdo, supponendo che f non sia nulla quasi ovunque. Allora esiste η in \mathbb{R}^d tale che $\hat{f}(\eta) \neq 0$ per l'iniettività della trasformata. A meno di moltiplicare f per un'onda piana, possiamo supporre $\hat{f}(0) \neq 0$. Infatti, la funzione g_η definita da

$$g_\eta(x) = e^{-2\pi i \eta \cdot x} f(x) = e_\eta(x) f(x) \quad x \in \mathbb{R}^d$$

ha ancora supporto compatto come f ,

$$\hat{g}_\eta(\xi) = \tau_{-\eta} \hat{f}(\xi),$$

quindi \hat{g}_η ha supporto compatto (perché è il traslato di un compatto) e $\hat{g}_\eta(0) = \hat{f}(\eta) \neq 0$. D'altra parte, g_η è nulla se e solo se f è nulla.

Quindi supponiamo che $\hat{f}(0) \neq 0$ e ragioniamo, ad esempio, sulla prima coordinata. Consideriamo la funzione

$$\zeta \in \mathbb{C} \mapsto F(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \zeta x_1} dx$$

che per ζ reale coincide con $\hat{f}(\zeta, 0, \dots, 0)$. La funzione F risulta essere olomorfa e, siccome non è nulla, deve essere dotata di zeri isolati. Tuttavia F si annulla quando ζ è reale e al di fuori di un compatto. \square

Quello che vediamo in questa sezione riguarda una stima della grandezza della coda di una funzione. Mostriamo alcuni risultati, uno che riguarda stime di energia, quindi L^2 , gli altri invece danno stime qualitative (puntuali oppure in misura).

Se pensiamo a funzioni “caratteristiche”, il prossimo risultato dice che se f ha supporto in un insieme di volume V , allora la sua trasformata vive in un insieme che ha volume essenzialmente del tipo $1/V$.

TEOREMA 1.51 (Disuguaglianza di Heisenberg). *Sia f una funzione in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ tale che $\|f\|_2 = 1$. Allora*

$$\| |x| f \|_2^2 \| |\xi| \hat{f} \|_2^2 \geq \frac{d^2}{16\pi^2}$$

e inoltre per ogni x_0, ξ_0 in \mathbb{R}^d

$$\| |x - x_0| f \|_2^2 \| |\xi - \xi_0| \hat{f} \|_2^2 \geq \frac{d^2}{16\pi^2}.$$

DIMOSTRAZIONE. La seconda disuguaglianza si riduce alla prima quando $x_0 = \xi_0 = 0$. Inoltre, supposto di aver provato la prima disuguaglianza, la seconda segue banalmente applicando la prima disuguaglianza alla funzione $g(x) = e^{-2\pi i x \cdot \xi_0} f(x + x_0)$. Cerchiamo di risolvere quindi il primo caso.

Supponiamo $d = 1$ e integriamo per parti

$$\begin{aligned} 1 &= \|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} x \frac{d}{dx} |f(x)|^2 dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} (x f'(x) \overline{f(x)} + x f(x) \overline{f'(x)}) dx \\ &= -2 \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Re}(x f'(x) \overline{f(x)}) dx. \end{aligned}$$

Siccome per ogni numero complesso z si ha $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ e usando la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz, otteniamo

$$1 \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |x| |f'(x)| |f(x)| dx \leq 2 \| |x| f \|_2 \| f' \|_2.$$

Infine, per il Teorema di Plancherel e la formula per le derivate, $\|f'\|_2^2 = \|\hat{f}'\|_2^2 = 4\pi^2 \|\xi \hat{f}\|_2^2$.

In dimensione maggiore si ragiona similmente utilizzando le derivate parziali: analogamente a prima, la derivata parziale j -esima di $|f|^2$ è $2 \operatorname{Re} f \overline{\partial_j f}$. Integrando per parti otteniamo:

$$\begin{aligned} 1 &= \|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d} x_j \partial_j |f(x)|^2 dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d} x_j 2 \operatorname{Re}(f \overline{\partial_j f}) dx. \end{aligned}$$

Quindi per la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz e per il Teorema di Plancherel

$$\begin{aligned} 1 &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^d} |x_j| |\partial_j f(x)| |f(x)| dx \\ &\leq 2 \|x_j f\|_2 \|\partial_j f\|_2 \\ &= 4\pi \|x_j f\|_2 \|\xi_j \hat{f}\|_2. \end{aligned}$$

Sommiamo ora su j e, per la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz (applicata alla somma finita) otteniamo

$$d = d \cdot 1 \leq 4\pi \sum_{j=1}^d \|x_j f\|_2 \|\xi_j \hat{f}\|_2 \leq 4\pi \left(\sum_{j=1}^d \|x_j f\|_2^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^d \|\xi_j \hat{f}\|_2^2 \right)^{1/2}$$

ovvero

$$\frac{d^2}{16\pi^2} \leq \left(\sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |x_j|^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\sum_{k=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |\xi_k|^2 |\hat{f}(x)|^2 dx \right)$$

come volevasi. □

La prima applicazione di questo principio è stata nello studio della meccanica quantistica; un elettrone (o una particella) secondo le leggi della meccanica quantistica ha una certa probabilità di trovarsi in un certo posto; supponiamo che la particella sia vincolata a muoversi sulla retta reale, allora diciamo che si trova nell'intervallo (a, b) con probabilità $\int_a^b |f(x)|^2 dx$. Quindi $|f|^2$ è una densità ovvero $\|f\|_2 = 1$.

Non possiamo sapere dove si trovi la particella precisamente, ma interessante è il suo valore atteso (dove ci aspettiamo che si trovi)

$$x_0 = \int_{\mathbb{R}} x |f(x)|^2 dx.$$

Con quale errore la particella si trova nella posizione attesa x_0 ? Questo si misura mediante la varianza

$$\int_{\mathbb{R}} (x - x_0)^2 |f(x)|^2 dx.$$

L'altra quantità fisica in gioco nella meccanica quantistica è il momento (cioè la quantità di moto) e la regola che governa posizione e momento è il fatto che la particella ha quantità di moto nell'intervallo (a, b) con probabilità $\int_a^b |\hat{f}|^2 dx$. Si noti che per la formula di Plancherel anche $|\hat{f}|^2$ è una densità. Potrò parlare di valor medio per il momento e di varianza.

La disuguaglianza di Heisenberg afferma che il prodotto delle due varianze non può mai scendere sotto un certo valore critico $1/16\pi^2$, ovvero se con maggior certezza misuriamo la posizione della particella allora avremo minore certezza sulla sua quantità di moto, perché il prodotto degli “errori” si deve mantenere maggiore di $1/16\pi^2$. In realtà, se si tiene conto delle unità di misura il valore critico è $\hbar/16\pi^2$, dove \hbar è la costante di Planck (un numero piccolo dell'ordine di $10^{-34} Js$).

Dal punto di vista dell'analisi del segnale, questa stima talvolta non è soddisfacente: se si considera un segnale di ampiezza f , allora f è reale, quindi la sua trasformata di Fourier soddisfa

$$\hat{f}(-\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)} \quad \Rightarrow \quad |\hat{f}|^2 \quad \text{è pari.}$$

Quindi se vogliamo dire che un segnale è localizzato in frequenza, dobbiamo tener conto di questa parità e dire che $|\hat{f}|^2$ ha un picco in ξ_0 e uno analogo in $-\xi_0$. Ma se ξ_0 è grande, la varianza di $|\hat{f}|^2$ sarà sempre grande anche se i due picchi sono molto stretti.

Sono quindi state studiate moltissime variazioni della diseuguaglianza di Heisenberg.

In alcuni casi può essere utile anche una stima puntuale.

TEOREMA 1.52 (Principio di Incertezza di Hardy). *Sia f una funzione misurabile in \mathbb{R}^d che soddisfa le stime*

$$|f(x)| \leq C e^{-a|x|^2} \quad |\hat{f}(\xi)| \leq C e^{-b|\xi|^2}$$

per q.o. x, ξ , dove a e b sono costanti positive.

(1) Se $ab > \pi^2$ allora $f = 0$.

(2) Se $ab = \pi^2$ allora f è multipla di una gaussiana, ovvero $f(x) = C e^{-a|x|^2}$.

OSSERVAZIONE 1.53. Se $ab < \pi^2$ ci sono infinite funzioni: si veda l'esercizio sulle funzioni di Hermite.

La dimostrazione del teorema usa il seguente argomento di Analisi Complessa.

LEMMA 1.54. (Phragmen–Lindelöf) *Supponiamo che F sia una funzione analitica su un settore Γ di ampiezza minore di π e tale che $|F(z)| \leq C e^{K|z|}$ su Γ , F continua sul settore chiuso $\bar{\Gamma}$*

$$|F(z)| \leq M \quad \forall z \in \partial\Gamma.$$

Allora F è limitata su tutto Γ .

Esercizio. La tesi rimane vera se il settore ha ampiezza π ?

DIMOSTRAZIONE. (Lemma di Phragmen–Lindelöf) Supponiamo che il settore sia del tipo

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \psi\} \quad \psi < \pi/2.$$

Allora esiste $B > 1$ tale che $B\psi < \pi/2$. Fissiamo $A > 0$; la funzione

$$F_A(z) = F(z) e^{-Az^B}$$

è allora olomorfa su Γ e se $z = Re^{i\theta}$ risulta

$$|F_A(z)| \leq C e^{KR} e^{-AR^B \cos(\theta B)} \leq C e^{KR} e^{-AR^B \cos(B\psi)} \rightarrow 0$$

quando $R \rightarrow \infty$. Quindi possiamo dire che esiste R tale che

$$|F_A(z)| \leq M \quad \forall z \in \Gamma \cap \{|z| > R\}.$$

Per il principio del massimo modulo applicato a $\Gamma_R = \Gamma \cap \{|z| \leq R\}$ concludiamo che $|F_A(z)| \leq M$ anche in $\bar{\Gamma}_R$, quindi in tutto Γ . Per l'arbitrarietà di $A > 0$ ne concludiamo che $|F(z)| \leq M$ in tutto Γ . \square

DIMOSTRAZIONE. (Teorema di Hardy) Ci sono molte semplificazioni, che elenchiamo.

(A) Grazie all'azione delle dilatazioni, possiamo pensare che il parametro in gioco sia (come sembra dalla tesi) uno solo: il prodotto ab . Infatti, se consideriamo la funzione $g(x) = r^{-d}f(x/r)$, allora

$$|g(x)| \leq C e^{-a|x|^2/r^2}$$

e inoltre $|\hat{g}(\xi)| = |\hat{f}(r\xi)| \leq C e^{-br^2|\xi|^2}$. Quindi se prendiamo $r^2 = \sqrt{a/b}$ otteniamo le seguenti stime su g :

$$|g(x)| \leq C e^{-\sqrt{ab}|x|^2} \quad |\hat{g}(\xi)| \leq C e^{-\sqrt{ab}|\xi|^2}.$$

(B) Il caso (1) segue banalmente una volta che si sarà dimostrato il caso (2). Procediamo quindi a dimostrare il caso (2), quello in cui $ab = \pi^2$.

(C) Iniziamo dal caso unidimensionale. Supponiamo che g sia una funzione su \mathbb{R} soddisfacente le stime

$$|g(x)| \leq C e^{-\pi|x|^2} \quad |\hat{g}(\xi)| \leq C e^{-\pi|\xi|^2}$$

Il decadimento più che esponenziale di g permette di estendere la trasformata di Fourier a una funzione intera in questo modo

$$\hat{g}(\xi + i\eta) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x(\xi + i\eta)} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} e^{2\pi x \eta} dx$$

per $\xi + i\eta$ complesso. Possiamo verificare che si tratta di una funzione intera facendo la derivata sotto il segno di integrale, oppure con il Teorema di Morera. Inoltre otteniamo una limitazione completando il quadrato all'esponente:

$$\begin{aligned} |\hat{g}(\xi + i\eta)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| |e^{-2\pi i x \xi}| |e^{2\pi x \eta}| dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} e^{2\pi x \eta} dx \\ &= C e^{\pi \eta^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x-\eta)^2} dx = C e^{\pi \eta^2}. \end{aligned}$$

(D) Supponiamo ora g pari. Allora anche \hat{g} è pari e olomorfa quindi ammette uno sviluppo in potenze pari. Allora anche la funzione h definita da

$$h(z) = \hat{g}(\sqrt{z}) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

è intera. Inoltre h soddisfa le stime

$$|h(R)| = |\hat{g}(\sqrt{R})| \leq C e^{-\pi R} \quad \forall R \geq 0,$$

$$|h(Re^{i\theta})| = |\hat{g}(R^{1/2}e^{i\theta/2})| \leq C e^{\pi R \sin^2(\theta/2)} \leq C e^{\pi R}.$$

Potremmo considerare $e^{\pi z}h(z)$ che è limitata sull'asse x e di tipo esponenziale, tuttavia non potremmo applicare il lemma di Phragmen–Lindelöf, perché questo lemma non vale su settori di ampiezza π . Correggiamo la funzione $e^{\pi z}h(z)$ un pochino, per poter applicare il lemma di Phragmen–Lindelöf: prendiamo $0 < \delta < \pi$ e consideriamo la funzione F_δ definita da

$$F_\delta(z) = h(z) \exp\left(\frac{i\pi z e^{-i\delta/2}}{\sin \delta/2}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Allora F_δ è ancora di tipo esponenziale, ma soprattutto per $\theta = 0$ e per $\theta = \delta$ otteniamo

$$|F_\delta(Re^{i\theta})| \leq |h(Re^{i\theta})| \exp \operatorname{Re} \left(\frac{\pi R e^{i(\theta+\pi/2-\delta/2)}}{\sin \delta/2} \right) \leq \begin{cases} C e^{-\pi R} \exp(\pi R) = C & \theta = 0 \\ C e^{\pi R \sin^2(\delta/2)} \exp(-\pi R) \leq C & \theta = \delta \end{cases}$$

A questo punto applichiamo il lemma di Phragmen–Lindelöf sul settore Γ_δ e diciamo che F_δ è limitata dalla costante C su tutto $\overline{\Gamma}_\delta$. Ma allora

$$|h(z)| \leq C \exp\left(\frac{\pi R \operatorname{Re}(-ie^{i(\theta-\delta/2)})}{\sin \delta/2}\right) = C \exp\left(\frac{\pi R \sin(\theta - \delta/2)}{\sin \delta/2}\right)$$

per ogni z in $\overline{\Gamma}_\delta$ purché $0 < \delta < \pi$. Facendo tendere δ a π otteniamo $|h(z)| \leq C e^{-\pi \operatorname{Re} z}$ per $z = Re^{i\theta}$ sul semipiano superiore. Analogamente si ottiene la stessa stima sul semipiano inferiore, quindi sull'intero piano complesso. Ma allora per il Teorema di Liouville $e^{\pi z}h$ è costante, ovvero $\hat{g}(z) = c e^{-\pi z^2}$.

(E) Se invece g è dispari, allora anche \hat{g} è dispari, quindi $\hat{g}(0) = 0$ e possiamo ragionare su $\hat{h} = \hat{g}/z$, che è pari; ne concludiamo che \hat{h} è uguale a $C e^{-\pi z^2}$; ma allora se anche g deve soddisfare le stesse maggiorazioni, ne segue che la costante deve essere nulla.

Infine, in generale, si decomponga g nella sua parte pari e in quella dispari e quindi la trasformata nella parte pari e quella dispari e si applichi il ragionamento precedente, dato che

$$2|g_{\text{even}}(x)| = |g(x) + g(-x)| \leq C e^{-\pi|x|^2}$$

e così sul lato della trasformata.

(F) Il caso di dimensione d segue adoperando la trasformata di Radon. Infatti se $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ soddisfa le ipotesi con $\alpha = \beta = \pi$, allora la trasformata di Radon di g soddisfa

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}g(t, \gamma)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^{d-1}} g(t\gamma + x_1 e_1 + \cdots + x_{d-1} e_{d-1}) dx_1 \cdots dx_{d-1} \right| \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-\pi(t^2 + x_1^2 + \cdots + x_{d-1}^2)} dx_1 \cdots dx_{d-1} \\ &= C e^{-\pi t^2}. \end{aligned}$$

Inoltre la trasformata di Fourier unidimensionale di $\mathcal{R}g(\cdot, \gamma)$ soddisfa

$$|\widehat{\mathcal{R}g(\cdot, \gamma)}(\tau)| = |\hat{g}(\tau\gamma)| \leq C e^{-\pi\tau^2}.$$

Quindi nel caso (2) concluderemmo che $\mathcal{R}g(t, \gamma) = c(\gamma) e^{-\pi t^2}$ e quindi $\hat{g}(\xi) = \widehat{g(|\xi|\gamma)} = \widehat{\mathcal{R}g(\cdot, \gamma)}(|\xi|) = c(\gamma) e^{-\pi|\xi|^2}$. Poiché g è integrabile, allora \hat{g} è continua in 0, quindi $\hat{g}(0) = c(\gamma)$, cioè c non dipende da γ e quindi $\hat{g}(\xi) = \hat{g}(0) e^{-\pi|\xi|^2}$. \square

Un altro principio qualitativo è il seguente. Se f è una funzione in un qualche L^p , indichiamo con

$$\Sigma(f) = \{x : f(x) \neq 0\}.$$

L'insieme $\Sigma(f)$ non è ben definito, perché se f e g sono due funzioni nella stessa classe di equivalenza in L^p , allora potrebbe essere $\Sigma(f) \neq \Sigma(g)$. Tuttavia la sua misura di Lebesgue è ben definita (ovvero $|\Sigma(f)| = |\Sigma(g)|$) e la sua funzione indicatrice ha senso quasi ovunque (ovvero $1_{\Sigma(f)} = 1_{\Sigma(g)}$ q.o.).

TEOREMA 1.55 (Benedicks, 1974). *Se f è in $L^1(\mathbb{R}^d)$ e $|\Sigma(f)| \cdot |\Sigma(\hat{f})| < \infty$, allora $f = 0$ quasi ovunque.*

DIMOSTRAZIONE. A meno di dilatare la funzione f , possiamo supporre che $|\Sigma(f)| < 1$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} 1_{\Sigma(\hat{f})}(\xi + k) d\xi &= \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\Sigma(\hat{f})}(\xi) d\xi = |\Sigma(\hat{f})| < \infty \\ \int_{[0,1]^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} 1_{\Sigma(f)}(x + k) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\Sigma(f)}(x) dx = |\Sigma(f)| < 1. \end{aligned}$$

Ne concludiamo che

- i) esiste un insieme $E \subseteq [0, 1]^d$ di misura 1 tale che $\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} 1_{\Sigma(\hat{f})}(a + k) < \infty$ per ogni a in E , ovvero per ogni a in E , $\hat{f}(a + k) \neq 0$ solo per un numero finito di k ;
- ii) esiste un insieme $F \subseteq [0, 1]^d$ di misura positiva tale che $\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} 1_{\Sigma(f)}(x + k) = 0$ per x in F , quindi $f(x + k) = 0$ per ogni k quando x è in F .

Usiamo questa versione della formula di sommazione di Poisson (valida anche per funzioni su \mathbb{R}^d): se g è una funzione integrabile, la serie $\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} g(x + k)$ converge in $L^1([0, 1]^d)$ a una funzione ϕ la cui serie di Fourier è $\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \hat{g}(k) e^{2\pi i k \cdot x}$.

Dato a in E , desideriamo applicare la formula di sommazione di Poisson alla funzione $x \mapsto g_a(x) = f(x) e^{-2\pi i a \cdot x}$.

Otteniamo che la funzione ϕ_a definita da

$$\phi_a(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(x + k) e^{-2\pi i a(x+k)}$$

è integrabile sul cubo $[0, 1]^d$ e la sua serie di Fourier è

$$\phi_a(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \hat{g}_a(k) e^{2\pi i k \cdot x} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(a+k) e^{2\pi i k \cdot x}.$$

Siccome a è in E , la funzione ϕ_a è un polinomio trigonometrico. In particolare, è analitica. Se ϕ_a non fosse identicamente nulla, allora $\{x : \phi_a(x) = 0\}$ intersecherebbe ogni retta parallela agli assi in un insieme discreto. Quindi potremmo dire che $\phi_a(x) \neq 0$ per quasi ogni x .

D'altra parte, $|\phi_a(x)| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |f(x+k)| = 0$ per ogni x in F , che è un insieme di misura positiva. Quindi ϕ_a deve essere identicamente nulla per ogni a in E , da cui $\hat{f}(a+k) = 0$ per ogni a in E e ogni k in \mathbb{Z}^d .

Siccome l'insieme E ha misura 1, ne concludiamo che $\hat{f} = 0$ quasi ovunque e quindi $f = 0$ per l'iniettività della trasformata di Fourier. \square

Tenete conto che se f è in $L^1 \cap L^2$, allora \hat{f} è in $L^2 \cap L^\infty$ e per ogni insieme misurabile E si ha

$$\int_E |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq |E| \|\hat{f}\|_\infty^2 \leq |E| \|f\|_1^2 \leq |E| |\Sigma(f)| \|f\|_2^2.$$

In particolare, se scegliamo $E = \Sigma(\hat{f})$, allora otteniamo

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \int_{\Sigma(\hat{f})} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq |\Sigma(\hat{f})| |\Sigma(f)| \|f\|_2^2 = |\Sigma(\hat{f})| |\Sigma(f)| \|\hat{f}\|_2^2,$$

quindi

$$|\Sigma(\hat{f})| |\Sigma(f)| \geq 1.$$

Un altro risultato, più recente e più preciso, è dovuto a Donoho e Stark.

DEFINIZIONE 1.5. Sia $\varepsilon > 0$ e f in $L^2(\mathbb{R}^d)$. Diciamo che f è ε -concentrata su un insieme misurabile E se esiste una funzione g di quadrato integrabile, nulla al di fuori di E e tale che $\|f - g\|_2 \leq \varepsilon$.

TEOREMA 1.56 (Donoho e Stark, 1989). *Sia f una funzione di quadrato integrabile con $\|f\|_2 = 1$. Supponiamo inoltre che f sia ε -concentrata su E e \hat{f} sia δ -concentrata su F per opportuni ε, δ in $(0, \frac{1}{2})$ e E, F insiemi misurabili. Allora*

$$|E| |F| \geq (1 - (\varepsilon + \delta))^2.$$

9. Applicazioni

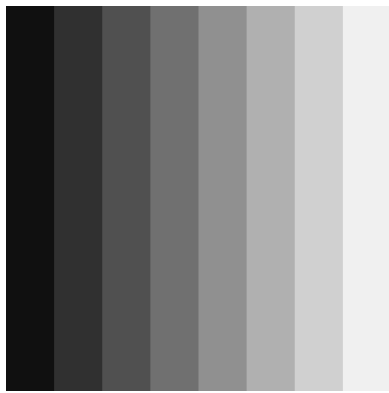
Le applicazioni classiche del metodo della trasformata di Fourier consistono nello studio delle equazioni differenziali, in particolare le equazioni classiche della Fisica Matematica. Vedremo tuttavia altre applicazioni all'analisi del segnale: il calcolo del diametro di una stella, una infarinatura sul riconoscimento di caratteri e altri filtri. Infine un campo in cui interviene la trasformata di Fourier è l'ottica, nella diffrazione nelle ipotesi di Sommerfeld e Fraunhofer.

9.1. Trasformate di immagini. Un'immagine fotografica a colori nasce dalla sovrapposizione dei tre canali rosso, verde e blu e possiamo quindi realizzarla come una funzione su \mathbb{R}^2 tale che

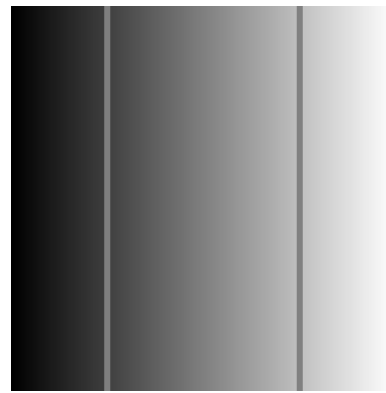
$$I(x, y) = \begin{cases} h(x, y) & \text{se } (x, y) \text{ è un punto della fotografia} \\ 0_{\mathbb{R}^3} & \text{se } (x, y) \text{ è al di fuori della fotografia} \end{cases}$$

dove $h(x, y)$ è una terna di valori non negativi $h(x, y) = (h_R(x, y), h_G(x, y), h_B(x, y))$, in cui ciascuna componente è legata a un canale (rosso, verde, blu) e quindi ciascuna entrata indica la luminosità del colore in questione nel punto (x, y) . Quindi un'immagine digitale a colori è in corrispondenza con tre matrici.

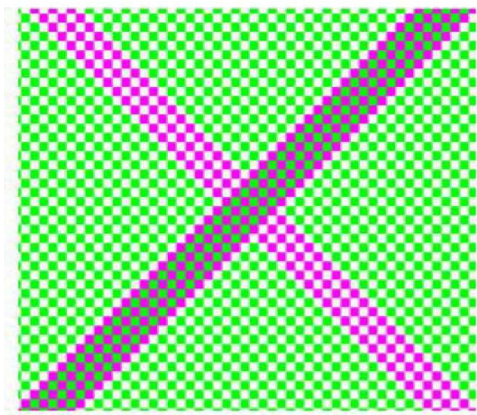
Non desideriamo addentrarci in problemi di percezione dei colori e dei livelli di grigio. Sono problemi legati all'occhio umano, che rimane influenzato dai colori circostanti. Testate la vostra percezione dei livelli di grigio e dei colori sugli esempi della figura 1.7.



Il livello di grigio di ogni striscia è uniforme?



Le due strisce piccole sono dello stesso grigio?



Quanti colori contiene questa figura?



Sembra che $a=d$ e $b=c$, ma l'unica vera è $b=d$

FIGURA 1.7. Percezione di colori e livelli di grigio

In generale, il nostro occhio è meno sensibile alla luce blu e alla bassa lunghezza d'onda (alta frequenza), il massimo della sensibilità si ha in corrispondenza di della lunghezza d'onda

550nm (giallo-verde). Se volete approfondire queste tematiche, potete consultare un libro di Computer Vision (ad esempio K.N Plataniotis e A.N. Venetsanopoulos, Color image processing and applications, Springer, Berlin 2000).

Il nostro scopo è capire come funziona la trasformata di Fourier di immagini. Questa agisce separatamente su ciascun canale (RGB), quindi per semplicità ci limitiamo per il momento a descrivere le trasformate di immagini in bianco e nero.

Il comando `MatLab` per la trasformata di Fourier è `fft2` che corrisponde a due `fft`, una prima fatta rispetto alle righe e una seconda, sul risultato precedente, fatta rispetto alle colonne. Siccome il segnale (cioè la funzione I) è reale, la sua trasformata sarà una funzione pari quindi si può usare anche `dct2`.

In formule, se I è una matrice $m \times n$, allora $FI = \text{fft2}(I)$ è una matrice $m \times n$ e

$$FI(j, k) = \sum_{\ell=1}^m \sum_{p=1}^n I(\ell, p) \omega_m^{(j-1)(\ell-1)} \omega_n^{(k-1)(p-1)}$$

$$I(j, k) = \frac{1}{nm} \sum_{\ell=1}^m \sum_{p=1}^n FI(\ell, p) \omega_m^{-(j-1)(\ell-1)} \omega_n^{-(k-1)(p-1)},$$

dove $\omega_n = e^{-2\pi i/n}$ è una radice n -esima dell'unità.

Il valore $\hat{I}(0,0)$ rappresenta la luminosità media di un'immagine e è sempre positivo (altrimenti l'immagine risulta nera). Questo coefficiente si chiama anche DC-component³ e si trova nel posto (1,1) della matrice `fft2(I)`; per porlo al centro dell'immagine, si usi il comando `fftshift`. Guardiamo alcune immagini corrispondenti a particolari trasformate. Partiamo da una matrice quadrata 128×128 con un solo coefficiente non nullo: il primo. Siccome nel calcolare la trasformata inversa si divide per 128^2 , per ottenere qualcosa di significativo prendiamo il coefficiente dell'ordine di 128^2 .

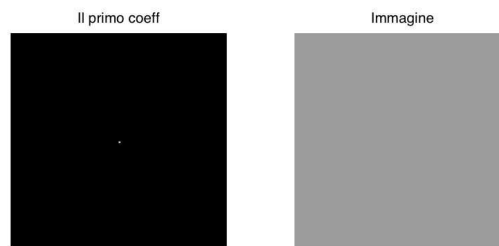


FIGURA 1.8. A sinistra `fftshift(K)`, a destra `ifft2(K)` dove $K(1,1)=10000$ e altrove nulla

In figura 1.9 vediamo cosa succede aggiungendo un altro coefficiente non nullo (ovvero due, visto che la trasformata deve essere pari). Frequenze più alte corrispondono a onde con

³DC è l'abbreviazione di Direct Current. La terminologia deriva dall'elettromagnetismo e è stata estesa ai segnali.

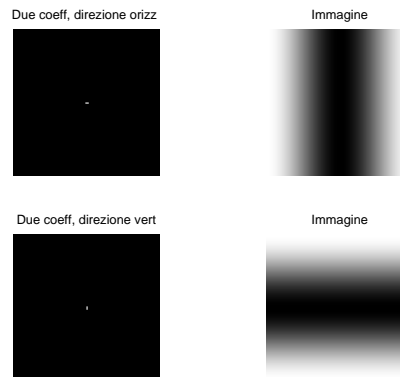


FIGURA 1.9. In alto $K(1,1)=10000$ e $K(1,2)=K(1,128)=100$; in basso la trasposta.

frequenza più alta, come si nota nella figura 1.10; inoltre si noti come le strisce bianche e nere dell'immagine siano ortogonali alla direzione dei coefficienti di Fourier non nulli.

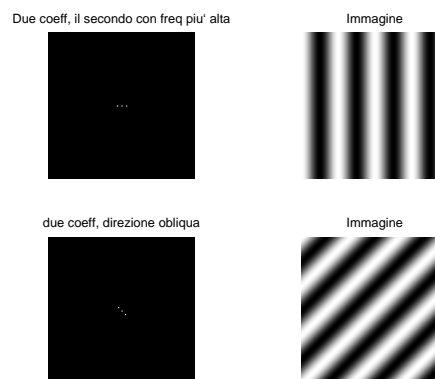


FIGURA 1.10. In alto $K(1,1)=10000$ e $K(1,5)=K(1,125)=100$; in basso $K(4,4)=K(126,126)=100$.

Infine nella figura 1.11 vediamo la sovrapposizione delle immagini precedenti. Da questa discussione si capisce che i contorni e i particolari sono responsabili delle frequenze più alte, mentre il grosso dell'immagine è concentrato nelle frequenze basse.

Vediamo ora un'immagine vera e la sua trasformata. Per leggere un'immagine si può usare il comando `imread`, ad esempio

```
I=imread('football.jpg').
```

I risulta una matrice a entrate `uint8`. Prima di effettuare la FFT, occorre convertire la matrice I a precisione doppia `I=double(original)`.

Abbiamo già detto che la FFT si applica a ciascun canale separatamente, quindi ad esempio il comando

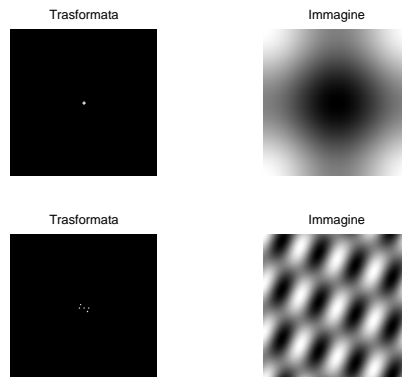


FIGURA 1.11. In alto la sovrapposizione delle immagini di figura 1.9; in basso quella delle immagini di figura 1.10.

```
FIR=fft2(I(:, :, 1))
```

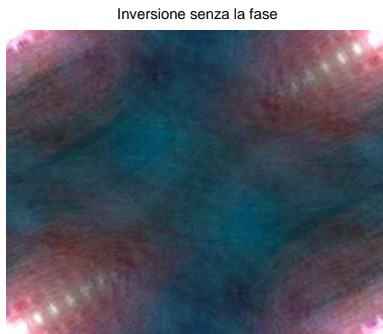
permette di calcolare la FFT del canale rosso e memorizzarla nella matrice FIR.

Spesso i valori assoluti della trasformata hanno una grossa dinamica, quindi se guardassimo unicamente il valore assoluto della matrice FIR (eventualmente traslata mediante `fftshift`) vedremmo un grafico quasi insignificante (pochissimi coefficienti centrali molto grandi e tutti gli altri praticamente nulli); per differenziare meglio i valori piccoli è quindi opportuno usare una trasformazione di scala logaritmica `imshow(log(abs(FIR)), [])`.



FIGURA 1.12. Un'immagine reale e la sua trasformata.

Dalla trasformata traslata notiamo le direzioni principali in cui si sviluppa l'immagine e il fatto che le frequenze di maggior peso sono concentrate al centro, ovvero le frequenze più basse contengono maggior quantità di informazione sull'immagine. Tuttavia la sola grandezza dei coefficienti non è in grado di ricostruire l'immagine: questo è mostrato in figura 1.13.



```
Iabs(:,:,1)=ifft2(abs(FIR));
Iabs(:,:,2)=ifft2(abs(FIG));
Iabs(:,:,3)=ifft2(abs(FIB));
Iabs=uint8(abs(Iabs));
imshow(Iabs),
title('Inversione senza la fase')
```

FIGURA 1.13. Inversione senza la fase

9.2. Filtri. In generale un filtro è un'operazione che si compie sulla trasformata; può essere lineare oppure non lineare. Applicare un filtro K a un'immagine f significa valutare $\mathcal{F}^{-1}(K \hat{f})$.

Il Mean filter, il Gaussian filter e LoG filter che abbiamo visto nella sezione sulla convoluzione sono esempi di filtri lineari.

Altri esempi molto semplici di filtri lineari sono i filtri passa-basso (e passa-alto, passa-banda), ovvero filtri che lasciano passare frequenze basse (risp. alte, una banda) e smorzano o annullano tutte le altre. Si ottengono scegliendo come K l'operatore di moltiplicazione per una funzione che ha supporto in determinate zone.

I filtri passa-basso venivano usati nel vecchio algoritmo JPEG. Ecco un esempio di un filtro passa-basso molto crudo (è una funzione caratteristica di un insieme abbastanza piccolo), da cui si comprende come la maggior parte dell'informazione sull'immagine sia concentrata in pochissimi coefficienti.

```
original=imread('peppers.png');
I=double(original);

FIR=fft2(I(:,:,1));
FIG=fft2(I(:,:,2));
FIB=fft2(I(:,:,3));

Z=I(:,:,1);
[m,n]=size(Z);
qualita=30;
LpF1=ones(qualita);
LpFub=zeros((m-qualita)/2,n);
LpFlr=zeros(qualita,(n-qualita)/2);
```

```

LpF=[LpFub; LpFlr LpF1 LpFlr; LpFub];
figure(2)
subplot(1,3,1), imshow(original), title('Original Image');
subplot(1,3,2), imshow(log(abs(LpF)),[]),
    title('Low pass (30) filter'), colormap(jet(64))

LpF=fftshift(LpF);
FIR2=FIR.*LpF;
FIG2=FIG.*LpF;
FIB2=FIB.*LpF;
I2(:,:,1)=ifft2((FIR2));
I2(:,:,2)=ifft2((FIG2));
I2(:,:,3)=ifft2((FIB2));
I2=uint8(abs(I2));

subplot(1,3,3), imshow(I2), title('Compression quality low')

```

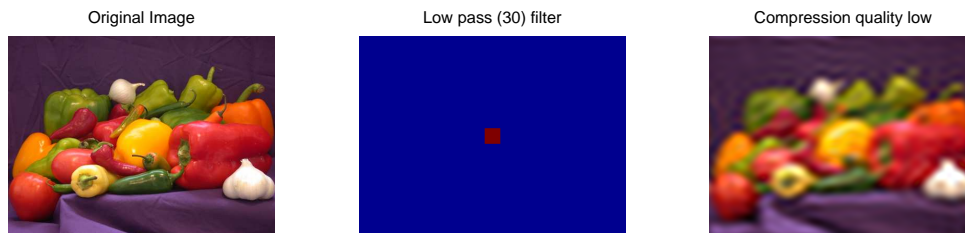


FIGURA 1.14. Un filtro passa-basso.

Figure che hanno un forte contorno (come le monete di figura 1.15) non vengono altrettanto bene con un filtro passa-basso così piccolo. Si noti l'effetto ringing, ovvero la ripetizione del contorno della moneta nell'immagine trattata col filtro passa-basso, in figura 1.16.



FIGURA 1.15. Un'immagine con forte contorno.

9.3. Riconoscimento caratteri. In questo esempio vediamo come far riconoscere la posizione di una lettera in un testo. L'algoritmo è molto semplice: si isola la lettera prescelta

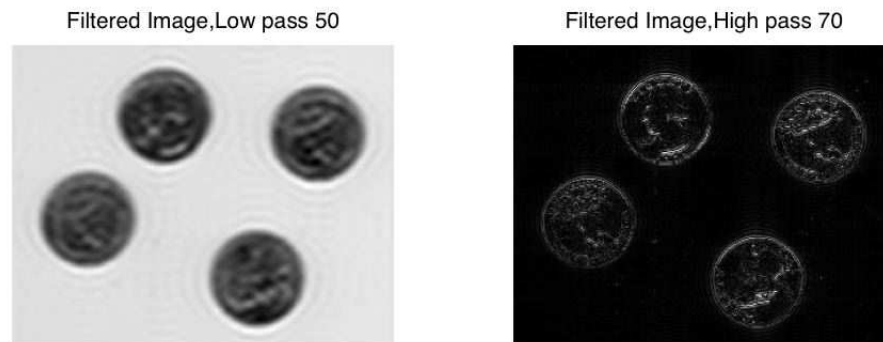


FIGURA 1.16. Filtri passa-basso e passa-alto applicati all'immagine di figura 1.15.

(nel nostro esempio la “X”) e si chiede al programma di mostrarne la presenza. Si chiami g l'immagine della lettera “X” e si chiami f l'immagine contenente il testo. L'idea è di sovrapporre l'immagine g della lettera (detta maschera) al testo f , ovvero farne una sorta di convoluzione; il valore più alto di intensità si troverà esattamente dove la maschera coincide con la lettera nel testo. Si osservi che abbiamo riflesso la maschera per scrivere la convoluzione. Infatti, possiamo pensare alla convoluzione $f * \check{g}$ calcolata in un punto x

$$f * \check{g}(x) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x - y) g(-y) dy$$

come a un prodotto scalare tra le funzioni $y \mapsto f(x - y)$ e $y \mapsto g(-y)$. Talvolta questa operazione, che esalta somiglianze tra la maschera e il testo, viene anche chiamata correlazione.

Si noti che il metodo funziona con solo una soglia del 80%. Altri valori grandi si notano dalla lettera “K” che in effetti ha somiglianza con la “X”.

```
testo=imread('txt2.gif');
figure(1)
subplot(2,2,1), imagesc(testo), colormap(gray);
maskx=testo(90:109,132:150)*500; %estrae dal testo la lettera x
dt=fft2(testo);
dm=fft2(rot90(maskx,2),256,256);
conv=real(ifft2(dt.*dm)); % correla
subplot(2,2,2), imagesc(conv), colormap(gray)
M=max(conv(:));
thresh1=M*0.70;
subplot(2,2,3), imagesc(conv>thresh1), title('thresh=70%')
thresh2=M*0.80;
subplot(2,2,4), imagesc(conv>thresh2), title('thresh=80%')
```

9.4. Calcolare il diametro di una stella. (questo esempio è tratto dal libro di Körner [8], l'idea è dovuta a Labeyrie) Quando osserviamo le stelle nel cielo a occhio nudo,

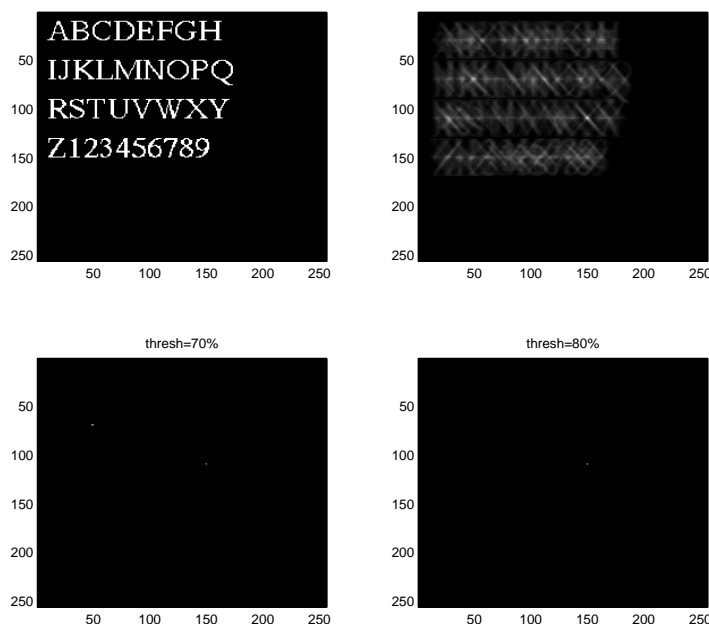


FIGURA 1.17. L'output della routine per riconoscere i caratteri

vediamo dei piccoli puntini che brillano. Il brillio è un effetto dovuto al movimento delle particelle dell'atmosfera.

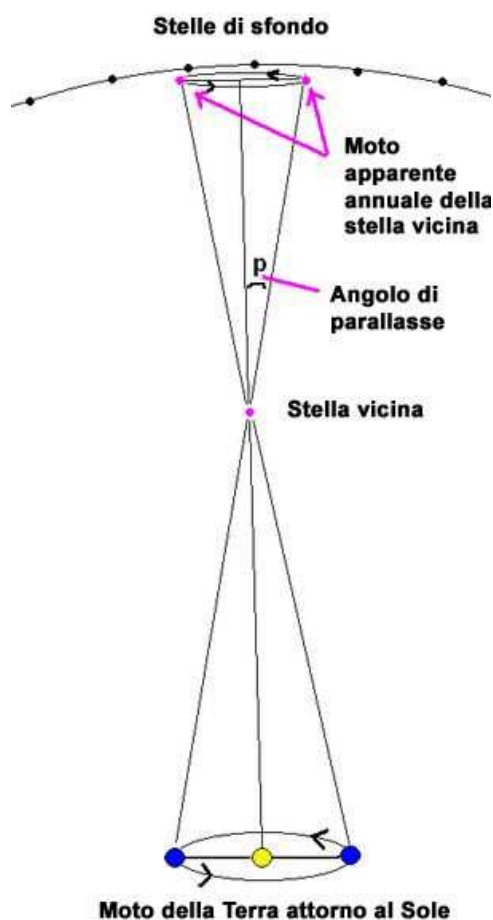
Il problema è quello di calcolare il diametro di una stella, in base alle osservazioni fatte con un telescopio, che, pur risentendo dello sfocamento dovuto all'atmosfera, è in grado di riprodurre un'immagine abbastanza simile a un piccolo disco, di cui possiamo misurare il diametro.

Il risparmio notevole sarebbe quello di non avere un telescopio su un satellite in orbita, ma usare un semplice telescopio sulla terra.

Ovviamente stiamo parlando di stelle “vicine”, per cui è nota la distanza dalla terra determinata con la tecnica della parallasse. Se le fotografie della stella effettuate dal telescopio non fossero danneggiate dall'effetto dell'atmosfera, avremmo una informazione precisa del diametro apparente della stella sulla fotografia; questa informazione, unita al fatto che conosciamo la distanza dalla terra di questa stella, permette di risalire al diametro effettivo della stella.

Sulla fotografia abbiamo una immagine sfocata, dovuta all'atmosfera, di quella che è una stella. Possiamo pensare che lo sfocamento sia semplicemente una convoluzione con un nucleo che varia casualmente nel tempo (dipende come le particelle dell'atmosfera si trovano nel momento in cui scattiamo la fotografia). Quindi se f è la funzione che indica (in \mathbb{R}^2) la stella, allora $f * K_t$ è l'immagine sfocata che vediamo al tempo t . Supponendo che f sia la funzione caratteristica di un cerchio, di cui vogliamo determinare il diametro, abbiamo a

disposizione $\hat{f} \hat{K}_t$. Se studiamo semplicemente gli zeri di questa funzione, studiamo gli zeri di \hat{f} e di \hat{K}_t . Ma siccome quelli di \hat{K}_t varieranno in maniera casuale nel tempo, facendo più osservazioni dovremmo riuscire a capire quali sono gli zeri di \hat{f} . Questo ci può dire quanto è il diametro della stella? Cioè, sapendo solo gli zeri di \hat{f} , sappiamo qualcosa sul diametro del cerchio? Iniziate a fare il calcolo supponendo la stella quadrata. In [8], trovate i dettagli del caso più realistico in cui si suppone che la stella sia circolare.



La parallasse stellare consiste nel cambiamento della posizione apparente di una stella sulla volta celeste a seconda del periodo dell'anno. Il fenomeno è dovuto al fatto che la Terra, durante l'anno, cambia la sua posizione nello spazio muovendosi attorno al Sole.

Sperimentiamo la parallasse ogni giorno, quando guardiamo oggetti mentre ci muoviamo rispetto a loro. Se ad esempio un certo oggetto si trova dritto di fronte a noi, nel momento in cui ci spostiamo (di lato) esso apparirà in generale non più nella posizione in cui era prima. Ovviamente l'oggetto non si è mosso, si tratta solo di un effetto prospettico.

Succede lo stesso per le stelle: la loro posizione angolare nel cielo apparentemente cambia mano a mano che la Terra si sposta attorno al Sole.

Noto il raggio dell'orbita terrestre, si può ricavare la distanza della stella dalla terra e quindi ricavare il suo diametro effettivo noto quello apparente sulla fotografia.

9.5. Equazione di Laplace sul semipiano. L'equazione

$$\Delta u = 0$$

si chiama equazione di Laplace e si presenta frequentemente in fisica, anche in campi molto diversi.

Un esempio è quello in cui u rappresenta la temperatura di un corpo, in assenza di apporto di calore. Allora flusso di calore entrante in ogni sottoregione V del corpo uguaglia il flusso del calore uscente (in ogni istante). Se \vec{F} è il campo vettoriale che descrive il flusso di calore,

allora

$$\int_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{\nu} dS = 0$$

dove ν è la normale esterna e dS l'elemento di superficie (supponendo che V sia un aperto con frontiera regolare). Ma allora se \vec{F} è C^1 , possiamo affermare che per il Teorema di Gauss–Green

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} dx = \int_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{\nu} dS = 0.$$

Per l'arbitrarietà di V , concludiamo che $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ sul corpo. D'altra parte il flusso di calore \vec{F} ha intensità proporzionale al modulo del gradiente della temperatura. Quindi $\vec{F} = -c \operatorname{grad} u$, da cui concludiamo che $\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = 0$.

Alla stessa equazione arriviamo se u indica la concentrazione di una determinata sostanza chimica, oppure il potenziale gravitazionale o elettrico.

L'equazione che studiamo è:

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^{d+1} \quad u(x, 0) = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

dove f è una funzione di Schwartz e $\mathbb{R}_+^{d+1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in \mathbb{R}^d, y > 0\}$.

Si noti che il semipiano è conformemente equivalente a una palla e le trasformazioni conformi conservano le funzioni armoniche.

Cerchiamo di risolvere il problema utilizzando la trasformata di Fourier della funzione $u_y(x) = u(x, y)$, con $y > 0$.

L'equazione differenziale diventa più semplice

$$\frac{d^2}{dy^2} \widehat{u}_y + \widehat{\Delta_x u}_y = \frac{d^2}{dy^2} \widehat{u}_y - 4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{u}_y = 0,$$

perché è un'equazione differenziale ordinaria a coefficienti costanti.

Quindi, ricordando la condizione iniziale, scegliamo $\widehat{u}_y = \hat{f} e^{-2\pi|\xi|y}$. Ma allora $u_y(x) = u(x, y) = f * P_y$. A questo punto possiamo verificare che questa soluzione è in effetti quella desiderata, nel senso che:

- a) u è di classe C^2 nel semipiano e $\Delta u = 0$;
- b) $u(x, y) \rightarrow f(x)$ uniformemente quando $y \rightarrow 0$;
- c) posto $u(x, 0) = f(x)$, allora u è continua sul semipiano chiuso e tende a zero all'infinito.

Si può dimostrare che una soluzione che soddisfi a) ÷ c) è unica.

9.6. Equazione del calore. Il modello fisico è quello della diffusione del calore in rapporto al tempo. Il problema consiste nel determinare u tale che

$$\partial_t u(t, x) = \Delta_x u(t, x) \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d \quad u(0, x) = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Di nuovo cerchiamo di risolvere il problema ponendo $u_t(x) = u(t, x)$ e trasformando. Otteniamo

$$\frac{d}{dt} \hat{u}_t = -4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}_t \quad \hat{u}_0 = \hat{f}$$

che ha come soluzione $\hat{u}_t = \hat{f} e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t}$. Ricordando la trasformata della gaussiana, $u_t(x) = u(t, x) = f * G_t$. Si verifica che questa soluzione è in effetti quella desiderata.

9.7. Equazione delle onde. Il comportamento delle onde elettromagnetiche nel vuoto si studia tramite l'equazione

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_x u$$

dove c è la velocità della luce, che supponiamo per comodità uguale a 1. Poniamo condizioni iniziali

$$u(0, x) = f(x) \quad \partial_t u(0, x) = g(x)$$

e otteniamo quello che si chiama problema di Cauchy per l'equazione delle onde d -dimensionale.

Operando al solito, otteniamo

$$\frac{d^2}{dt^2} \hat{u}_t = -4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}_t$$

la cui soluzione è data da

$$\hat{u}_t(\xi) = A(\xi) \cos(2\pi |\xi| t) + B(\xi) \sin(2\pi |\xi| t)$$

Imponendo le condizioni iniziali, otteniamo

$$A(\xi) = \hat{f}(\xi) \quad 2\pi |\xi| B(\xi) = \hat{g}(\xi),$$

da cui

$$\hat{u}_t(\xi) = \hat{f}(\xi) \cos(2\pi |\xi| t) + \hat{g}(\xi) \frac{\sin(2\pi |\xi| t)}{2\pi |\xi|}.$$

Qui notiamo una differenza rispetto ai casi precedenti: non sappiamo nulla sulla parte col coseno, che non è qualcosa che tende a zero all'infinito, né è in L^2 , quindi non è la trasformata di un oggetto che conosciamo. Tuttavia, si può verificare che se f e g sono funzioni di Schwartz, allora la formula si può invertire e porta proprio alla soluzione del problema di Cauchy cercata. (L'unicità si ricava con altri metodi, ad esempio col metodo di conservazione dell'energia). Vediamo in dettaglio il caso $d = 3$; $d = 1$ è simile e più semplice, $d = 2$ è più difficile.

Si può iniziare notando che è sufficiente considerare $f = 0$, perché, posto di saper risolvere il problema di Cauchy con $f = 0$, allora si sa risolvere quello con $f \neq 0$: basta notare che $\partial_t(\hat{g}(\xi) \frac{\sin(2\pi |\xi| t)}{2\pi |\xi|}) = \hat{g}(\xi) \cos(2\pi |\xi| t)$. Quindi se \bar{u} soddisfa il problema di Cauchy con $f = 0$, allora $\partial_t \bar{u}$ soddisfa il problema con $f = g$ e $g = 0$.

Come abbiamo più volte notato,

$$\int_{S^2} e^{-2\pi i \omega \cdot \xi} d\sigma(\omega) = \frac{2 \sin(2\pi|\xi|)}{|\xi|}.$$

Appare quindi naturale pensare al secondo termine come a una media su sfere di raggio opportuno della funzione g . Precisamente se poniamo

$$M_t(g)(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} f(x - t\omega) d\sigma(\omega),$$

allora $t \widehat{M_t(g)}(\xi) = \hat{g}(\xi) \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}$.

9.8. Diffrazione. In questa sezione vediamo come la trasformata di Fourier compaia nello studio della diffrazione, non come metodo per la risoluzione del problema, ma nell'approssimazione del risultato.

Il problema è quello di un raggio di luce polarizzata monocromatica, come quella emessa da un laser, (ovvero vi è una sola lunghezza d'onda λ e l'onda si propaga in una sola direzione, quindi il campo generato è uno scalare) che attraversa una fenditura. Stiamo supponendo che il campo elettrico nel punto P dello spazio e al tempo t sia del tipo

$$E(P, t) = E_0(P) e^{i\varphi(P)} e^{-2\pi i c t / \lambda}.$$

Il campo elettrico soddisfa l'equazione delle onde onde $\Delta E - 1/c^2 \partial_t^2 E = 0$. Siccome è nota la dipendenza dal tempo, poniamo

$$u(P) = E_0(P) e^{i\varphi(P)}.$$

L'equazione delle onde diventa

$$(\Delta + k^2)u = 0 \quad \text{equazione di Helmholtz}$$

dove $k = 2\pi/\lambda$ è il numero d'onda (ed è un numero molto grande, dell'ordine di 10^6 , perché $\lambda \simeq 4 \times 10^{-6}m$ per il violetto e $\lambda \simeq 7 \times 10^{-6}m$ per il rosso).

Note sono le condizioni al contorno, ovvero è noto il campo elettrico su una superficie che circonda un punto P_0 , dove desideriamo calcolare il campo elettrico. Nel seguito, con P_1 indichiamo un punto sulla superficie dove è noto il campo elettrico.

Per il teorema di Gauss–Green

$$\int_{\text{int}S} (G \Delta u - u \Delta G) dV = \int_S (G \partial_n u - u \partial_n G) ds$$

dove n è la normale esterna alla superficie S .

Una funzione che è singolare in P_0 , ma soddisfa l'equazione di Helmholtz e si determina facilmente perché radiale attorno a P_0 , è

$$G(P) = \frac{e^{ik \text{dist}(P_0, P)}}{\text{dist}(P_0, P)}.$$

Questa funzione rappresenta un'onda sferica con sorgente in P_0 . Usiamo la funzione G escludendo nella formula precedente una piccola sferetta attorno a P_0 . Poniamo quindi $V_\epsilon = \text{int}S \setminus \{P : \text{dist}(P_0, P) < \epsilon\}$ e la formula di Green per questa scelta del dominio e della funzione di Green G diventa:

$$\int_{V_\epsilon} (G \Delta u - u \Delta G) dV = \int_{S+S_\epsilon} (G \partial_n u - u \partial_n G) ds.$$

D'altra parte, siccome sia G sia u soddisfano l'equazione di Helmholtz, $\int_{V_\epsilon} (G \Delta u - u \Delta G) dV = 0$, da cui

$$\int_{S+S_\epsilon} (G \partial_n u - u \partial_n G) ds = 0.$$

Siccome u e le sue derivate sono continue in P_0 , si può dimostrare che l'integrale sulla sferetta piccola per $\epsilon \rightarrow 0$ tende a $-4\pi u(P_0)$, quindi

$$(1.5) \quad u(P_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S (G \partial_n u - u \partial_n G) ds.$$

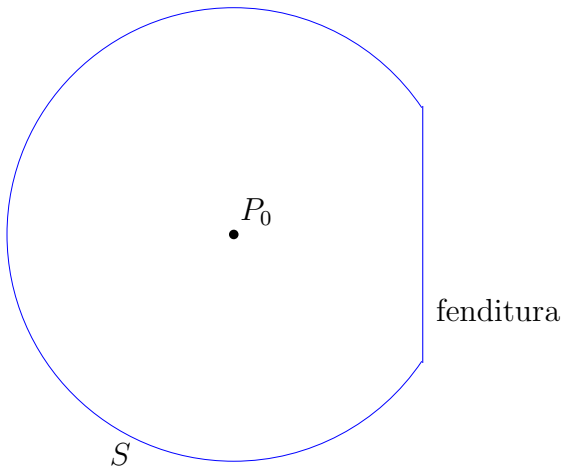
Infatti, siccome G è radiale, il suo valore sulla sferetta è costante e quindi

$$\left| \int_{S_\epsilon} G \partial_n u ds \right| \leq \frac{1}{\epsilon} \|\partial_n u\|_\infty |S_\epsilon| = C \epsilon \rightarrow 0.$$

Inoltre la derivata normale di G è la derivata rispetto al raggio, quindi $\partial_n G(P) = -e^{ik\epsilon} \frac{ik\epsilon - 1}{\epsilon^2}$ quando P è sulla sferetta S_ϵ . Quindi per convergenza dominata quando $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} - \int_{S_\epsilon} \partial_n G u ds &= \int_{S^2} e^{ik\epsilon} \frac{ik\epsilon - 1}{\epsilon^2} u(P_0 + \epsilon\omega) \epsilon^2 d\sigma(\omega) \\ &= e^{ik\epsilon} (ik\epsilon - 1) \int_{S^2} u(P_0 + \epsilon\omega) d\sigma(\omega) \\ &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -4\pi u(P_0), \end{aligned}$$

e la (1.5) segue.



Nei casi fisici interessanti, possiamo pensare alla superficie S come a una parete verticale dove si presenta una fenditura + una coppa sferica grande. Nelle “condizioni di radiazione di Sommerfeld” (che sono spesso verificate) si richiede che $\partial_n u - iku$ decada più rapidamente di $1/\text{dist}(P_0, P_1)$, cioè

$$\partial_n u(P_1) - iku(P_1) = \frac{\Omega(P_1)}{\text{dist}(P_0, P_1)}$$

dove $\lim_{P_1 \rightarrow \infty} \Omega(P_1) = 0$, uniformemente rispetto a P_1 .

Si ricordi che sulla coppa sferica la derivata normale di G è circa ikG , cosicché nella formula (1.5) rimane solo da valutare il valore sulla parte di S che contiene la fenditura, perché

$$\begin{aligned} \left| \int_{\text{coppa raggio } R} (G \partial_n u - u \partial_n G) ds \right| &\leq \frac{1}{R} \int_{\text{coppa}} |\partial_n u - ik u| ds \\ &\leq \frac{1}{R^2} \int_{\text{coppa}} |\Omega| ds \\ &\leq \int_{S^2} |\Omega(P_0 + R\omega)| d\sigma(\omega) \end{aligned}$$

e l'ultimo integrale converge a zero per convergenza dominata. Sicché se S_1 indica il piano che contiene la fenditura

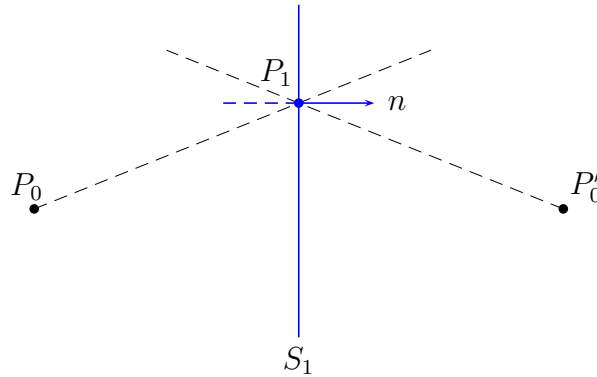
$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} (G \partial_n u - u \partial_n G) ds.$$

Possiamo ripetere lo stesso discorso a partire dalla funzione di Green uguale alla somma di quella precedente con quella generata dall'onda sferica generata nel punto immagine P'_0 di P_0 rispetto alla superficie S_1 e sfasata di π , ossia scegliamo

$$G(P) = \frac{e^{ik \text{dist}(P_0, P)}}{\text{dist}(P_0, P)} - \frac{e^{ik \text{dist}(P'_0, P)}}{\text{dist}(P'_0, P)}.$$

Il vantaggio è che nei punti della superficie S_1 (dove c'è la fenditura) questa funzione G di Green è nulla. Quindi

$$u(P_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} u \partial_n G ds.$$



Ora calcoliamo $\partial_n G$, derivando rispetto alla distanza e poi proiettando sulla normale. Otteniamo che nei punti P_1 della superficie $\cos(n, (P_1 - P_0)) = -\cos(n, (P_1 - P'_0))$, quindi

$$\partial_n G(P_1) = 2 \cos(n, (P_1 - P_0)) \left(ik - \frac{1}{\text{dist}(P_0, P_1)} \right) \frac{e^{ik \text{dist}(P_0, P_1)}}{\text{dist}(P_0, P_1)}.$$

Se $\text{dist}(P_0, P_1)$ è molto maggiore della lunghezza d'onda λ (nella pratica questa condizione è sempre verificata, infatti $k = 2\pi/\lambda$ e le lunghezze d'onda visibili sono dell'ordine $0.4 \div 0.7 \times$

$10^{-6}m$), allora $1/\text{dist}(P_0, P_1)$ è trascurabile rispetto a ik e quindi otteniamo

$$u(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \int_{\mathbb{R}^2} u(P_1) \frac{e^{ik\text{dist}(P_0, P_1)}}{\text{dist}(P_0, P_1)} \cos(n, (P_1 - P_0)) dP_1$$

dove $S_1 \simeq \mathbb{R}^2$ e il campo u è non nullo solo sulla fenditura. Questa formula mostra che l'effetto della diffrazione è una sovrapposizione di onde sferiche.

Una ulteriore approssimazione (e qui finalmente compare la trasformata di Fourier) è quella dovuta a Fraunhofer, nell'ipotesi in cui guardiamo l'effetto molto lontani dalla fenditura.

Modellizzando la situazione, possiamo pensare di avere due piani paralleli, uno contenente la fenditura (e quindi il punto P_1 di coordinate (x_1, y_1)) e l'altro contenente il punto P_0 di coordinate (x_0, y_0) in cui facciamo le osservazioni; i due piani distino fra loro di z . La fenditura è posta in una regione centrata attorno all'asse z .

Supponiamo che z sia molto maggiore delle dimensioni lineari della fenditura e inoltre le nostre osservazioni avvengano in una zona anch'essa di dimensioni molto minori di z (numericamente per un'apertura dell'ordine di $10^{-3} \div 10^{-4}m$ bisogna guardare a distanza di almeno $1 \div 2m$).

Si ha

$$\begin{aligned} \text{dist}(P_0, P_1) &= \sqrt{z^2 + (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \\ &= z \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_0 - x_1}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y_0 - y_1}{z} \right)^2 + o(z^{-2}) \right) \\ &= z + o(z) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cos(n, (P_1 - P_0)) &= \frac{z}{\text{dist}(P_0, P_1)} \\ &= 1 + o(1). \end{aligned}$$

Queste approssimazioni sono corrette, nel senso che trascuriamo termini dell'ordine di 10^{-8} , ma si presti attenzione al termine $k \text{dist}(P_0, P_1) = 2\pi/\lambda \text{dist}(P_0, P_1)$: esso contiene λ che stiamo supponendo piccolo rispetto a z ; per ottenere un'approssimazione più corretta, occorre sviluppare di un ordine più alto il termine di fase (il termine che aggiungiamo è dell'ordine di 10^{-2}):

$$\text{dist}(P_0, P_1) \simeq z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_0 - x_1}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y_0 - y_1}{z} \right)^2 \right].$$

In questo modo si ottiene

$$u(P_0) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \int_{\mathbb{R}^2} u(P_1) e^{2\pi i \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x_0 - x_1}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y_0 - y_1}{z} \right)^2 \right] / 2\lambda z} dx_1 dy_1$$

Sviluppiamo i quadrati e usiamo l'approssimazione di Fraunhofer con distanza z molto maggiore di k per l'ampiezza della fenditura, ossia $k \max\{x_1^2 + y_1^2\}/2z \ll 1$; otteniamo la formula

$$u(P_0) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{2\pi i(x_0^2 + y_0^2)/2\lambda z} \int_{\mathbb{R}^2} u(P_1) e^{-2\pi i(f_x x_1 + f_y y_1)} dx_1 dy_1.$$

L'approssimazione di Fraunhofer consiste quindi nel supporre che avvenga sostanzialmente un involuppo di onde piane (non più di onde sferiche) qualora si guardi il risultato a distanza grande rispetto alle dimensioni della fenditura. I numeri $f_x = x_0/\lambda z$ e $f_y = y_0/\lambda z$ sono dette frequenze spaziali.

Realizzate, con l'ausilio di MatLab, cosa si ottiene come campo diffratto pensando a una fenditura come un piccolo rettangolo, due rettangoli (vicini), variate la lunghezza d'onda. Le fenditure vanno sempre centrate nell'origine degli assi (ad esempio, i due rettangoli vanno posti coi centri in punti del tipo $(x, 0)$ e $(-x, 0)$, in modo che l'origine sia al centro della figura). Il seguente esempio tratta il caso di un rettangolo.

```
lambda=.00007; % lunghezza onda rosso in centimetri
% lambda=0.0000005; % lunghezza onda verde in metri
a=0.02; % (dimensioni della fenditura in cm --RETTANGOLO)
b=0.04;
M=50; % (dimensione dello schermo in cm)
x=-M:.1:M;
y=-M:.1:M;
[xx,yy]=meshgrid(x,y);
% poniamo lo schermo a distanza z=2 metri
z=200;
% supponiamo che l'intensita' del raggio sia costante sulla fenditura
% quindi la omettiamo; calcoliamo la tdf della caratteristica del rettangolo
% di cui interessa l'intensita' quindi il modulo quadrato EE
xxa=((pi*a).*xx)./(lambda*z);
yyb=((pi*b).*yy)./(lambda*z);
g=abs(sinc(xxa));
h=abs(sinc(yyb));
EE=(g.^2).*(h.^2)*b^2*a^2/(lambda^2*z^2);
EE=10000000.*EE; % va ingrandito, ci sono costanti che abbiamo omezzo.
j=0:0.01:1;
R=j'; G=(j.*0)'; B=G;
mhot=[R G B];
figure(1), imshow(EE(100:400,100:400)), colormap(mhot)
```

L'output del programma è la figura 1.18 che mostra quello che un osservatore vede sullo schermo:

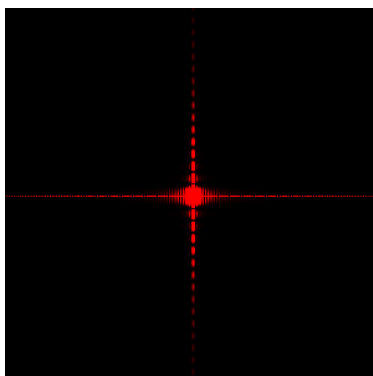


FIGURA 1.18. Frange di diffrazione

10. Esercizi

1.10.1. Completare i dettagli dell'esempio 1.2.

1.10.2. Sia A è una matrice $d \times d$. Verificare che per ogni f di classe C^2

$$\Delta(f \circ A)(x) = \sum_{j,k} b_{j,k} \partial_j \partial_k f(Ax)$$

dove $(b_{j,k})$ è la matrice $A^t A$. Dedurre che il laplaciano commuta con l'azione delle rotazioni, ossia che per ogni f di classe C^2 e per ogni rotazione R ,

$$R(\Delta f) = \Delta(Rf).$$

1.10.3. Si valuti la misura della sfera S^{d-1} in \mathbb{R}^d .

1.10.4. È vero il Teorema 1.7 anche per L^∞ ?

1.10.5. Si verifichi che le funzioni lisce a supporto compatto sono dense in L^p , $1 \leq p < \infty$.

1.10.6. Verificare che se f è in $L^{p_0} \cap L^{p_1}$, allora f è in L^p dove $\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}$ e inoltre $\|f\|_p \leq \|f\|_{p_0}^{1-t} \|f\|_{p_1}^t$.

1.10.7. Calcolare la Trasformata di Fourier della convoluzione di due funzioni.

1.10.8. (Trasformata di Fourier di funzioni radiali in \mathbb{R}^2) La funzione di Bessel di ordine n in \mathbb{Z} è definita come l'ennesimo coefficiente di Fourier della funzione $\theta \mapsto e^{it \sin \theta}$, ovvero

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it \sin \theta} e^{-in\theta} d\theta,$$

Verificare che

$$F_0(\rho) = 2\pi \int_0^\infty J_0(2\pi r \rho) f_0(r) r dr$$

1.10.9. Si verifichino le seguenti proprietà delle funzioni di Bessel:

- a) $J_n(\rho)$ è reale per ρ reale;
- b) $J_{-n} = (-1)^n J_n$;
- c) $2J'_n = J_{n-1} - J_{n+1}$;
- d) $\left(\frac{2n}{\rho}\right) J_n(\rho) = J_{n-1}(\rho) + J_{n+1}(\rho)$;
- e) $(\rho^{-n} J_n(\rho))' = -\rho^{-n} J_{n+1}(\rho)$;
- f) $(\rho^n J_n(\rho))' = \rho^n J_{n-1}(\rho)$;
- g) la funzione J_n soddisfa l'equa diff

$$J_n''(\rho) + \frac{1}{\rho} J_n'(\rho) + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right) J_n(\rho) = 0.$$

1.10.10. Sia n reale, $n > -1/2$ e poniamo

$$(1.6) \quad \mathcal{J}_n(\rho) = \frac{(\rho/2)^n}{\Gamma(n+1/2)\sqrt{\pi}} \int_{-1}^1 e^{i\rho t} (1-t^2)^{n-(1/2)} dt.$$

- a) Verificare che $\mathcal{J}_0 = J_0$;
- b) verificare che $\mathcal{J}_n = J_n$ quando n è naturale, usando la formula ricorsiva e) dell'esercizio precedente. Ne segue che la (1.6) costituisce un'estensione a parametri n non interi delle funzioni di Bessel J_n . Nel seguito non distinguiamo più tra \mathcal{J} e J .
- c) verificare che $J_{1/2}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \sin \rho$;
- d) provare che

$$\lim_{n \rightarrow -1/2} J_n(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \cos \rho.$$

- e) Sia f integrabile e radiale, ovvero $f(x) = f_0(|x|)$, e sia F_0 la funzione di variabile reale definita da $\hat{f}(\xi) = F_0(|\xi|)$. Notare che

$$F_0(\rho) = 2\pi\rho^{-(d/2)+1} \int_0^\infty J_{(d/2)-1}(2\pi r\rho) f_0(r) r^{d/2} dr$$

nei casi $d = 1, 2, 3$ dove si prenda $J_{-1/2}(\rho) = \lim_{n \rightarrow -1/2} J_n(\rho)$;

- f) verificare che la relazione precedente è valida in ogni dimensione.
Nota: le funzioni di Bessel che compaiono nella trasformata di Fourier di funzioni radiali sono funzioni elementari per d dispari, ma non d pari.

1.10.11. Il principio di subordinazione. È un principio che permette di scrivere espressioni che contengono e^{-x} in termini di corrispondenti espressioni che coinvolgono $e^{-|x|^2}$.

- a) Provare che per ogni $\beta \geq 0$

$$e^{-\beta} = \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{\pi u}} e^{-\beta^2/4u} du$$

usando la trasformata di Fourier unidimensionale con $\beta = 2\pi|x|$.

- b) calcolare \hat{P}_t , dove per $t > 0$ $P_t : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ è def da $P_t(x) = e^{-2\pi t|x|}$, ovvero che per una opportuna costante che dipende dalla dimensione

$$\hat{P}_t(\xi) = \text{const} \frac{t}{(t^2 + |\xi|^2)^{(d+1)/2}} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

- 1.10.12.** Provare che se f è di Schwartz su \mathbb{R} e $\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-y^2} e^{2xy} dy = 0$ per ogni x in \mathbb{R} , allora $f = 0$ (suggerimento: si consideri $f * e^{-x^2}$).

- 1.10.13.** Sia c un numero complesso tale che $\hat{f} = cf$ per una opportuna $f \neq 0$. Quanto può valere c ? (Si veda anche il prossimo esercizio.)

- 1.10.14.** Le funzioni di Hermite h_k sono definite su \mathbb{R} mediante

$$(1.7) \quad e^{-(x^2/2-2tx+t^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x) \frac{t^k}{k!} \quad \forall x, t \in \mathbb{R}.$$

- a) mostrare che

$$h_k(x) = (-1)^k e^{x^2/2} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Dedurre che $h_k(x)$ è il prodotto di un polinomio di grado k in x per $e^{-x^2/2}$, quindi h_k è di Schwartz.

- b) Calcolare h_0, h_1 .
c) Mostrare che $h_k^*(x) = h_k((2\pi)^{1/2}x)$ soddisfa

$$\hat{h}_k^*(\xi) = (-i)^k h_k^*(\xi).$$

(verificare per induzione, dato che h_k soddisfa $h'_k - xh_k = -h_{k+1}$)

- d) Mostrare che le h_k sono autofunzioni dell'operatore (di Hermite) $L = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$ con autovalore $2k + 1$ (si proceda in questo modo: provare che

$$L(e^{-(x^2/2-2tx+t^2)}) = \left(2t \frac{d}{dt} + 1\right) e^{-(x^2/2-2tx+t^2)}$$

e poi usando la (1.7) ragionare termine a termine).

- e) Usare questo fatto per provare che $\{h_k : k \in \mathbb{N}\}$ è parte ortogonale (integrando per parti, si provi che

$$(2k + 1)\langle h_k, h_\ell \rangle_{L^2} = \langle Lh_k, h_\ell \rangle_{L^2} = \langle h_k, Lh_\ell \rangle_{L^2} \dots)$$

- f) Usare ancora la (1.7) e l'ortogonalità delle h_k per provare che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |h_k(x)|^2 dx \frac{t^{2k}}{(k!)^2} = \int_{\mathbb{R}} e^{2t^2} e^{-(x-2t)^2} dx = e^{2t^2} \pi^{1/2} = \pi^{1/2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2t^2)^k}{k!}.$$

Comparando i termini, ricavare $\|h_k\|_2^2 = \pi^{1/2} 2^k k!$.

- g) Mostrare che se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $\langle f, h_n \rangle_{L^2} = 0$ per ogni n allora $f = 0$ (usare l'esercizio 12). Sapendo che $C_c^\infty(\mathbb{R})$ è denso in $L^2(\mathbb{R})$, concludere che $\{H_n : n \in \mathbb{N}\}$ è una base ortonormale di $L^2(\mathbb{R})$, dove $H_n = h_n / \|h_n\|_2$.
h) Per il caso d -dimensionale, notare che si possono considerare prodotti tensoriali di funzioni di Hermite.

1.10.15. Verificare che la disuguaglianza di Heisenberg è precisa. Come si deve modificare la disuguaglianza quando la norma di f non è 1?

1.10.16. Si dice che una funzione di Schwartz f su \mathbb{R}^d ha massa in una palla I se

$$\int_I |x|^2 |f(x)|^2 dx \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 |f(x)|^2 dx$$

Si supponga f con massa in I e \hat{f} con massa in J . Cosa possiamo dire delle misure di I e J ?

1.10.17. Si scriva un programma il cui output sia il risultato della diffrazione di un raggio attraverso una doppia fenditura; si faccia variare la lunghezza d'onda. Implementare anche il caso della fenditura circolare. (Dentro `MatLab`, il comando `besselj(n,x)` calcola il valore della funzione di Bessel $J_n(x)$.)

CAPITOLO 2

Armoniche sferiche

In \mathbb{R} il gruppo delle rotazioni è “piccolo” e dà luogo alla decomposizione

$$L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R})_{\text{even}} \oplus L^2(\mathbb{R})_{\text{odd}}$$

in somma diretta ortogonale. Inoltre la trasformata di Fourier porta ciascun spazio in sé e ha una forma abbastanza semplice: anziché l’esponenziale, per le funzioni pari si usa il coseno, per quelle dispari il seno.

Cosa può succedere in dimensione maggiore? Il gruppo delle rotazioni è molto più grande, ma è ancora vero che se f è invariante per rotazioni, anche la sua trasformata lo è. Questo dà luogo al seguente risultato: sia \mathcal{D}_0 il sottospazio (chiuso) delle funzioni radiali in $L^2(\mathbb{R}^d)$; la trasformata di Fourier è una biiezione dello spazio \mathcal{D}_0 e preserva la decomposizione $L^2(\mathbb{R}^d) = \mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_0^\perp$.

Tuttavia, è possibile decomporre ulteriormente \mathcal{D}_0^\perp in sottospazi invarianti sia per l’azione delle rotazioni sia per l’azione della trasformata di Fourier.

Iniziamo osservando più in dettaglio il caso di \mathbb{R}^2 , che, grazie all’identificazione con il piano complesso e alla teoria delle serie di Fourier, è di più semplice comprensione.

1. Il caso di \mathbb{R}^2

Ricordiamo che nell’identificazione di \mathbb{R}^2 col piano complesso $c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ data da $c(x, y) = x + iy$, una rotazione propria descritta dalla matrice $R_\phi = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$ diventa la moltiplicazione per $e^{i\phi}$. In formule

$$c \left(\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = e^{i\phi} (x + iy) \quad \Rightarrow \quad R_\phi(x, y) = c^{-1}(e^{i\phi} c(x, y)).$$

Inoltre i punti della sfera $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ si identificano (sempre tramite c) con i numeri complessi $U(1)$ di modulo 1, che formano un gruppo rispetto alla moltiplicazione.

La sfera unitaria $U(1)$ del piano complesso può essere descritta tramite la mappa $\theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\theta} \in U(1)$. Più precisamente questa mappa è un omomorfismo surgettivo del gruppo additivo \mathbb{R} nel gruppo moltiplicativo $U(1)$ con nucleo $2\pi\mathbb{Z}$. Quindi $S^1 \simeq U(1) \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq [0, 2\pi)$.

Nel seguito talvolta omettiamo queste identificazioni.

Una funzione g definita sulla sfera S^1 dà luogo quindi a una funzione di variabile reale f periodica di periodo 2π : basta definire la funzione f mediante $f(\theta) = g \circ c^{-1}(e^{i\theta})$ per ogni θ reale.

Ricordiamo brevemente due risultati importanti sulle serie di Fourier. Sia f una funzione di variabile reale, periodica di periodo 2π e di quadrato integrabile sull'intervallo $[0, 2\pi)$. Il k -esimo coefficiente di Fourier di f è definito da

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Vale la formula di Parseval

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 \quad \forall f \in L^2([0, 2\pi))$$

e la formula di inversione, dove il limite si intende in norma $L^2([0, 2\pi))$:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=-K}^K \hat{f}(k) e^{-ik\theta} = f(\theta) \quad \forall f \in L^2([0, 2\pi)).$$

Sia ora f in $L^2(\mathbb{R}^2)$. A r fissato consideriamo la funzione f_r definita da

$$f_r(\theta) = f \circ c^{-1}(re^{i\theta}) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Ovviamente la funzione f_r è periodica di periodo 2π . Siccome f è in $L^2(\mathbb{R}^2)$, dal Teorema di Fubini–Tonelli possiamo dedurre che per quasi ogni r la funzione f_r è una funzione a quadrato integrabile su $[0, 2\pi)$. Infatti è finito l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)|^2 dx dy = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} |f_r(\theta)|^2 d\theta r dr$$

e quindi per quasi ogni r deve essere finito l'integrale interno.

Quindi per quasi ogni r fissato, f_r si può espandere in serie di Fourier con serie convergente in $L^2([0, 2\pi))$

$$f_r(\theta) = f \circ c^{-1}(re^{i\theta}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_r(k) e^{ik\theta}.$$

PROPOSIZIONE 2.1. *Sia f in $L^2(\mathbb{R}^2)$. Per ogni k in \mathbb{Z} l'integrale $\int_0^\infty |\hat{f}_r(k)|^2 r dr$ è finito.*

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che per la formula di Parseval si ha

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^\infty |\hat{f}_r(k)|^2 r dr = \int_0^\infty \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_r(k)|^2 r dr = \int_0^\infty \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f \circ c^{-1}(re^{i\theta})|^2 d\theta r dr = \frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2,$$

dove lo scambio tra serie e integrale può essere giustificato con il Teorema di Fubini–Tonelli oppure con il Teorema di convergenza monotona di Beppo Levi. Ovviamente, se la somma di una serie a termini non negativi è finita, allora ogni termine è finito. \square

DEFINIZIONE 2.1. Denotiamo con \mathcal{D}_k il sottospazio di $L^2(\mathbb{R}^2)$ delle funzioni g della forma $g \circ c^{-1}(re^{i\theta}) = f(r)e^{ik\theta}$, per qualche funzione misurabile f su $[0, \infty)$ e tale che $\int_0^\infty |f(r)|^2 r dr$ sia finito.

PROPOSIZIONE 2.2. \mathcal{D}_k è un sottospazio chiuso di $L^2(\mathbb{R}^2)$.

DIMOSTRAZIONE. Si noti che se g è in \mathcal{D}_k e f è associata a g come nella definizione

$$\|g\|_2^2 = \int_0^\infty |f(r)|^2 r dr.$$

È facile verificare che \mathcal{D}_k è un sottospazio. Dimostriamo che \mathcal{D}_k è chiuso: se (g_n) è una successione di elementi di \mathcal{D}_k convergente a g in L^2 , allora è di Cauchy. Inoltre esistono delle funzioni f_n tali che $g_n \circ c^{-1}(re^{i\theta}) = f_n(r)e^{ik\theta}$ per ogni $r \geq 0$ e per ogni θ in \mathbb{R} . Possiamo dedurre che la successione (f_n) è di Cauchy in $L^2(r dr)$, che è uno spazio completo. Quindi esiste f in $L^2(r dr)$ tale che $\|f_n - f\|_{L^2(r dr)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Definiamo allora una funzione h mediante

$$h \circ c^{-1}(re^{i\theta}) = f(r)e^{ik\theta} \quad \forall r \geq 0, \theta \in \mathbb{R}.$$

È facile verificare che h è in \mathcal{D}_k , che $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h$ in $L^2(\mathbb{R}^2)$ e quindi che $g = h \in \mathcal{D}_k$. \square

Il sottospazio \mathcal{D}_k è ovviamente ortogonale a \mathcal{D}_0 se $k \neq 0$ e è formato da funzioni che hanno un facile comportamento rispetto alle rotazioni proprie di \mathbb{R}^2 .

PROPOSIZIONE 2.3. Se g è in \mathcal{D}_k e R_ϕ è la rotazione di angolo ϕ , allora $R_\phi g \in \mathcal{D}_k$ e

$$R_\phi g = e^{-ik\phi} g.$$

Viceversa, se g è in $L^2(\mathbb{R}^2)$ e $R_\phi g = e^{-ik\phi} g$ per ogni rotazione R_ϕ , allora g è in \mathcal{D}_k .

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che per ogni funzione g abbiamo definito $R_\phi g = g \circ R_{-\phi}$ e che $R_\phi(c^{-1}(z)) = c^{-1}(e^{i\phi}z)$ per ogni z in \mathbb{C} .

Se g è una funzione in \mathcal{D}_k , allora

$$[(R_\phi g) \circ c^{-1}](re^{i\theta}) = g(R_{-\phi}(c^{-1}(re^{i\theta}))) = g \circ c^{-1}(re^{i(\theta-\phi)}) = f(r)e^{ik(\theta-\phi)} = [g \circ c^{-1}](re^{i\theta})e^{-ik\phi}.$$

Questo ci dice anche che $R_\phi g$ è in \mathcal{D}_k per ogni rotazione R_ϕ .

Il viceversa è banale. \square

La formula appena trovata ci permetterà di dire qualcosa sulla trasformata di una tale funzione. Ora mostriamo che $L^2(\mathbb{R}^2)$ si descrive tramite gli spazi \mathcal{D}_k .

TEOREMA 2.4. $L^2(\mathbb{R}^2) = \bigoplus_k \mathcal{D}_k$, somma diretta ortogonale di sottospazi chiusi.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già verificato che gli spazi \mathcal{D}_k sono chiusi e è facile verificarne l'ortogonalità.

Rimane da verificare che la loro somma diretta è $L^2(\mathbb{R}^2)$, ovvero che se f è in $L^2(\mathbb{R}^2)$, allora esistono funzioni g_k in \mathcal{D}_k tali che $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k$ con serie convergente in $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Fissiamo quindi f in $L^2(\mathbb{R}^2)$. Allora, come già detto possiamo scrivere

$$f_r(\theta) = f \circ c^{-1}(re^{i\theta}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_r(k) e^{ik\theta}$$

dove la serie converge in $L^2([0, 2\pi))$.

Poniamo allora $g_k \circ c^{-1}(z) = \hat{f}_r(k) e^{ik\theta}$, dove $f_k(r) = \hat{f}_r(k)$.

È facile controllare che g_k è in \mathcal{D}_k , perché $\int_0^\infty |f_k(r)|^2 r dr$ è finito, come già visto nella Proposizione 2.1. Infine siccome per ogni $N \geq 0$

$$\begin{aligned} \langle f - \sum_{k=-N}^N g_k, \sum_{h=-N}^N g_h \rangle &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (f \circ c(re^{i\theta}) - \sum_{k=-N}^N \hat{f}_r(k) e^{ik\theta}) \sum_{h=-N}^N \overline{\hat{f}_r(h)} e^{-ih\theta} d\theta r dr \\ &= \int_0^\infty \left(\sum_{h=-N}^N \overline{\hat{f}_r(h)} \int_0^{2\pi} f \circ c(re^{i\theta}) e^{-ih\theta} d\theta - \sum_{h,k=-N}^N \hat{f}_r(k) \overline{\hat{f}_r(h)} \int_0^{2\pi} e^{i(k-h)\theta} d\theta \right) r dr \\ &= \int_0^\infty \left(\sum_{h=-N}^N \overline{\hat{f}_r(h)} 2\pi \hat{f}_r(h) - 2\pi \sum_{k=-N}^N |\hat{f}_r(k)|^2 \right) r dr = 0 \end{aligned}$$

otteniamo $\|f\|_2^2 = \|f - \sum_{k=-N}^N g_k\|_2^2 + \|\sum_{k=-N}^N g_k\|_2^2$ da cui

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - \sum_{k=-N}^N g_k\|_2^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \|f\|_2^2 - \|\sum_{k=-N}^N g_k\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \lim_{N \rightarrow \infty} \|\sum_{k=-N}^N g_k\|_2^2 = 0.$$

Infatti, usando nell'ordine il Teorema di Pitagora, la definizione delle funzioni g_k , la convergenza monotona e la formula di Parseval

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=-N}^N g_k \right\|_2^2 &= \sum_{k=-N}^N \|g_k\|_2^2 = \sum_{k=-N}^N \int_0^\infty \int_0^{2\pi} |\hat{f}_r(k)|^2 d\theta r dr \\ &= \sum_{k=-N}^N \int_0^\infty 2\pi |\hat{f}_r(k)|^2 r dr = 2\pi \int_0^\infty \sum_{k=-N}^N |\hat{f}_r(k)|^2 r dr \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 2\pi \int_0^\infty \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_r(k)|^2 r dr \\ &= 2\pi \int_0^\infty \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_r(\theta)|^2 d\theta r dr = \|f\|_2^2. \quad \square \end{aligned}$$

Infine scopriamo quale è la trasformata di funzioni in \mathcal{D}_k .

TEOREMA 2.5. *La trasformata di Fourier è una bigezione di \mathcal{D}_k in sé. Inoltre, se g è in $\mathcal{D}_k \cap L^1$ è della forma $g \circ c^{-1}(re^{i\theta}) = f(r) e^{ik\theta}$ allora $\hat{g} \circ c^{-1}(\rho e^{i\phi}) = F(\rho) e^{ik\phi}$ dove*

$$F(\rho) = 2\pi i^k \int_0^\infty f(r) J_{-k}(2\pi r \rho) r dr.$$

DIMOSTRAZIONE. Usando la formula della Proposizione 2.3 è facile vedere che la trasformata di Fourier è una bigezione di \mathcal{D}_k in sé. Infatti, sia g in $\mathcal{D}_k \cap L^1$; siccome la trasformata di Fourier commuta con le rotazioni otteniamo che per $\xi = c^{-1}(\rho e^{i\phi})$,

$$\hat{g}(\xi) = \hat{g} \circ c^{-1}(\rho e^{i\phi}) = (R_{-\phi} \hat{g}) \circ c^{-1}(\rho) = \widehat{R_{-\phi} g} \circ c^{-1}(\rho) = e^{ik\phi} \hat{g} \circ c^{-1}(\rho).$$

Questo ci permette di concludere che anche \hat{g} è in \mathcal{D}_k . Per densità si ottiene che la trasformata di Fourier porta \mathcal{D}_k in sé.

Per vedere la surgettività, si può notare che $\mathcal{F}^{-1}f(\xi) = \mathcal{F}f(-\xi)$, quindi se g è in \mathcal{D}_k allora $g(-\xi) = (-1)^k g$ lo è ancora. Poniamo quindi $f(\xi) = \mathcal{F}g(-\xi)$. Allora f è in \mathcal{D}_k e $\hat{f} = g$.

Si supponga infine la funzione g anche integrabile. Ricordiamo che

$$\begin{aligned} J_n(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it \sin \theta} e^{-in\theta} d\theta \\ &= \overline{J_n(t)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-it \sin \theta} e^{in\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-it \sin(\theta+\pi/2)} e^{in(\theta+\pi/2)} d\theta \\ &= \frac{i^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-it \cos \theta} e^{in\theta} d\theta, \end{aligned}$$

quindi si arriva banalmente alla formula scrivendo

$$\begin{aligned} F(R) &= \hat{g} \circ c^{-1}(Re^{i0}) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-2\pi i r e^{i\theta} \cdot Re^{i0}} f(r) e^{ik\theta} d\theta r dr \\ &= \int_0^\infty f(r) \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} e^{-2\pi i r R \cos \theta} d\theta r dr \\ &= 2\pi (-i)^k \int_0^\infty f(r) \frac{i^k}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} e^{-2\pi i r R \cos \theta} d\theta r dr \\ &= 2\pi (-i)^k \int_0^\infty f(r) J_k(2\pi r R) r dr \\ &= 2\pi i^k \int_0^\infty f(r) J_{-k}(2\pi r R) r dr \end{aligned}$$

perché $J_k = (-1)^k J_{-k}$. □

OSSERVAZIONE 2.6. In questa sezione ci siamo limitati a considerare rotazioni proprie. Se anziché rotazioni proprie considerassimo tutte le rotazioni (anziché $SO(2)$ considerassimo $O(2)$), allora il risultato sarebbe diverso. Infatti, una particolare rotazione impropria è quella che nel piano complesso diventa il coniugio e lo spazio \mathcal{D}_k non è invariante per l'azione del coniugio (possiamo dire che se U è la rotazione corrispondente al coniugio e g è in \mathcal{D}_k , allora Rg è in \mathcal{D}_{-k}). Nella decomposizione in sottospazi invarianti si dovrebbe tener conto del fatto che se $f(re^{i\theta}) = \sum f_k(r)e^{ik\theta}$ allora deve essere $f(re^{i\theta}) = f(re^{-i\theta})$, ovvero $f_k(r) = f_{-k}(r)$.

2. Il caso di \mathbb{R}^d

Cerchiamo di capire quali funzioni possano svolgere il ruolo degli esponenziali $\theta \mapsto e^{ik\theta}$ nel caso di sfere di dimensione maggiore. Analizziamo quindi ancora il caso di S^1 , partendo da una funzione a quadrato integrabile in S^1 . Una tale funzione f ha uno sviluppo del tipo

$$f \circ c^{-1}(e^{i\theta}) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ik\theta} + c_{-k} e^{-ik\theta}).$$

Se supponiamo che inoltre f sia reale, allora $c_{-k} = \overline{c_k}$ e quindi abbiamo che f si approssima mediante sovrapposizione di funzioni del tipo $Y^{(k)}$ dove $Y^{(k)} \circ c^{-1}(e^{i\theta}) = c_k e^{ik\theta} + \overline{c_k} e^{-ik\theta}$.

Se f non fosse reale, si ragiona separatamente sulla parte reale e su quella immaginaria.

PROPOSIZIONE 2.7. $Y^{(k)}$ è la restrizione alla sfera unitaria di un polinomio reale armonico omogeneo di grado k .

DIMOSTRAZIONE. Si noti che $Y^{(k)} \circ c^{-1}(e^{i\theta}) = 2\text{Re}(q_k(e^{i\theta}))$ dove $q_k(z) = c_k z^k$. Ora q_k è un polinomio, quindi è una funzione olomorfa; la sua parte reale sarà quindi un polinomio armonico e reale. Dal fatto che q_k è omogeneo di grado k segue che anche la sua parte reale lo è. \square

Viceversa:

PROPOSIZIONE 2.8. La restrizione alla sfera unitaria di un polinomio reale armonico omogeneo di grado k è del tipo $Y^{(k)}$.

DIMOSTRAZIONE. Un polinomio p su \mathbb{R}^2 omogeneo di grado k è del tipo

$$p \circ c^{-1}(z) = \sum_{j=0}^k c_j z^j \bar{z}^{k-j}.$$

Il polinomio è armonico se $c_j = 0$ con $j \neq 0, k$, perché $\Delta p = (4\partial_z \partial_{\bar{z}}(p \circ c^{-1})) \circ c$. Quindi $p \circ c^{-1}(z) = c_k z^k + c_0 \bar{z}^k$. Infine p è reale quando $c_0 = \overline{c_k}$. \square

Nelle prossime sezioni vediamo che effettivamente il ruolo delle funzioni esponenziali sul toro può essere svolto dai polinomi armonici e omogenei.

2.1. Polinomi omogenei e armoniche sferiche. Indichiamo con \mathcal{P} lo spazio dei polinomi su \mathbb{R}^d a coefficienti complessi e con \mathcal{P}_k il sottospazio formato dai polinomi omogenei di grado k . Allora

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}_k,$$

ovvero ogni polinomio è somma di polinomi omogenei di grado k .

Questa è una buona decomposizione se pensiamo all'azione delle rotazioni, perché $Rp \in \mathcal{P}_k$ se $p \in \mathcal{P}_k$, però non è soddisfacente come decomposizione a livello della sfera (ad esempio i polinomi 1 e $|x|^2$ sono distinti, tuttavia sulla sfera sono uguali $1 = |x|^2$).

Studiamo inizialmente più in dettaglio i polinomi di grado k fissato. Una base di \mathcal{P}_k è costituita dai monomi, x^α con $|\alpha| = k$. Quanti sono?

PROPOSIZIONE 2.9. *Lo spazio \mathcal{P}_k ha dimensione $d_k = \binom{d+k-1}{k}$.*

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo trovare la cardinalità di $\{\alpha \in \mathbb{N}^d : |\alpha| = k\}$. Per far questo mettiamo tale insieme in corrispondenza biunivoca con le disposizioni di $d-1$ palline in $k+d-1$ scatole (ordinate).

Questa corrispondenza si descrive nel seguente modo: dato $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ tale che $\sum \alpha_j = k$, lasciamo vuote le prime α_1 scatole e mettiamo la prima pallina nella α_1+1 -esima scatola; lasciamo vuote altre α_2 scatole e mettiamo la seconda pallina nella scatola successiva, eccetera; procedendo in questo modo, dopo aver messo la $d-1$ -esima pallina nella scatola opportuna, le scatole successive saranno esattamente α_d . Infatti il numero totale delle scatole è $k+d-1$, ne abbiamo riempite $d-1$ con le palline e lasciate libere $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{d-1} = k - \alpha_d$. Viceversa, data una disposizione di $d-1$ palline in $k+d-1$ scatole, possiamo costruire una sequenza $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ ottenuta contando le scatole vuote tra una pallina e l'altra. Siccome le scatole sono $k+d-1$ e le palline sono $d-1$, le scatole rimaste vuote sono $\alpha_1 + \dots + \alpha_d = k+d-1 - (d-1) = k$. \square

Definiamo ora un prodotto interno sullo spazio dei polinomi ponendo

$$\langle\langle p, q \rangle\rangle = p(\partial)\bar{q}(0) \quad \forall p, q \in \mathcal{P}.$$

Per esercizio si verifichi che se x^α e x^β sono monomi, allora il loro prodotto interno è $\delta_{\alpha,\beta}\alpha!$. Da questo si ricavi che la formula indicata fornisce un prodotto scalare.

Si noti anche che se i polinomi sono omogenei dello stesso grado, allora $\langle\langle p, q \rangle\rangle = p(\partial)\bar{q}$.

DEFINIZIONE 2.2. Denotiamo con \mathcal{A}_k lo spazio dei polinomi armonici di \mathcal{P}_k . In formule

$$\mathcal{A}_k = \{p \in \mathcal{P}_k : \Delta p = 0\}.$$

TEOREMA 2.10. *Sia $k \geq 2$. Allora $\mathcal{P}_k = \mathcal{A}_k \oplus |x|^2 \mathcal{P}_{k-2}$ e la somma diretta è ortogonale rispetto al prodotto interno fissato.*

DIMOSTRAZIONE. Si consideri l'operatore $T : \mathcal{P}_{k-2} \rightarrow \mathcal{P}_k$ definito da $Tp = |x|^2 p$. Si ha che $\mathcal{P}_k = \text{Im}(T) \oplus \text{Im}(T)^\perp$ somma diretta ortogonale. Inoltre $\text{Im}(T)^\perp = \ker(T^*)$. Si verifica banalmente che $T^*q = \Delta q$, ovvero $\ker(T^*) = \mathcal{A}_k$. \square

COROLLARIO 2.11. *Se p è un polinomio in \mathcal{P}_k allora*

$$p(x) = p_0(x) + |x|^2 p_1(x) + \cdots + |x|^{2\ell} p_\ell(x)$$

dove p_j è armonico di grado $k - 2j$ e $\ell = [k/2]$.

DIMOSTRAZIONE. La tesi è ovvia se $k = 0, 1$ perché i polinomi di grado minore o uguale a 1 sono armonici. Quando $k \geq 2$, si applica il Teorema precedente più volte e si ottiene la decomposizione richiesta. \square

COROLLARIO 2.12. *La restrizione di ogni polinomio alla sfera è somma di restrizioni di polinomi armonici.*

DEFINIZIONE 2.3. Si dice armonica sferica di grado k la restrizione alla sfera di un polinomio armonico e omogeneo di grado k . Indichiamo con \mathcal{H}_k lo spazio delle armoniche sferiche di grado k .

PROPOSIZIONE 2.13. *Gli spazi \mathcal{H}_k e \mathcal{A}_k sono isomorfi e quindi hanno la stessa dimensione $a_k = d_k - d_{k-2}$.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la mappa $S : \mathcal{A}_k \rightarrow \mathcal{H}_k$ data dalla restrizione di un polinomio alla sfera. S è lineare. Per definizione di \mathcal{H}_k , S è surgettiva. Verifichiamo che S è iniettiva, utilizzando l'omogeneità dei polinomi: prendiamo p nel nucleo di S , quindi p è un polinomio in \mathcal{A}_k la cui restrizione alla sfera è nulla (ovvero $Sp = 0$). Questo significa che per ogni x' in S^{d-1} si ha $p(x') = (Sp)(x') = 0$ e, per l'omogeneità di p , se $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, allora $p(x) = |x|^k p(x/|x|) = |x|^k (Sp)(x/|x|) = 0$. Quindi $p(0) = 0$ per continuità e il nucleo di S è banale.

La dimensione si ricava dal fatto che $\mathcal{P}_k = \mathcal{A}_k \oplus |x|^2 \mathcal{P}_{k-2}$, quindi

$$d_k = \dim \mathcal{P}_k = \dim \mathcal{A}_k + \dim |x|^2 \mathcal{P}_{k-2} = a_k + d_{k-2}. \quad \square$$

La proposizione precedente giustifica la seguente terminologia. Una armonica sferica in un certo \mathcal{H}_k viene anche detta superficiale e \mathcal{A}_k si chiama spazio delle armoniche sferiche solide.

ESEMPIO 2.14. In ogni dimensione, $\mathcal{H}_0 = \mathcal{A}_0 = \mathcal{P}_0$ è costituito dai polinomi costanti e ha dimensione 1. $\mathcal{H}_1 \simeq \mathcal{A}_1 = \mathcal{P}_1$ è generato dai monomi di grado 1 e quindi ha dimensione d .

Quando $d = 2$, allora $a_k = 2$ per ogni $k \geq 1$. Infatti, come abbiamo visto, $\mathcal{A}_k \circ c = \text{sp} \{z^k, \bar{z}^k\}$ e $\mathcal{H}_k \circ c = \text{sp} \{e^{ik\theta}, e^{-ik\theta}\}$.

Quando $d = 3$, allora $a_k = 2k + 1$ per ogni $k \geq 1$. In generale, a_k cresce al crescere di k .

TEOREMA 2.15. *Lo spazio delle combinazioni lineari finite di armoniche sferiche è uniformemente denso nelle funzioni continue sulla sfera e quindi denso in $L^2(S^{d-1})$.*

DIMOSTRAZIONE. Bisognerebbe conoscere il seguente risultato:

TEOREMA 2.16 (Stone–Weierstrass). *Sia X uno spazio T_2 e compatto e sia \mathcal{A} un'algebra di funzioni continue chiusa per coniugazione, che contiene le costanti e separa i punti (cioè se $x, y \in X$ allora esiste f tale che $f(x) \neq f(y)$). Allora \mathcal{A} è (uniformemente) densa in $C(X)$.*

Noto questo, lo spazio delle combinazioni lineari finite di armoniche sferiche coincide con lo spazio delle restrizioni alla sfera dei polinomi in d variabili. Lo spazio dei polinomi in d variabili \mathcal{P} è un'algebra di funzioni continue chiusa per coniugazione, che contiene le costanti e separa i punti della sfera, perché se $x \neq y$ sono sulla sfera, esiste j tale che $x_j \neq y_j$ e si prenda quindi $p(x) = x_j$ separa x e y . Allora \mathcal{P} è denso in $C(S^{d-1})$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$. La densità in $L^2(S^{d-1})$ segue dalla densità delle funzioni continue e dal fatto che lo spazio è compatto. \square

TEOREMA 2.17. $L^2(S^{d-1}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$, somma diretta ortogonale di sottospazi chiusi rispetto al prodotto interno di $L^2(S^{d-1})$.

DIMOSTRAZIONE. Siccome \mathcal{H}_k ha dimensione finita, è chiuso. Abbiamo già mostrato che le combinazioni lineari finite di elementi di \mathcal{H}_k sono dense. Dobbiamo ancora verificare l'ortogonalità: siano Y_k un'armonica in \mathcal{H}_k e Y_ℓ in \mathcal{H}_ℓ . Allora esistono p_k in \mathcal{A}_k e p_ℓ in \mathcal{A}_ℓ loro corrispondenti armoniche solide, ovvero $Sp_k = Y_k$ e $Sp_\ell = Y_\ell$.

Si ha $p_k(rx) = r^k p_k(x)$, quindi

$$x \cdot \nabla p_k(rx) = \partial_r p_k(rx) = kr^{k-1} p_k(x).$$

In particolare, per $r = 1$, l'uguaglianza precedente implica che

$$\partial_n Y_k = k Y_k$$

dove ∂_n è la derivata nella direzione normale uscente dalla sfera unitaria. Quindi, usando il Teorema di Gauss–Green,

$$\begin{aligned} (\ell - k) \int_{S^{d-1}} Y_k(x') \overline{Y_\ell(x')} d\sigma(x') &= \int_{S^{d-1}} \left(Y_k(x') \partial_n \overline{Y_\ell(x')} - \overline{Y_\ell(x')} \partial_n Y_k(x') \right) d\sigma(x') \\ &= \int_{B(0,1)} \left(p_k(x) \Delta \overline{p_\ell(x)} - \overline{p_\ell(x)} \Delta p_k(x) \right) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Quindi se $\ell \neq k$ allora le due armoniche sono ortogonali. \square

La decomposizione che abbiamo trovato è interessante per l'azione delle rotazioni:

PROPOSIZIONE 2.18. *Gli spazi \mathcal{H}_k sono $O(d)$ -invarianti*

DIMOSTRAZIONE. Basta dimostrarlo per gli spazi \mathcal{A}_k delle armoniche solide e questo segue dal fatto che il laplaciano commuta con le rotazioni (Si veda l'esercizio del Capitolo 1.10.2). \square

Ciascuno degli spazi \mathcal{H}_k ha dimensione finita a_k . Possiamo quindi derterminarne una base ortonormale. Manteniamo un indice tra parentesi in alto per indicare il grado di omogeneità; gli (eventuali) indici in basso indicano gli elementi della base.

Per ogni k , prendiamo $Y_1^{(k)}, \dots, Y_{a_k}^{(k)}$ una base ortonormale di \mathcal{H}_k e ricaviamo una base ortonormale di $L^2(S^{d-1})$, data dall'unione di queste basi. Si verifichi per esercizio che $\cup_{k=0}^{\infty} \{Y_1^{(k)}, \dots, Y_{a_k}^{(k)}\}$ effettivamente è una base ortonormale di $L^2(S^{d-1})$.

2.2. Armoniche sferiche zonali. A questo punto sappiamo che se f è in $L^2(S^{d-1})$ allora esiste un'unica rappresentazione $f = \sum_{k=0}^{\infty} Y^{(k)}$ dove $Y^{(k)}$ è in \mathcal{H}_k e più precisamente $Y^{(k)} = \sum_{j=1}^{a_k} \langle f, Y_j^{(k)} \rangle Y_j^{(k)}$. Vorremmo ora sapere qualcosa in più di questa decomposizione.

Fissata una base ortonormale, allora il proiettore ortogonale Π_k di $L^2(S^{d-1})$ su \mathcal{H}_k è dato da

$$\Pi_k f(\omega) = \sum_{j=1}^{a_k} \langle f, Y_j \rangle Y_j(\omega) = \int_{S^{d-1}} \left(\sum_{j=1}^{a_k} Y_j(\omega) \overline{Y_j(\omega')} \right) f(\omega') d\sigma(\omega') \quad \forall f \in L^2(S^{d-1}), \omega \in S^{d-1},$$

dove, siccome pensiamo k fissato, sopprimiamo (k) in alto.

Poniamo per ogni ω, ω' in S^{d-1}

$$Z_k(\omega, \omega') = \sum_{j=1}^{a_k} Y_j(\omega) \overline{Y_j(\omega')}.$$

In particolare se f è un'armonica in \mathcal{H}_k allora $\Pi_k f = f$ e

$$f(\omega) = \int_{S^{d-1}} Z_k(\omega, \omega') f(\omega') d\sigma(\omega') \quad \forall \omega \in S^{d-1}.$$

LEMMA 2.19. *La funzione Z_k soddisfa le seguenti proprietà:*

- (1) *per ogni ω' fissato, la funzione $\omega \mapsto Z_k^{\omega'}(\omega) = Z_k(\omega, \omega')$ è in \mathcal{H}_k .*
- (2) *Z_k non dipende dalla scelta della base di \mathcal{H}_k .*
- (3) *Z_k è reale e simmetrica.*
- (4) *Per ogni ω, ω' in S^{d-1} e per ogni $g \in O(d)$ si ha $Z_k(g\omega, g\omega') = Z_k(\omega, \omega')$.*
- (5) *Per ogni ω, ω' in S^{d-1} si ha $Z_k(\omega, \omega') = \int_{S^{d-1}} Z_k(\omega, \tau) Z_k(\tau, \omega') d\sigma(\tau)$.*
- (6) *Per ogni ω in S^{d-1} vale $Z_k(\omega, \omega) = \|Z_k^\omega\|_2^2 = \frac{1}{|S^{d-1}|} a_k$.*
- (7) *Per ogni ω, ω' in S^{d-1} si ha $|Z_k(\omega, \omega')| \leq \frac{1}{|S^{d-1}|} a_k$.*

DIMOSTRAZIONE. La (1) è ovvia.

Fissato ω sulla sfera si considera il funzionale lineare definito su \mathcal{H}_k da $Y \mapsto Y(\omega)$. Per il teorema di rappresentazione di Riesz esiste una e una sola funzione $W_\omega \in \mathcal{H}_k$ tale che

$$Y(\omega) = \int_{S^{d-1}} Y(\omega') \overline{W_\omega(\omega')} d\sigma(\omega').$$

Quindi

$$\overline{W_\omega(\omega')} = Z_k(\omega, \omega')$$

e questo mostra la (2).

Per la (3) si noti che si può scegliere una base a elementi reali. Un altro modo per verificare la (3) consiste nel notare che se $f \in \mathcal{H}_k$, allora $\bar{f} \in \mathcal{H}_k$ e quindi per ogni ω sulla sfera

$$\begin{aligned} \bar{f}(\omega) &= \int_{S^{d-1}} \bar{f}(\omega') Z_k(\omega, \omega') d\sigma(\omega') \\ &= \overline{\int_{S^{d-1}} f(\omega') \overline{Z_k(\omega, \omega')} d\sigma(\omega')} \end{aligned}$$

Ovvero

$$f(\omega) = \int_{S^{d-1}} f(\omega') \overline{Z_k(\omega, \omega')} d\sigma(\omega')$$

D'altra parte $f(\cdot) = \int_{S^{d-1}} f(\omega') Z_k(\cdot, \omega') d\sigma(\omega')$ e quindi per l'unicità, $\overline{Z_k} = Z_k$. A questo punto segue banalmente la simmetria:

$$\begin{aligned} Z_k(\omega, \omega') &= \sum_{j=1}^{a_k} Y_j(\omega) \overline{Y_j(\omega')} = \overline{\overline{Z_k(\omega, \omega')}} \\ &= \overline{\sum_{j=1}^{a_k} Y_j(\omega) \overline{Y_j(\omega')}} \\ &= \sum_{j=1}^{a_k} Y_j(\omega') \overline{Y_j(\omega)} \\ &= Z_k(\omega', \omega). \end{aligned}$$

Per la (4), basta notare che $\{Y_j \circ g : j = 1, \dots, a_k\}$ è una base ortonormale perché la misura sulla sfera è invariante per rotazioni. Poiché Z_k non dipende dalla base ortonormale scelta si ha l'uguaglianza richiesta.

La (5) segue dal fatto che $Z_k(\omega, \omega') = Z_k^{\omega'}(\omega) = \Pi_k Z_k^{\omega'}(\omega)$ per ogni ω, ω' in S^{d-1} .

Per ottenere (6) si prenda $\omega = \omega'$ nella (5) e si usi la (3):

$$Z_k(\omega, \omega) = \int_{S^{d-1}} Z_k(\omega, \tau) Z_k(\tau, \omega) d\sigma(\tau) = \int_{S^{d-1}} |Z_k^\omega(\tau)|^2 d\sigma(\tau).$$

Per la proprietà (4), $Z_k(\omega, \omega)$ non dipende da ω , perché è invariante per rotazioni. Quindi anche $\|Z_k^\omega\|_2^2 = \sum_{j=1}^{a_k} |Y_j(\omega)|^2$ non dipende da ω . Allora

$$\begin{aligned} \|Z_k^\omega\|_2^2 &= \frac{1}{|S^{d-1}|} \int_{S^{d-1}} \|Z_k^\tau\|_2^2 d\sigma(\tau) \\ &= \frac{1}{|S^{d-1}|} \sum_{j=1}^{a_k} \int_{S^{d-1}} |Y_j(\tau)|^2 d\sigma(\tau) \\ &= \frac{1}{|S^{d-1}|} a_k. \end{aligned}$$

Infine la (7) segue applicando la disuguaglianza di Schwarz alla (5) e usando la (6):

$$|Z_k(\omega, \omega')| \leq \|Z_k^\omega\|_2 \|Z_k^{\omega'}\|_2.$$

□

DEFINIZIONE 2.4. Sia k fissato in \mathbb{N} e sia ω in S^{d-1} . La funzione Z_k^ω si chiama armonica sferica zonale di grado k con polo in ω .

Spiegheremo poi il significato del termine “zonale”. Ora vediamo l'utilità delle armoniche sferiche zonali.

TEOREMA 2.20. Sia f in $L^2(S^{d-1})$ e per ogni k definiamo la funzione p_k sulla sfera ponendo $p_k(\omega) = \langle f, Z_k^\omega \rangle$ per ogni ω in S^{d-1} . Allora p_k è in \mathcal{H}_k e

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \quad (\text{in senso } L^2).$$

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo già che $f = \sum_k h_k$ dove h_k è in \mathcal{H}_k e la somma converge in $L^2(S^{d-1})$.

Basta quindi descrivere le funzioni h_k . Per l'ortogonalità delle armoniche e la proprietà riprodotte, per ogni ω in S^{d-1}

$$p_k(\omega) = \langle f, Z_k^\omega \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \langle h_m, Z_k^\omega \rangle = \langle h_k, Z_k^\omega \rangle = h_k(\omega) \quad \square$$

ESEMPIO 2.21. Nel caso $d = 2$ è facile scrivere le armoniche sferiche zonali. Infatti, come abbiamo notato, una base di $\mathcal{H}_k \circ c$ è data da $\{e^{ik\theta}, e^{-ik\theta}\}$. Quindi

$$Z_k(c^{-1}(e^{i\theta}), c^{-1}(e^{i\phi})) = e^{ik\theta} e^{-ik\phi} + e^{-ik\theta} e^{ik\phi} = 2 \cos(\theta - \phi).$$

DEFINIZIONE 2.5. Sia ω in S^{d-1} . Una funzione f sulla sfera si dice zonale con polo ω se $f \circ g = f$ per ogni $g \in O(d)$ tale che $g\omega = \omega$.

ESEMPIO 2.22. In \mathbb{R}^2 fissiamo $\omega = (1, 0)$. Allora $g\omega = \omega$ se e solo se $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ ovvero, nella notazione complessa, se e solo se $c^{-1}gc$ è l'identità oppure il coniugio. Quindi una funzione f sulla sfera è zonale se e solo se $h(\theta) = f \circ c(e^{i\theta}) = f \circ c(e^{-i\theta}) = h(-\theta)$, ovvero se e solo se h è pari.

ESEMPIO 2.23. In \mathbb{R}^3 fissiamo $\omega = (1, 0, 0)$. Allora $g\omega = \omega$ se e solo se $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}$ e

la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ è una matrice di $O(2)$. Il gruppo $O(2)$ agisce transitivamente su ogni parallelo $S_a = \{\omega' \in S : \omega'_1 = a\}$ dove $a \in [-1, 1]$. Quindi f è zonale con polo $(1, 0, 0)$ se e solo se f è costante sui paralleli ad esso ortogonali, ovvero se e solo se dipende solo dalla coordinata ω'_1 .

ESEMPIO 2.24. Nel caso di dimensione generale, fissiamo $\omega = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Allora $ge_1 = e_1$ se e solo se

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & g' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

e la matrice g' è in $O(d-1)$. Il gruppo $O(d-1)$ agisce transitivamente su ogni parallelo $S_a = \{\omega' \in S^{d-1} : \omega'_1 = a\}$ dove $a \in [-1, 1]$. Quindi f è zonale con polo e_1 se e solo se f è costante sui paralleli ad esso ortogonali, ovvero se e solo se dipende solo dalla coordinata ω'_1 .

Più in generale, fissato un punto ω sulla sfera, un parallelo ortogonale a ω è l'intersezione della sfera con un iperpiano (affine) con normale ω . In formule è un insieme della forma

$$\{\omega' \in S^{d-1} : \omega' \cdot \omega = a\}$$

dove a è una costante compresa tra $[-1, 1]$. Indicheremo con $O(d)_\omega$ lo stabilizzatore di ω in $O(d)$. In formule

$$O(d)_\omega = \{g \in O(d) : g\omega = \omega\}.$$

Il gruppo $O(d)_\omega$ agisce in maniera transitiva sui paralleli ortogonali a ω . Quindi l'armonica sferica zonale con polo in ω è costante su questi paralleli, perché

$$Z_k^\omega(g\omega') = Z_k^\omega(\omega') \quad \forall \omega' \in S^{d-1}, \quad \forall g \in O(d)_\omega.$$

Mostriamo ora l'unicità rispetto a questa proprietà. Premettiamo un lemma.

LEMMA 2.25. *Sia p un polinomio in \mathbb{R}^d invariante per rotazioni. Allora esiste un polinomio q di una sola variabile tale che*

$$p(x) = q(|x|^2) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

DIMOSTRAZIONE. Si scriva il polinomio come somma dei suoi termini omogenei

$$p(x) = \sum_{\ell=0}^r p_\ell(x) \quad p_\ell \in \mathcal{P}_\ell.$$

Si ha per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni rotazione R

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^r \varepsilon^\ell p_\ell(x) &= \sum_{\ell=0}^r p_\ell(\varepsilon x) \\ &= p(\varepsilon x) \\ &= p(\varepsilon Rx) \\ &= \sum_{\ell=0}^r p_\ell(\varepsilon Rx) \\ &= \sum_{\ell=0}^r \varepsilon^\ell p_\ell(Rx). \end{aligned}$$

Allora come polinomi in ε le identità precedenti dicono che $p_\ell(x) = p_\ell(Rx)$, per ogni rotazione R , ovvero che tutte le componenti omogenee sono invarianti per rotazioni.

Ma allora la funzione $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \mapsto |x|^{-\ell} p_\ell(x)$ è omogenea di grado zero e invariante sotto l'azione di $O(d)$, quindi è costante. Sia $c_\ell = |x|^{-\ell} p_\ell(x)$.

Ne segue che $p_\ell(x) = c_\ell |x|^\ell$. Questa funzione è un polinomio solo quando ℓ è pari. Abbiamo quindi ottenuto che

$$p(x) = \sum_{\ell=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} c_{2\ell} |x|^{2\ell} = q(|x|^2)$$

dove $q(t) = \sum_{\ell=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} c_{2\ell} t^\ell$. □

TEOREMA 2.26. *Sia $\omega \in S^{d-1}$. Un'armonica Y in \mathcal{H}_k è costante sui paralleli di S^{d-1} ortogonali a ω se e solo se esiste una costante c tale che $Y = c Z_k^\omega$.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già detto che le funzioni armoniche sferiche zonali Z_k^ω di grado k sono in particolare in \mathcal{H}_k e inoltre sono costanti sui paralleli ortogonali a ω .

Viceversa, supponiamo che Y sia un'armonica in \mathcal{H}_k costante sui paralleli di S^{d-1} ortogonali a ω . Dobbiamo verificare che Y è un multiplo di Z_k^ω . Siccome il gruppo delle rotazioni agisce transitivamente sulla sfera e sia Y sia Z_k^ω hanno la stessa proprietà di invarianza rispetto alle rotazioni, è sufficiente controllare questo fatto nel caso in cui $\omega = e_1$. Infatti, esiste una rotazione \bar{g} tale che $\bar{g}e_1 = \bar{g}(1, 0, \dots, 0) = \omega$. Allora l'armonica sferica W tale che $W(\omega') = Y(\bar{g}\omega')$ è ortogonale sui paralleli ortogonali a e_1 . Se avessimo già dimostrato che W è un multiplo costante di $Z_k^{e_1}$, allora potremmo concludere che

$$\begin{aligned} Y(\omega') &= W(\bar{g}^{-1}\omega') \\ &= c Z_k^{e_1}(\bar{g}^{-1}\omega') \\ &= c Z_k^{\bar{g}^{-1}\omega}(\bar{g}^{-1}\omega') \\ &= c Z_k^\omega(\omega') \end{aligned}$$

ovvero la tesi per ω generico.

Supponiamo quindi ora che Y sia un'armonica in \mathcal{H}_k costante sui paralleli di S^{d-1} ortogonali a e_1 e dimostriamo che Y è un multiplo costante di $Z_k^{e_1}$.

Siccome il caso $k = 0$ è banale ($a_k = 1$ e c'è “una sola” armonica, quella costante), supponiamo anche che $k > 0$. Consideriamo il polinomio p definito da $p(x) = |x|^k Y(x/|x|)$ e $p(0) = 0$, ovvero prendiamo p l'armonica sferica solida di grado $k > 0$ associata a Y . Indichiamo i punti di \mathbb{R}^d come $x = (x_1, x')$ con $x' = (x_2, \dots, x_d)$ in \mathbb{R}^{d-1} . Se g è in $O(d)_{e_1}$, allora

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & g' & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

con g' in $O(d-1)$ e sappiamo che $p(gx) = p(x)$ per ogni x in \mathbb{R}^d , ovvero

$$p(x_1, g'x') = p(x_1, x') \quad \forall g' \in O(d-1).$$

Segue dal Lemma 2.25 che $p(x_1, x')$ è un polinomio in x_1 e $|x'|^2$. Più precisamente, siccome p è omogeneo di grado k , possiamo scriverlo ordinandolo secondo le potenze di x_1 per opportuni polinomi p_j omogenei di grado j :

$$p(x) = \sum_{j=0}^k x_1^{k-j} p_j(x')$$

e i p_j sono invarianti per l'azione delle rotazioni di $O(d-1)$. Quindi $p_j(x') = 0$ se j è dispari e $p_j(x') = c_j |x'|^j$ se j è pari, ovvero

$$p(x) = c_0 x_1^k + c_2 x_1^{k-2} |x'|^2 + \cdots + c_{2\ell} x_1^{k-2\ell} |x'|^{2\ell}.$$

Siccome p è un'armonica solida, $\Delta p = 0$. Un calcolo esplicito (da fare per esercizio) mostra che

$$\begin{aligned} \Delta(|x'|^{2j} x_1^{k-2j}) &= 2j(d+2j-3)|x'|^{2j-2} x_1^{k-2j} + (k-2j)(k-2j-1)|x'|^{2j} x_1^{k-2j-2} \\ &= \gamma_j |x'|^{2j-2} x_1^{k-2j} + \delta_j |x'|^{2j} x_1^{k-2j-2} \end{aligned}$$

con $\gamma_0 = 0$ e $\gamma_j \neq 0$ per $j \geq 1$. Ma allora la condizione (completare i dettagli per esercizio)

$$0 = \Delta P = (c_0 \delta_0 + c_1 \gamma_1) x_1^{k-2} + (c_1 \delta_1 + c_2 \gamma_2) |x'|^2 x_1^{k-4} + \cdots$$

implica che

$$c_1 = -\frac{\delta_0}{\gamma_1} c_0, \quad c_2 = -\frac{\delta_1}{\gamma_2} c_1, \dots$$

ovvero i coefficienti c_j risultano essere determinati univocamente dalla scelta di c_0 e ad esso proporzionali. Perciò il polinomio p è univocamente determinato da c_0 . \square

COROLLARIO 2.27. *Supponiamo che $F(\omega, \omega')$ sia definita su $S^{d-1} \times S^{d-1}$ e soddisfi:*

- i) *per ogni ω in S^{d-1} fissato, $F(\omega, \cdot)$ è un'armonica sferica di grado k .*
- ii) *se g è una rotazione in $O(d)$, allora $F(g\omega, g\omega') = F(\omega, \omega')$ per ogni ω, ω' in S^{d-1} .*

Allora esiste una costante c tale che $F = c Z_k$.

DIMOSTRAZIONE. Si noti che se g è una rotazione in $O(d)_\omega$, allora

$$F(\omega, g\omega') = F(g\omega, g\omega') = F(\omega, \omega').$$

Quindi $F(\omega, \cdot)$ è un'armonica sferica di grado k costante sui paralleli ortogonali a ω .

Allora esiste una costante, che dipende da ω , tale che

$$F(\omega, \omega') = c(\omega) Z_k(\omega, \omega').$$

Dimostriamo che tale dipendenza non c'è. Sia \tilde{g} una rotazione tale che $\tilde{g}\omega = \eta$, con $\eta \neq \omega$. Allora

$$\begin{aligned} c(\eta) Z_k(\eta, \eta) &= F(\eta, \eta) \\ &= F(\tilde{g}\omega, \tilde{g}\omega) \\ &= F(\omega, \omega) \\ &= c(\omega) Z_k(\omega, \omega) \end{aligned}$$

Quindi, siccome $Z_k(\eta, \eta) = Z_k(\omega, \omega) \neq 0$, $c(\eta) = c(\omega)$, ovvero c è costante. \square

2.3. Polinomi di Gegenbauer. Per z complesso nel disco aperto $0 \leq |z| < 1$ e t reale $-1 \leq t \leq 1$ consideriamo il polinomio $z^2 - 2tz + 1$. Tale polinomio non si annulla sul disco e quindi la funzione, dipendente da $\lambda > 0$,

$$z \mapsto \frac{1}{(z^2 - 2tz + 1)^\lambda}$$

è olomorfa nel disco. Allora essa ammette uno sviluppo di Taylor

$$\frac{1}{(z^2 - 2tz + 1)^\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^\lambda(t) z^k.$$

DEFINIZIONE 2.6. Il coefficiente P_k^λ è detto il polinomio di Gegenbauer (o anche polinomio ultrasferico) di grado k associato al parametro λ .

Verificheremo alcune proprietà, fra cui quella di essere proprio un polinomio, che non è immediata dalla definizione.

PROPOSIZIONE 2.28. *Valgono*

- (1) $P_0^\lambda(t) = 1$
- (2) se $k \geq 1$, $\frac{d}{dt} P_k^\lambda(t) = 2\lambda P_{k-1}^{\lambda+1}(t)$
- (3) $\frac{d}{dt} P_1^\lambda(t) = 2\lambda P_0^{\lambda+1}(t) = 2\lambda$
- (4) P_k^λ è un polinomio di grado k
- (5) i monomi $1, t, t^2, \dots$ sono combinazioni lineari finite dei $P_0^\lambda, P_1^\lambda, \dots$
- (6) le combinazioni lineari finite dei P_k^λ sono dense in $C([-1, 1])$
- (7) $P_k^\lambda(-t) = (-1)^k P_k^\lambda(t)$, cioè P ha la stessa parità di k .

DIMOSTRAZIONE. Diamo un cenno di come si possano verificare queste proprietà. La verifica è lasciata per esercizio.

La 1) è facile.

Per la 2), si noti che, per la formula integrale di Cauchy,

$$P_k^\lambda(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z^{k+1} (z^2 - 2tz + 1)^\lambda} dz$$

dove C è una curva che allaccia l'origine e contenuta nel disco unitario.

La 3) segue da 2) e 1).

La 4): la 3) implica che P_1^λ è un polinomio di grado uno in t ; usando la 2) segue la 4) per induzione.

La 5) si verifica per induzione e la 6) per la densità dei polinomi in $C([-1, 1])$, che segue dal Teorema di Stone–Weierstass.

Per la 7) si uguagliamo gli sviluppi di

$$\frac{1}{(z^2 - 2(-t)z + 1)^\lambda} = \frac{1}{((-z)^2 - 2t(-z) + 1)^\lambda}.$$

□

TEOREMA 2.29. Sia $d > 2$ e $\lambda = \frac{d-2}{2}$. Allora esiste una costante $c_{k,d}$ tale che

$$Z_k(\omega, \omega') = c_{k,d} P_k^\lambda(\omega \cdot \omega') \quad \forall \omega, \omega' \in S^{d-1}.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta controllare che valgono le ipotesi del Corollario 2.27. Definiamo la funzione F_k su $S^{d-1} \times S^{d-1}$ mediante

$$F_k(\omega, \omega') = P_k^\lambda(\omega \cdot \omega') \quad \forall \omega, \omega' \in S^{d-1}$$

e verifichiamo che $F_k(\omega, \cdot)$ è armonica sferica di grado k . Che sia invariante per rotazioni è ovvio, perché dipende dal prodotto scalare.

La dimostrazione consiste quindi nel verificare che $F_k(\omega, \cdot)$ è la restrizione alla sfera di un polinomio omogeneo di grado k e armonico.

Per in x in \mathbb{R}^d definiamo $\tilde{F}_k(x) = |x|^k F_k(\omega, x/|x|) = |x|^k P_k^\lambda(\omega \cdot x/|x|)$.

Allora per le 4) e 7) si ha nel caso $k = 2m$ pari

$$\tilde{F}_k(x) = |x|^k P_k^\lambda(\omega \cdot x/|x|) = \sum_{j=0}^m \alpha_j |x|^{2m} (\omega \cdot x/|x|)^{2j} = \sum_{j=0}^m \alpha_j |x|^{2m-2j} (\omega \cdot x)^{2j}$$

nel caso $k = 2m + 1$ dispari

$$\tilde{F}_k(x) = |x|^k P_k^\lambda(\omega \cdot x/|x|) = \sum_{j=0}^m \beta_j |x|^{2m+1} (\omega \cdot x/|x|)^{2j+1} = \sum_{j=0}^m \beta_j |x|^{2m-2j} (\omega \cdot x)^{2j+1}$$

in entrambi i casi si tratta di un polinomio in x , omogeneo di grado k .

Ora ci chiediamo se \tilde{F}_k è armonico. Siccome \tilde{F}_k è un polinomio omogeneo di grado k , $\Delta \tilde{F}_k$ è ancora un polinomio (di grado $k - 2$). In particolare, $\Delta \tilde{F}_k$ è una funzione analitica su \mathbb{R}^d , quindi se $\Delta \tilde{F}_k(x) = 0$ per ogni x in una certa regione non vuota (con un punto di accumulazione), allora $\Delta \tilde{F}_k(x) = 0$ per ogni x in \mathbb{R}^d .

Ci basta quindi verificare l'armonicità in una qualche regione non vuota.

Non è difficile verificare (lo avete visto a equazioni differenziali) che la funzione $x \mapsto |x - x_0|^{2-d}$ è armonica in $\mathbb{R}^d \setminus \{x_0\}$. In particolare, per ogni scelta di $c, s \neq 0$, una funzione della forma

$$c |x - \omega/s|^{-(d-2)} = c (|x|^2 - 2x \cdot \omega/s + 1/s^2)^{-\lambda} = c s^{2\lambda} (1 - 2sx \cdot \omega + s^2|x|^2)^{-\lambda}$$

è armonica in $\{x : 0 < |x| < 1/s\} \subset \mathbb{R}^d \setminus \{\omega/s\}$. Prendiamo $c = s^{-2\lambda}$ e, siccome $s|x| < 1$, scriviamo la funzione generatrice utilizzando i polinomi di Gegenbauer

$$\begin{aligned} c|x - \omega/s|^{-(d-2)} &= \left(1 - 2(s|x|)\frac{x}{|x|} \cdot \omega + (s|x|)^2\right)^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k^\lambda \left(\frac{x}{|x|} \cdot \omega\right) (s|x|)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(|x|^k P_k^\lambda \left(\frac{x}{|x|} \cdot \omega\right)\right) s^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{F}_k(x) s^k \end{aligned}$$

Siccome il primo membro è armonico, esso soddisfa la proprietà del valor medio su ogni sfera di raggio r , contenuta in $\Omega_s = \{y : 0 < |y| < 1/s\}$, ovvero per ogni x in $\{y : 0 < |y| < 1/s\}$ e $r < \text{dist}(x, \text{fr}\Omega_s) = \min(1/s - |x|, |x|)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{F}_k(x) s^k &= \frac{1}{|S(x, r)|} \int_{S(x, r)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{F}_k(y) s^k\right) d\sigma_r(y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{|S(x, r)|} \int_{S(x, r)} \tilde{F}_k(y) d\sigma_r(y)\right) s^k, \end{aligned}$$

dove abbiamo potuto scambiare la serie con l'operazione di media per convergenza uniforme. Per il principio di identità delle serie di potenze, ricaviamo che i coefficienti \tilde{F}_k devono soddisfare la proprietà della media. Per l'inverso del Teorema della media le \tilde{F}_k sono armoniche. \square

OSSERVAZIONE 2.30. Il valore della costante si può calcolare notando che

$$a_k/|S^{d-1}| = Z_k(\omega, \omega) = c_{k,d} P_k^\lambda(\omega \cdot \omega) = c_{k,d} P_k^\lambda(1).$$

Inoltre $P_k^\lambda(1) = \binom{k+2\lambda-1}{k}$. Infatti, $P_k^\lambda(1)$ è il coefficiente di z^k nello sviluppo di Taylor di $z \mapsto ((z-1)^2)^{-\lambda}$, quindi

$$\begin{aligned} P_k^\lambda(1) &= \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k}{dz^k} \right|_{z=0} (z-1)^{-2\lambda} \\ &= \frac{1}{k!} (-2\lambda)(-2\lambda-1) \cdots (-2\lambda-k+1) (z-1)^{-2\lambda-k} \Big|_{z=0} \\ &= \frac{1}{k!} (2\lambda)(2\lambda+1) \cdots (2\lambda+k-1). \end{aligned}$$

2.4. Minimalità della decomposizione. Abbiamo visto che gli spazi \mathcal{H}_k sono invarianti rispetto all'azione del gruppo delle rotazioni $O(d)$. Ci possiamo domandare se esistano dei sottospazi più piccoli ancora invarianti. In questa sezione vediamo che la risposta è negativa.

Sia \mathcal{V} un sottospazio di \mathcal{H}_k . Con \mathcal{V}^\perp indichiamo l'ortogonale del sottospazio \mathcal{V} dentro \mathcal{H}_k rispetto al prodotto interno di $L^2(S^{d-1})$, in modo che

$$\mathcal{H}_k = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^\perp.$$

Ricordiamo che \mathcal{H}_k ha dimensione finita, quindi tutti i sottospazi che qui consideriamo sono sottospazi chiusi di $L^2(S^{d-1})$.

LEMMA 2.31. *Sia \mathcal{V} un sottospazio di \mathcal{H}_k , invariante per l'azione delle rotazioni. Allora anche \mathcal{V}^\perp è invariante per l'azione delle rotazioni.*

DIMOSTRAZIONE. Sia Y in \mathcal{V}^\perp . Desideriamo verificare che $Y \circ g$ è ancora in \mathcal{V}^\perp per ogni g in $O(d)$. Questo segue facilmente dal fatto che la misura sulla sfera è invariante per rotazioni e che \mathcal{V} lo è. In formule, per ogni Z in \mathcal{V} si ha

$$\begin{aligned} \langle Y \circ g, Z \rangle &= \int_{S^{d-1}} Y(g\omega) \overline{Z(\omega)} d\sigma(\omega) \\ &= \int_{S^{d-1}} Y(\omega) \overline{Z(g^{-1}\omega)} d\sigma(\omega) \\ &= \langle Y, Z \circ g^{-1} \rangle = 0 \end{aligned} \quad \square$$

LEMMA 2.32. *Sia \mathcal{V} un sottospazio non banale di \mathcal{H}_k , invariante per rotazioni. Allora la funzione zonale $Z_k^{e_1}$ è in \mathcal{V} .*

DIMOSTRAZIONE. Sia Y una funzione non nulla in \mathcal{V} , ossia $Y(\omega) \neq 0$ per almeno un ω in S^{d-1} .

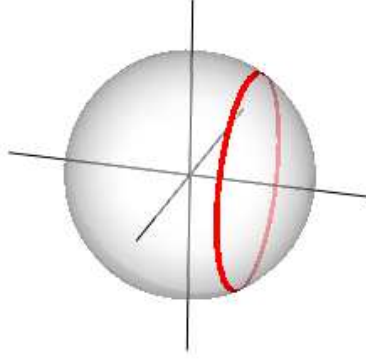
Siccome il gruppo ortogonale agisce in maniera transitiva sulla sfera, esiste una rotazione g tale che $g\omega = e_1$. Poiché \mathcal{V} è invariante per rotazioni, la funzione $\varphi = Y \circ g$ è ancora in \mathcal{V} e $\varphi(e_1) \neq 0$.

Ora consideriamo la funzione φ^{e_1} , che otteniamo mediando i valori di φ sui paralleli ortogonali a e_1 , ossia il valore di tale funzione in un punto $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_d)$ si calcola mediando i valori di φ sull'insieme $\mathcal{S}_\omega = \{(\omega'_1, \dots, \omega'_d) \in S^{d-1} : \omega'_1 = \omega_1\}$, che è una sfera di dimensione $d-2$ e raggio $\sqrt{1-\omega_1^2}$:

$$\varphi^{e_1}(\omega_1, \dots, \omega_d) = \int_{\mathcal{S}_\omega} \varphi(\omega'_1, \dots, \omega'_d) d\sigma(\omega')$$

È facile verificare che φ^{e_1} è zonale con polo e_1 e $\varphi^{e_1}(e_1) = \varphi(e_1) \neq 0$.

Siccome φ^{e_1} è in \mathcal{H}_k , allora è un multiplo costante di $Z_k^{e_1}$. D'altra parte, φ^{e_1} è in \mathcal{V} , perché è stata ottenuta mediando funzioni che sono tutte in \mathcal{V} (l'integrale è un limite di somme di Cauchy e il sottospazio \mathcal{V} è chiuso).



Vediamo in dettaglio la situazione per la sfera S^2 in \mathbb{R}^3 . Fissato un punto $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ su S^2 , parametrizziamo il parallelo \mathcal{S}_ω mediante

$$\theta \in [0, 2\pi) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

e quindi, fissata una partizione $0 = \theta_0 < \dots < \theta_n = 2\pi$,

$$\begin{aligned} \varphi^{e_1}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\omega_1, \omega_2 \cos \theta - \omega_3 \sin \theta, \omega_2 \sin \theta + \omega_3 \cos \theta) d\theta \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\omega_1, \omega_2 \cos \theta_k - \omega_3 \sin \theta_k, \omega_2 \sin \theta_k + \omega_3 \cos \theta_k) \frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{2\pi} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(R_{\theta_k}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)) \frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{2\pi}. \end{aligned}$$

Si noti che il limite è uniforme, che tutte le norme su \mathcal{V} sono equivalenti e che le funzioni $\varphi(R_{\theta_k} \cdot)$ sono in \mathcal{V} , perché \mathcal{V} è invariante per rotazioni. \square

TEOREMA 2.33. *Sia \mathcal{V} un sottospazio di \mathcal{H}_k , invariante per rotazioni. Allora \mathcal{V} è $\{0\}$ oppure $\mathcal{V} = \mathcal{H}_k$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\mathcal{V} \neq \{0\}$ e mostriamo che allora $\mathcal{V} = \mathcal{H}_k$. Decomponiamo

$$\mathcal{H}_k = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^\perp.$$

Per il Lemma 2.31, sia \mathcal{V} sia \mathcal{V}^\perp sono invarianti per rotazioni. Allora, per il Lemma 2.32, $Z_k^{e_1}$ è in \mathcal{V} . Se fosse $\mathcal{V}^\perp \neq \{0\}$, allora sempre per il Lemma 2.32, $Z_k^{e_1}$ sarebbe anche in \mathcal{V}^\perp , il che è assurdo. Allora $\mathcal{V}^\perp = \{0\}$ e quindi $\mathcal{V} = \mathcal{H}_k$. \square

2.5. Decomposizione di $L^2(\mathbb{R}^d)$. Ottenuta la decomposizione a livello della sfera, possiamo ripetere quanto visto nel caso bidimensionale per decomporre $L^2(\mathbb{R}^d)$ in sottospazi invarianti per le rotazioni e per la trasformata di Fourier.

Poniamo

$$\mathcal{D}_k = \text{span} \{x \mapsto g(x) = f(x)P(x) : f \text{ radiale}, P \in \mathcal{A}_k, fP \in L^2(\mathbb{R}^d)\}.$$

Se $\{Y_1, \dots, Y_{a_k}\}$ è una base ortonormale di \mathcal{H}_k e g è in \mathcal{D}_k , allora si ha

$$g(x) = \sum_{j=1}^{a_k} f^j(|x|) |x|^k Y_j(x/|x|),$$

per opportune funzioni f^j di variabile reale. Per l'ortonormalità della base scelta, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^2 dx &= \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} \left| \sum_{j=1}^{a_k} f^j(r) r^k Y_j(\omega) \right|^2 d\sigma(\omega) r^{d-1} dr \\ &= \sum_{j=1}^{a_k} \int_0^\infty |f^j(r)|^2 r^{2k+d-1} dr, \end{aligned}$$

ovvero g è in $L^2(\mathbb{R}^d)$ se e solo se le funzioni f^j sono in $L^2([0, \infty), r^{2k+d-1} dr)$ per ogni $j = 1, \dots, a_k$.

Notiamo che \mathcal{D}_k è un sottospazio chiuso di $L^2(\mathbb{R}^d)$. Infatti se $(g_n)_n$ è una successione di elementi di \mathcal{D}_k convergente in $L^2(\mathbb{R}^d)$ a una funzione g , allora

$$g_n(x) = \sum_{j=1}^{a_k} f_n^j(|x|) |x|^k Y_j(x/|x|)$$

e le successioni $(f_n^j)_n$ sono di Cauchy, quindi convergenti, in $L^2([0, \infty), r^{2k+d-1} dr)$ per ogni $j = 1, \dots, a_k$.

Ne segue che esistono funzioni h^j in $L^2([0, \infty), r^{2k+d-1} dr)$ tali che $\|f_n^j - h^j\|_{L^2([0, \infty), r^{2k+d-1} dr)} \rightarrow 0$ per ogni $j = 1, \dots, a_k$.

Definiamo h ponendo $h(x) = \sum_{j=1}^{a_k} h^j(|x|) |x|^k Y_j(x/|x|)$ per x in $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ e osserviamo che h è in \mathcal{D}_k e $\|g_n - h\|_2 \rightarrow 0$.

Ma allora $h = g$ quasi ovunque, quindi g è in \mathcal{D}_k .

TEOREMA 2.34. *Vale la decomposizione in somma diretta ortogonale $L^2(\mathbb{R}^d) = \oplus \mathcal{D}_k$. Inoltre gli spazi \mathcal{D}_k sono invarianti per l'azione del gruppo ortogonale e la trasformata di Fourier porta ciascun \mathcal{D}_k in sé.*

DIMOSTRAZIONE. L'unica novità rispetto al caso bidimensionale è il comportamento rispetto alla trasformata di Fourier. Proviamo che se g è in $L^1 \cap \mathcal{D}_k$ allora anche \hat{g} è in \mathcal{D}_k .

Poi si ragiona per linearità e densità. Si noti che \hat{g} è in L^2 , quindi, se $\hat{g} = \tilde{f}\tilde{P}$, allora $\tilde{f}\tilde{P}$ sarà ovviamente in L^2 .

Supponiamo quindi che g sia della forma

$$g(x) = f(x) P(x) = |x|^k f_0(|x|) Y(x/|x|).$$

Se ξ è in \mathbb{R}^d , scriviamo $\xi = \rho\omega'$ con $\rho \geq 0$ e ω' in S^{d-1} . Si ha

$$\hat{g}(\xi) = \hat{g}(\rho\omega') = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \cdot \xi} g(x) dx = \int_0^\infty f_0(r) r^{k+d-1} \int_{S^{d-1}} e^{-2\pi i r \rho \omega \cdot \omega'} Y(\omega) d\sigma(\omega) dr$$

Mostriamo che esiste una funzione φ definita sul semiasse positivo tale che

$$(2.1) \quad \int_{S^{d-1}} e^{-2\pi i r \rho \omega \cdot \omega'} Y(\omega) d\sigma(\omega) = \varphi(r\rho) Y(\omega')$$

per ogni $r, \rho > 0$ e ogni ω' sulla sfera. Dalla (2.1) la tesi segue facilmente. Verifichiamo quindi la (2.1), utilizzando le armoniche sferiche zonali e la loro proprietà riprodotte. Si ha

$$\begin{aligned} \int_{S^{d-1}} e^{-2\pi i r \rho \omega \cdot \omega'} Y(\omega) d\sigma(\omega) &= \int_{S^{d-1}} e^{-2\pi i r \rho \omega \cdot \omega'} \int_{S^{d-1}} Y(\omega'') Z_k(\omega, \omega'') d\sigma(\omega'') d\sigma(\omega) \\ &= \int_{S^{d-1}} Y(\omega'') \left(\int_{S^{d-1}} e^{-2\pi i r \rho \omega \cdot \omega'} Z_k(\omega'', \omega) d\sigma(\omega) \right) d\sigma(\omega'') \end{aligned}$$

Ma, per ogni $s = r\rho$ fissato, la funzione dentro le parentesi tonde è una funzione su $S^{d-1} \times S^{d-1}$ del tipo $(\omega, \omega') \mapsto F_s(\omega', \omega'')$.

È semplice verificare che F_s è invariante per le rotazioni, utilizzando l'invarianza per rotazioni della misura sulla sfera e quella delle armoniche sferiche zonali: per ogni g in $O(d)$

$$\begin{aligned} F_s(g\omega', g\omega'') &= \int_{S^{d-1}} e^{-2\pi i r \rho \omega \cdot g\omega'} Z_k(g\omega'', \omega) d\sigma(\omega) \\ &= \int_{S^{d-1}} e^{-2\pi i r \rho \omega \cdot \omega'} Z_k(g\omega'', \omega) d\sigma(\omega) \\ &= \int_{S^{d-1}} e^{-2\pi i r \rho \eta \cdot \omega'} Z_k(g\omega'', g\eta) d\sigma(\eta) \\ &= \int_{S^{d-1}} e^{-2\pi i r \rho \eta \cdot \omega'} Z_k(\omega'', \eta) d\sigma(\eta) = F_s(\omega', \omega''). \end{aligned}$$

Inoltre per ogni ω' fissato, $F_s(\omega', \cdot)$ è in $L^2(S^{d-1})$ perché limitata e è facile vedere che $F_s(\omega', \cdot)$ è ortogonale a tutti gli spazi \mathcal{H}_j con $j \neq k$. Siccome vale la decomposizione $L^2(S^{d-1}) = \bigoplus \mathcal{H}_j$, allora $F_s(\omega', \cdot)$ è in \mathcal{H}_k .

Allora esiste una costante dipendente da s , che chiamiamo $\varphi(s)$ tale che $F_s(\omega', \omega'') = \varphi(s) Z_k(\omega', \omega'')$. Per ottenere la (2.1), usiamo di nuovo la proprietà riprodotte:

$$\begin{aligned} \int_{S^{d-1}} e^{-2\pi i s \omega \cdot \omega'} Y(\omega) d\sigma(\omega) &= \int_{S^{d-1}} Y(\omega'') F_s(\omega', \omega'') d\sigma(\omega'') \\ &= \varphi(s) \int_{S^{d-1}} Y(\omega'') Z_k(\omega', \omega'') d\sigma(\omega'') \\ &= \varphi(s) Y(\omega'). \end{aligned} \quad \square$$

Si potrebbe anche dimostrare che sotto l'azione della trasformata di Fourier la parte radiale f_0 viene trasformata di nuovo tramite funzioni di Bessel, dipendenti dalla dimensione e dal grado di omogeneità dell'armonica sferica.

3. Esercizi

3.1. Verificare che se x^α e x^β sono monomi, allora

$$\langle\langle x^\alpha, x^\beta \rangle\rangle = \delta_{\alpha,\beta} \alpha!$$

Si verifichi che la formula

$$\langle\langle P, Q \rangle\rangle = P(\partial)\bar{Q}(0) \quad \forall P, Q \in \mathcal{P}$$

definisce un prodotto scalare sullo spazio dei polinomi. Si noti anche che se i polinomi sono omogenei dello stesso grado, allora $\langle\langle P, Q \rangle\rangle = P(\partial)\bar{Q}$.

3.2. Verificare che la funzione $f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 15\omega_1 - 70\omega_1^3 + 63\omega_1^5$ è la restrizione alla sfera S^2 di un polinomio omogeneo e armonico di grado 5.

3.3. Sia $p(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$. Scrivere il polinomio p come somma di armoniche sferiche.

3.4. Verificare che i polinomi $P_k^{d-2/2}$, $k = 0, 1, \dots$ sono a due a due ortogonali rispetto al prodotto

$$(f, g) = \int_{[-1,1]} f(t)\overline{g(t)} (1-t^2)^{(d-3)/2} dt$$

Si pensi al prodotto di due armoniche zonali sulla sfera, polo $(1, 0, \dots)$; si integri dapprima sui paralleli $\{\omega : \omega_1 = \cos \theta\}$ ortogonali al polo con $\theta \in [0, \pi]$. Qual è la misura del parallelo? Si deduca che i polinomi di Gegenbauer formano una base per $L^2([-1, 1], (1-t^2)^{(d-3)/2} dt)$. (Fare almeno il caso $d = 3$).

CAPITOLO 3

Wavelet

Per semplicità, ci limitiamo al caso unidimensionale; un cenno alle problematiche nel caso di dimensione maggiore saranno fatte alla fine del corso.

Pensiamo di voler effettuare la trasformata di Fourier di un brano musicale; questo può essere pensato come una certa funzione del tempo f . Per descrivere le frequenze contenute nel brano musicale, non si può agire in tempo reale (o quasi) ma occorre prima ascoltare tutto il brano e a questo punto, nota tutta la funzione f , possiamo calcolarne la trasformata. Questo è abbastanza scomodo. Oltretutto, data una frequenza ξ , il valore $\hat{f}(\xi)$ contiene l'ampiezza totale della frequenza ξ relativa a tutto il brano musicale. Il nostro orecchio è in grado di fare di meglio, nel senso che è in grado di capire cambiamenti sia continui sia improvvisi dei toni. Ascoltiamo per esempio una chirp lineare, ovvero il suono prodotto da $t \mapsto \sin(t^2)$, una funzione che oscilla sempre più rapidamente (*chirp* letteralmente vuol dire cinguettio, è un termine che proviene dallo studio dei segnali radar). Il nostro orecchio percepisce questo cambio (continuo) di frequenza.

Per descrivere segnali periodici, ovvero quando si ascolta una nota, le serie di Fourier sono lo strumento più adatto, perché è sufficiente ascoltare il suono solo su un periodo.

Tuttavia, siccome gli esponenziali non sono funzioni ben localizzate, le serie di Fourier e la trasformata di Fourier non sono un buono strumento per descrivere funzioni vicine alla δ di Dirac o comunque con supporto piccolo, in modo da approssimare un "impulso" o un improvviso cambio di frequenza. Queste funzioni compaiono frequentemente nelle applicazioni e si approssimano con moltissimi coefficienti di Fourier (al limite, la trasformata della δ è la funzione identicamente 1), quindi sono molto scomode da guardare in frequenza.

Vi è quindi un problema nell'analisi (nell'effettuare la trasformata) e nella sintesi (nell'inversione: non si leggono facilmente dalla trasformata improvvisi cambi di frequenza nel tempo ovvero, nell'esempio del brano musicale, un improvviso cambio di note).

Una prima soluzione a questi problemi è stata proposta da Gabor e è la WFT (Windowed Fourier Transform, nota anche con il nome STFT Short Time Fourier Transform) che avete studiato nel corso di Analisi di Fourier. Nella prossima sezione richiamiamo brevemente la WFT, per confronto futuro.

1. La WFT o STFT

Torniamo al modello dell'orecchio (anche se non è fisiologicamente corretto) e pensiamo al brano musicale f in funzione del tempo. Il nostro orecchio è in grado di analizzare f in tempo reale sia in tempo sia in frequenza. Quindi il nostro orecchio è in grado di generare una funzione $Gf(\omega, t)$, che descriva le frequenze ω udite al tempo t . Ovviamente, in questa modellizzazione devono intervenire solo i valori di f a tempi minori di t (quello che non abbiamo ancora ascoltato non importa) e inoltre è ragionevole supporre che l'orecchio abbia memoria finita, ovvero l'orecchio ricordi quello che è successo in un intervallo di lunghezza finita T .

Per questi motivi, proponiamo un modello di analisi che, per un certo t fissato, tenga conto dei valori del segnale f in $[t - T, t]$. Infine, nell'effettuare l'analisi, peseremo i valori del segnale f , in modo che risultino più importanti i valori nel mezzo di questo intervallo e meno importanti siano quelli vicino agli estremi.

Sia quindi g una funzione (che chiamiamo finestra) a supporto nell'intervallo $[-T, 0]$ e possiamo pensarla a campana. Per ogni t reale definiamo

$$f_t(u) = \overline{g(u-t)} f(u)$$

Allora il supporto di f_t è in $[t - T, t]$.

La trasformata di Gabor di f con finestra g è quindi la trasformata di Fourier della versione localizzata f_t , ovvero

$$Gf(\omega, t) = \hat{f}_t(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \overline{g(u-t)} f(u) e^{-2\pi i \omega u} du.$$

Questa definizione ha senso in realtà per g in $L^2(\mathbb{R})$. La condizione di supporto che abbiamo introdotto deriva da una motivazione fisica e da questo momento in poi supporremo che g sia in $L^2(\mathbb{R})$.

Un altro modo di vedere la trasformata di Gabor Gf è come prodotto interno: sia

$$g_{\omega,t}(u) = e^{2\pi i \omega u} g(u-t)$$

Allora $g_{\omega,t}$ è in $L^2(\mathbb{R})$, $\|g_{\omega,t}\|_2 = \|g\|_2$ e

$$Gf(\omega, t) = \langle f, g_{\omega,t} \rangle,$$

da cui si ricava $\|Gf\|_{\infty} \leq \|f\|_2 \|g_{\omega,t}\|_2 = \|f\|_2 \|g\|_2$.

Avete visto poi una formula di ricostruzione e una di Plancherel

$$f(u) = \frac{1}{\|g\|_2} \int \int Gf(\omega, t) g_{\omega,t}(u) d\omega dt$$

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{\|g\|_2} \int \int |Gf(\omega, t)|^2 d\omega dt,$$

da cui si ricava che lo spazio delle trasformate di Gabor di funzioni $L^2(\mathbb{R})$ è fatto da funzioni limitate e a quadrato integrabile, ossia in $L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Nella formula di ricostruzione si può pensare alla funzione $g_{\omega,t}$ come a una nota di frequenza ω localizzata nel tempo (se g ha supporto compatto), nelle applicazioni più sovente è concentrata attorno all'istante t .

Infine, un fatto importante di cui tenere conto quando si vogliono usare filtri o, più in generale, elaborare segnali in frequenza, è il seguente: lo spazio

$$\mathcal{G} = \{Gf : f \in L^2(\mathbb{R})\}$$

è un sottospazio proprio di $L^2(\mathbb{R}^2)$, come già detto. Questo sottospazio è descritto da un nucleo riprodotto.

TEOREMA 3.1. *Una funzione h di $L^2(\mathbb{R}^2)$ è in \mathcal{G} se e solo se*

$$h(\omega', t') = \iint K(\omega', t', \omega, t) h(\omega, t) d\omega dt$$

dove

$$K(\omega', t', \omega, t) = \langle g_{\omega', t'}, g_{\omega, t} \rangle$$

Quindi tutte le volte che applichiamo un generico filtro a una trasformata Gf , otteniamo una funzione h che non è detto sia ancora in \mathcal{G} , ovvero non è detto che h sia la trasformata di Gabor di un qualche segnale. Tuttavia la formula di inversione

$$f_h = \iint h(\omega, t) g_{\omega, t} d\omega dt$$

ha ancora senso e risulta che f_h è la miglior approssimazione che possiamo trovare del segnale filtrato:

TEOREMA 3.2. *f_h è in $L^2(\mathbb{R})$ e per ogni altro segnale $f \in L^2(\mathbb{R})$*

$$\|h - Gf\|_2 > \|h - G(f_h)\|_2.$$

In altre parole, possiamo approssimare il risultato del filtro nel senso dei minimi quadrati.

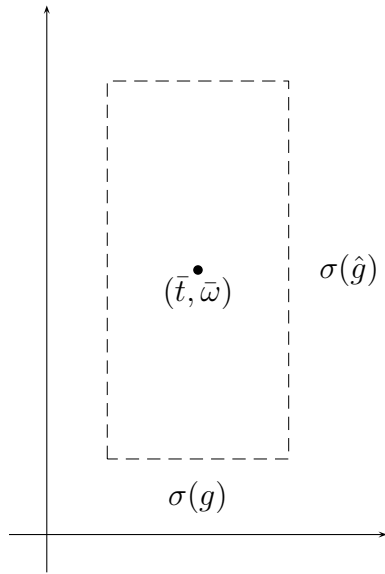
Molto usato nelle applicazioni è il caso in cui si scelga come funzione finestra g una gaussiana, che dà una buona localizzazione in tempo e frequenza. Infatti, la funzione gaussiana è quella che fornisce l'uguaglianza nel Teorema 1.51. In generale, se g è una finestra di Schwartz con $\|g\|_2 = 1$, la funzione $g_{\omega,t}$ è una densità di probabilità e per la formula di Plancherel anche $\hat{g}_{\omega,t}$ è una densità di probabilità. Esse hanno con un certi valori attesi \bar{t} e $\bar{\omega}$

$$\bar{t} = \int_{\mathbb{R}} u |g_{\omega,t}(u)|^2 du \quad \bar{\omega} = \int_{\mathbb{R}} u |\hat{g}_{\omega,t}(u)|^2 du$$

e concentrazione attorno ai valori attesi che si può misurare attraverso le varianze

$$\sigma^2(g) = \int_{\mathbb{R}} (u - \bar{t})^2 |g_{\omega,t}(u)|^2 du \quad \sigma^2(\hat{g}) = \int_{\mathbb{R}} (u - \bar{\omega})^2 |\hat{g}_{\omega,t}(u)|^2 du$$

(oppure in altri modi: abbiamo visto vari principi di indeterminazione).



Si costruisce quindi nel piano tempo-frequenza un rettangolo (detto rettangolo di Heisenberg o Heisenberg box) che è centrato in $(\bar{t}, \bar{\omega})$ e ha lati $\sigma(g)$ e $\sigma(\hat{g})$. Questo rettangolo rappresenta la risoluzione che si può ottenere in tempo-frequenza utilizzando la finestra g .

La disuguaglianza di Heisenberg afferma che l'area di questo rettangolo è

$$\sigma(g) \sigma(\hat{g}) \geq \frac{1}{4\pi}$$

e il valore minimo dell'area (quindi il miglior compromesso di risoluzione in tempo-frequenza) si ottiene quando g è una gaussiana.

1.1. Pregi. Il problema di partenza è quella di misurare insieme tempo e frequenza. Questo purtroppo non si può fare con precisione, sia per la disuguaglianza di Heisenberg, sia per buon senso (per poter dire che un segnale ha una determinata frequenza ω , dobbiamo almeno misurarlo su un periodo, quindi almeno su un intervallo di lunghezza $1/\omega$ e se osserviamo il segnale su un numero maggiore di periodi, tanto più sarà significativa la nostra misurazione della frequenza).

La soluzione che la trasformata di Gabor propone a questo problema è quella di sostituire al parametro tempo t un intervallo di tempo (ad esempio se g ha supporto in $[-T, 0]$, si guarda il segnale su $[t - T, t]$) e alla frequenza ω una banda di frequenze (che dipende da quanto è sparsa la funzione \hat{g}).

Un esempio in cui si vede bene questo concetto è quello in cui misuriamo la chirp, ovvero una funzione che localmente (diciamo su $[0, 40]$) assomiglia a

$$f(t) = \sin(\pi t^2)$$

ovvero è una funzione che oscilla in maniera sempre più rapida.

Abbiamo appena detto che non ha senso parlare di frequenza istantanea, ma vorremmo saper misurare in qualche modo l'aumentare delle oscillazioni della funzione f . Osserviamo che la frequenza per una funzione periodica è il numero delle oscillazioni nell'unità di tempo e che l'inverso della frequenza è la distanza tra due massimi "uguali".

Per una funzione, come in questo esempio, del tipo $\sin(\pi\varphi(t))$ non periodica, con φ monotona, possiamo calcolare la distanza tra due massimi consecutivi t_k e t_{k+1} e darne una stima con il Teorema di Lagrange. Infatti,

$$\pi\varphi(t_k) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

sono i punti in cui il seno vale 1. Allora per il Teorema di Lagrange

$$2 = \varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \varphi'(s_k)(t_{k+1} - t_k) \quad \text{con } s_k \in (t_k, t_{k+1}).$$

Quindi vicino all'istante t , la differenza tra due massimi consecutivi è circa $2/\varphi'(t)$. Possiamo quindi ragionevolmente affermare che la frequenza istantanea sia $\varphi'(t)/2$.

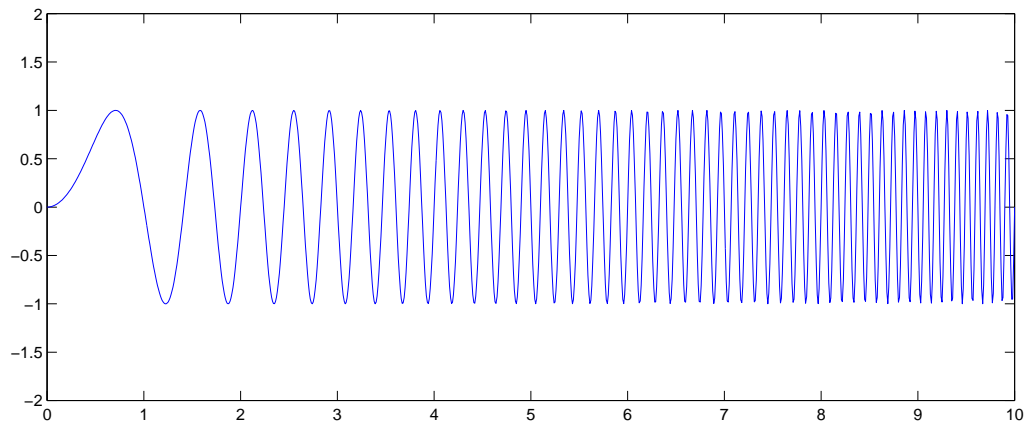


FIGURA 3.1. Il grafico della chirp quadratica

Se facciamo la trasformata di Fourier ordinaria, questo concetto di frequenza istantanea si perde: lo spettro in frequenza è molto ampio, come si nota in figura 3.2.

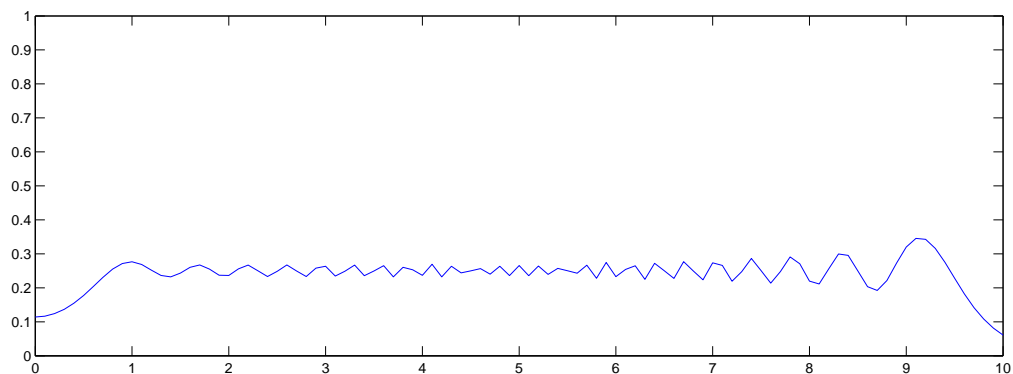
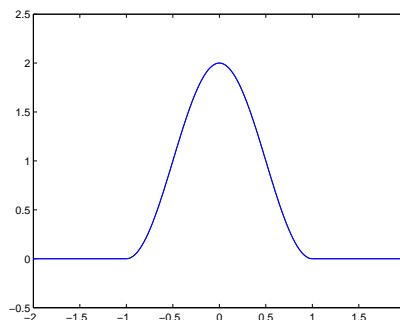


FIGURA 3.2. Il valore assoluto della trasformata della chirp quadratica

Per analizzare f usiamo la finestra

$$g(u) = \begin{cases} 1 + \cos(\pi u) & -1 \leq u \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che è a supporto compatto.



Calcoliamo $\omega \mapsto Gf(\omega, 3)$, ovvero la trasformata della funzione f_3 ; nella figura 3.3 a sinistra vediamo la funzione f_3 , ossia una versione di f localizzata attorno a 3. Nella figura 3.3 a destra troviamo $\omega \mapsto |Gf(\omega, 3)|^3$, in cui si nota un picco per la frequenza istantanea 3.

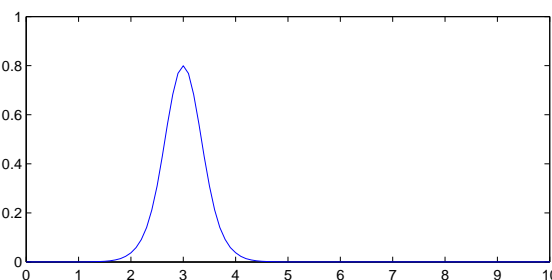
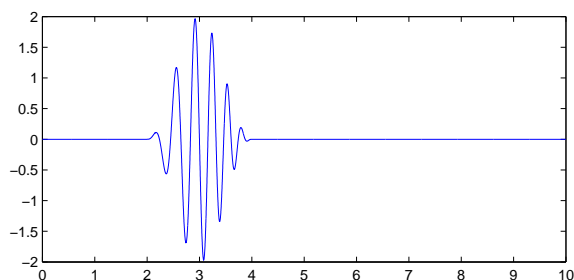


FIGURA 3.3. Il segnale localizzato attorno alla frequenza 3 e la sua trasformata

Analogamente in figura 3.4 a destra vediamo il grafico di $\omega \mapsto |Gf(\omega, 7)|^2$ in cui di nuovo spicca la frequenza istantanea 7.

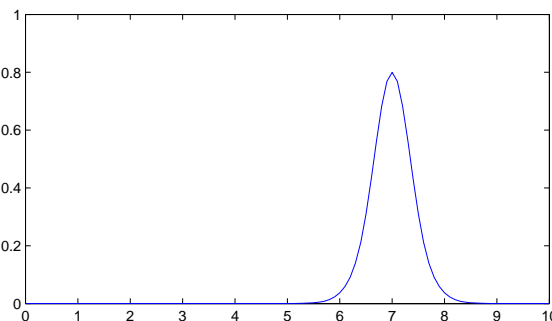
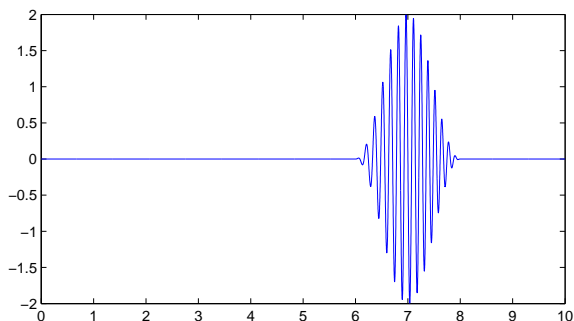


FIGURA 3.4. Il segnale localizzato attorno alla frequenza 7 e la sua trasformata

Come abbiamo detto all'inizio, la trasformata di Gabor di f è una funzione su \mathbb{R}^2 . In figura 3.5 ne troviamo lo spettrogramma (ovvero il grafico di $|Gf|$), ottenuto facendo un campionamento più basso. Spicca nettamente la crescita lineare nel tempo della frequenza.

1.2. Difetti. Quello che può non funzionare bene nell'esempio della finestra g precedente è la risoluzione in frequenza. Stiamo usando una finestra di ampiezza 2 quindi si sommano bene le note che hanno frequenze in un intervallo di ampiezza 2 o maggiore. Invece le note con frequenze in un intervallo di ampiezza 1 danno una cattiva risoluzione in frequenza.

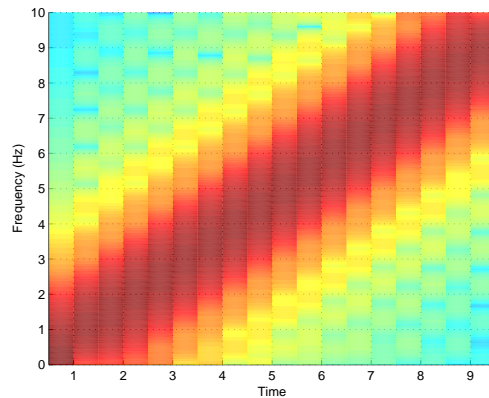
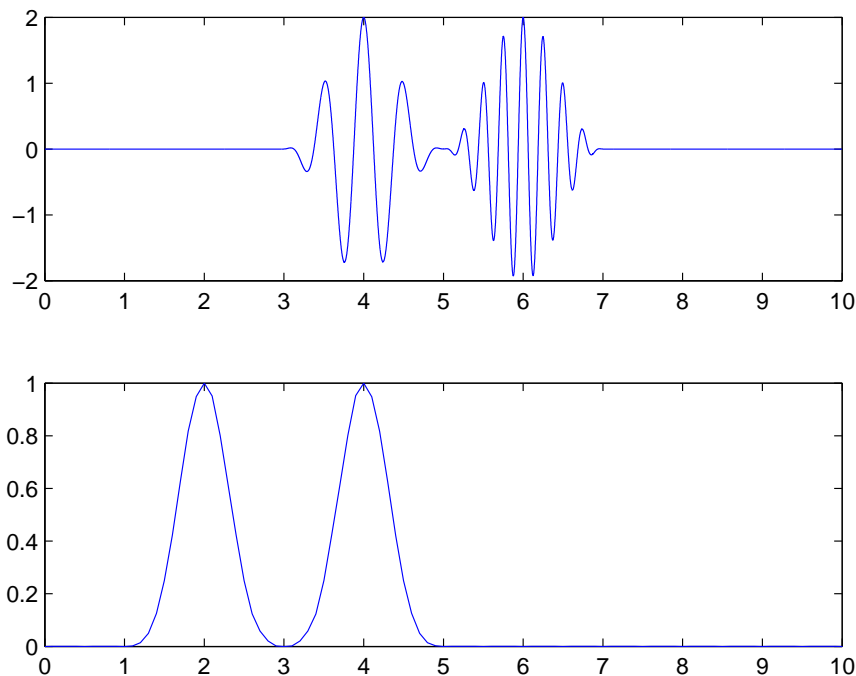


FIGURA 3.5. Spettrogramma della trasformata di Gabor della chirp quadratica

Si provi con la funzione

$$h(u) = \text{Re}(g_{2,4}(u) + g_{4,6}(u))$$

somma di due note, una centrata in $t = 4$ e con frequenza 2 e l'altra concentrata in $t = 6$ con frequenza 4. Come mostra la figura 3.6 in basso, in frequenza si vedono due picchi, uno centrato sulla frequenza 2 e uno sulla frequenza 4.

FIGURA 3.6. Sopra: la somma delle note $g_{2,4}$ e $g_{4,6}$; sotto lo spettro.

Invece per la funzione

$$\ell(u) = \text{Re}(g_{2,4}(u) + g_{3,6}(u))$$

si scopre che la finestra non riesce a separare le frequenze 2 e 3. In basso nella figura 3.7 ci sono diversi picchi e lo spettro si mantiene su valori grandi tra 1.5 e 3.5.

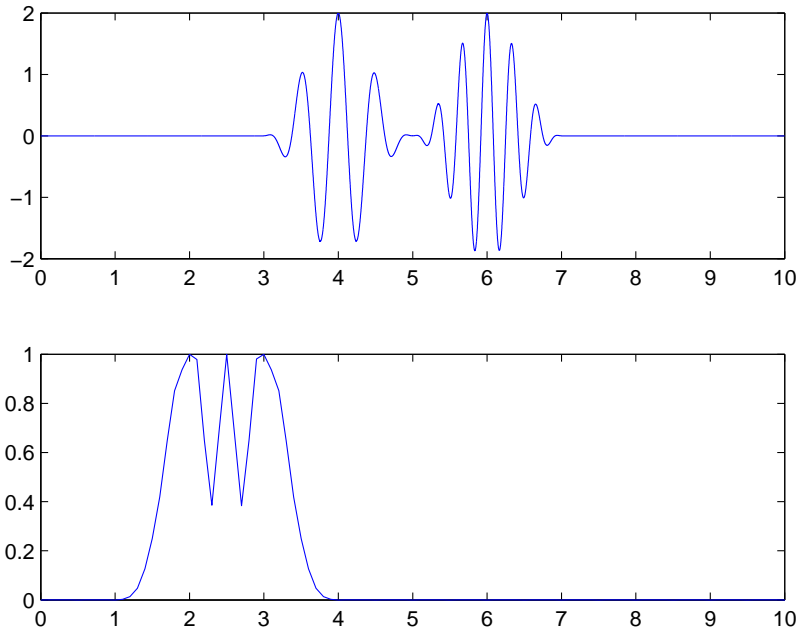


FIGURA 3.7. Sopra: la somma delle note $g_{2,4}$ e $g_{3,6}$; sotto lo spettro

Per misurare la questione più matematicamente, calcoliamo \hat{g} . Risulta

$$\hat{g}(\xi) = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi(1-4\xi^2)} \quad \forall \xi \neq 0,$$

che non è a supporto compatto, ma abbastanza concentrata in un intervallo di grandezza 2 (nella figura 3.8, trovate il grafico della finestra g e quello di $|\hat{g}|^2$). Inoltre, notiamo che

$$Gf(\omega, t) = \langle \hat{f}, \hat{g}_{\omega,t} \rangle = e^{-2\pi it\omega} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi - \omega)} e^{2\pi it\xi} d\xi,$$

quindi verranno ben separate frequenze che distano 2.

I problemi della trasformata di Gabor risiedono nel fatto che la finestra ha dimensione fissa T e il segnale viene ricostruito tramite le note $g_{\omega,t}$ che anch'esse hanno dimensione T .

Quindi ogni caratteristica del segnale che riguarda intervalli più piccoli di T (ad esempio un impulso) è sottolocalizzata in tempo, quindi avremo bisogno di molte note (che sommate diano contributo nullo) per ottenere il segnale e quindi Gf sarà grande per molte frequenze. Similmente, ogni caratteristica del segnale che riguarda intervalli più grandi di T produce ancora molte note, questa volta rispetto al tempo ovvero Gf sarà molto grande per tanti tempi.

Entrambi questi problemi vengono risolti con le wavelet, che sostituiscono la modulazione con il cambiamento di scala.

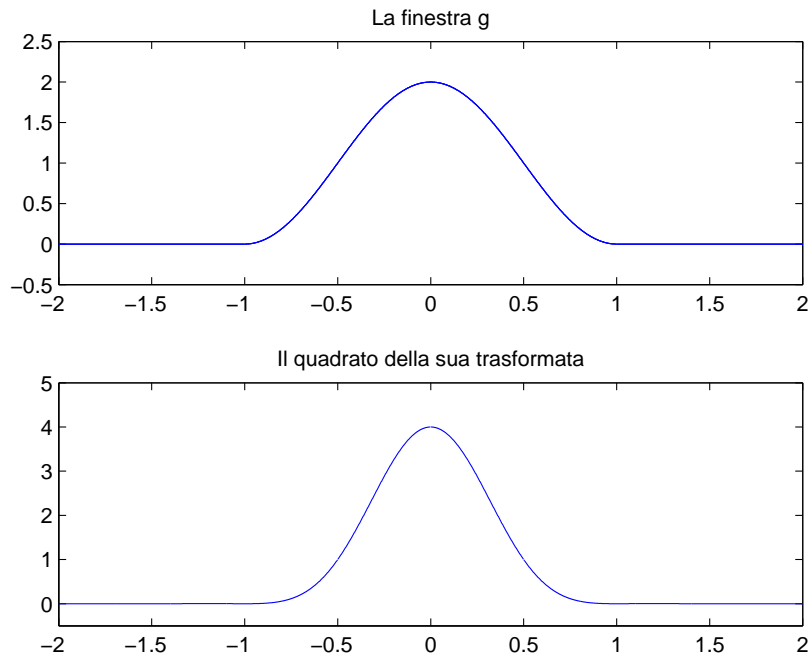


FIGURA 3.8. La finestra e la sua trasformata.

2. La CWT

La WFT usa due operazioni: traslazioni e modulazioni di una stessa funzione, la finestra. La trasformata wavelet sostituisce la modulazione con la dilatazione di una stessa funzione, che è la wavelet. Si ottengono così finestre di dimensione variabile e si parla di analisi multiscala.

In questa sezione trattiamo la trasformata wavelet continua, che è stata soprattutto adoperata nello studio di fenomeni geofisici. Esiste anche la trasformata wavelet discreta e all'interno della trasformata discreta si distingue quella legata a basi ortonormali di wavelet e all'analisi multirisoluzione, che vediamo nella prossima sezione.

DEFINIZIONE 3.1. Una wavelet (o ondina) unidimensionale è una funzione ψ in $L^2(\mathbb{R})$ (ovvero che abbia energia finita) e non banale.

Talvolta si parla di wavelet ammissibili, ovvero che soddisfano la condizione, detta condizione di ammissibilità:

$$(3.1) \quad \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(-\xi)|^2}{\xi} d\xi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi < \infty.$$

Per comodità supporremo **sempre** che $\|\psi\|_2 = 1$.

Osserviamo che se ψ è anche in $L^1(\mathbb{R})$, allora la condizione di ammissibilità implica che $\hat{\psi}(0) = 0$, ovvero che ψ abbia media nulla.

Quindi la Gaussiana, che ha tanta fortuna nella trasformata Gabor, è una wavelet, ma non soddisfa la condizione di ammissibilità. Le sue derivate invece la soddisfano. In particolare sono molto apprezzate nelle applicazioni

- l'onda Gaussiana ovvero la derivata prima della gaussiana, $x \mapsto \psi(x) = c x e^{-x^2}$ (dove la costante è scelta in modo che $\|\psi\|_2 = 1$);
- il cappello messicano, che è la derivata seconda della gaussiana, ovvero la funzione $x \mapsto \psi(x) = c(1 - x^2) e^{-x^2}$ (di nuovo la costante è scelta in modo che $\|\psi\|_2 = 1$);

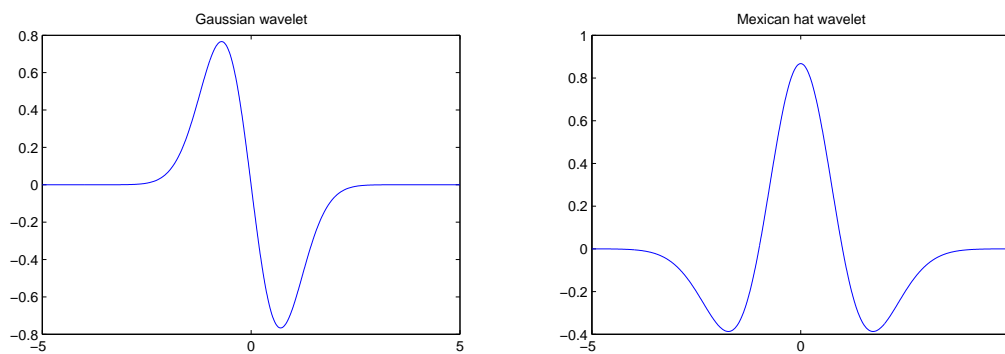


FIGURA 3.9. Alcune wavelet

- non tutte le wavelet sono a valori reali. Un esempio è la wavelet di Morlet $\psi(x) = c_1 e^{-x^2} (e^{2\pi i \sigma x} - c_2)$ (qui ci sono due costanti da scegliere in modo che ψ sia ammissibile e $\|\psi\|_2 = 1$);

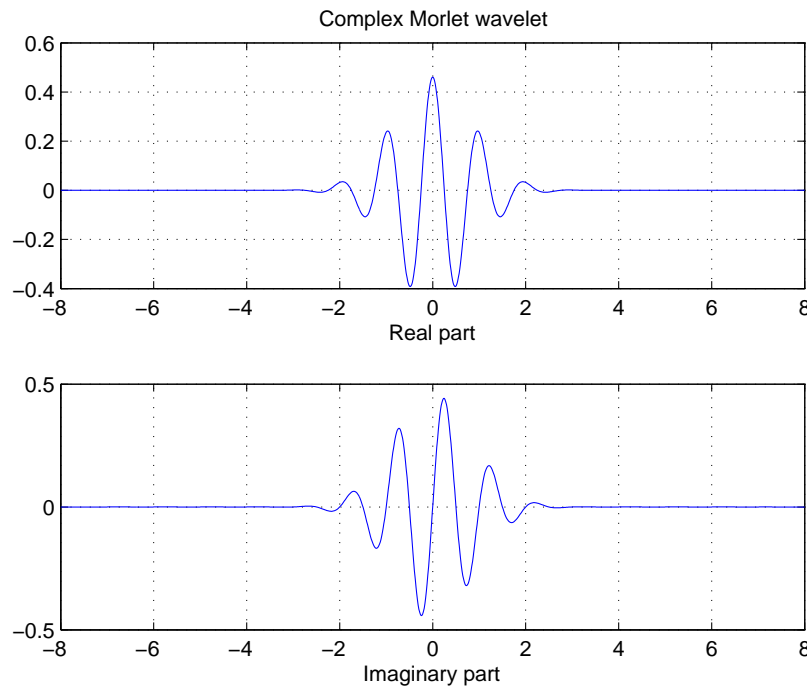


FIGURA 3.10. Una wavelet complessa

- e molte altre — di Meyer, Coifman (chiamate coiflet), Daubechies, Shannon,...

Altra wavelet, molto nota, ma non abbastanza regolare per avere successo nelle applicazioni è quella di Haar:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Tranne la wavelet di Haar, le wavelet che abbiamo visto non sono a supporto compatto, però sono fortemente localizzate, quindi in un certo senso introducono una sorta di finestra. Quello che facciamo è variare la dimensione della finestra e la sua posizione (traslando come prima).

Data una ψ , detta anche “mother wavelet” poniamo, per $a > 0$ e b reale

$$\psi_{a,b}(x) = \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) a^{-1/2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Il parametro a tiene conto del fattore di scala della finestra; più precisamente, se $a > 1$ la finestra viene allungata, se $0 < a < 1$ la finestra viene compressa.

Il parametro b tiene conto del centro della posizione della finestra, come nella trasformata di Gabor.

Si noti che l’ampiezza in tempo delle wavelet è adattata alla loro “frequenza”. Quando b è fissato e $a \rightarrow 0$, guardiamo la nostra funzione in intervalli sempre più piccoli, giungendo così a avere maggior dettaglio alle scale molto piccole.

Ovviamente per l’invarianza rispetto alle traslazioni e il comportamento rispetto alle dilatazioni della misura di Lebesgue si ha che $\psi_{a,b}$ è in L^2 e $\|\psi_{a,b}\|_2 = \|\psi\|_2$. Nella figura 3.11 in blu l’onda gaussiana “madre” delle altre due: in rosso la $\psi_{2,15}$ (che possiamo pensare avere frequenza più bassa) e in magenta la $\psi_{\frac{1}{2},-10}$ (che possiamo pensare avere frequenza più alta).

DEFINIZIONE 3.2. La trasformata wavelet di una funzione f in $L^2(\mathbb{R})$ secondo la wavelet (analizzante) ψ è la funzione $W_\psi f$ definita da

$$(W_\psi f)(a, b) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt = \langle f, \psi_{a,b} \rangle \quad a > 0, b \in \mathbb{R}.$$

Per la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz risulta $|(W_\psi f)(a, b)| \leq \|f\|_2 \|\psi\|_2$, quindi $W_\psi f$ è una funzione limitata e

$$\|W_\psi f\|_\infty \leq \|f\|_2 \|\psi\|_2.$$

Osserviamo che

$$\widehat{\psi_{a,b}}(\xi) = a^{1/2} \widehat{\tau_b \delta_a \psi}(\xi) = a^{1/2} e_b(\xi) \widehat{\psi}(a\xi)$$

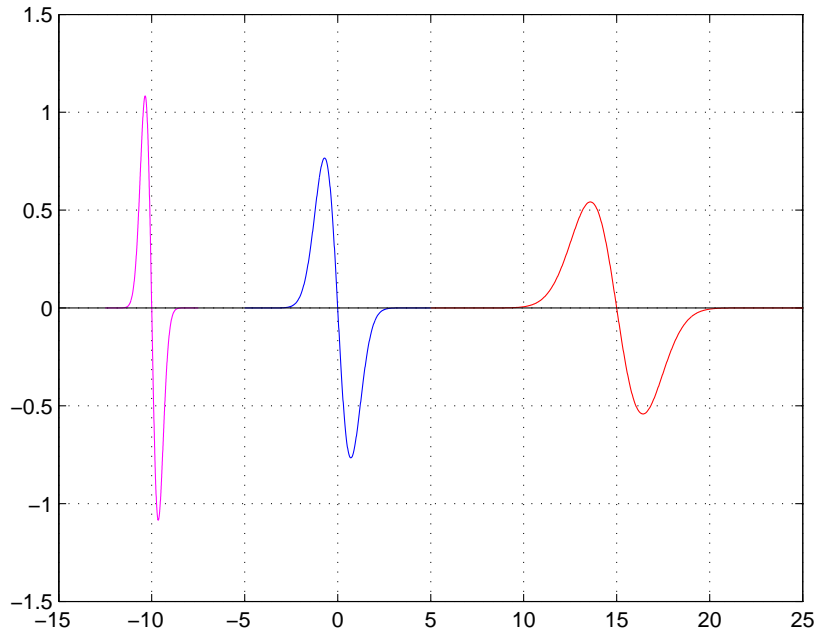


FIGURA 3.11. Dilatazioni e traslazioni della Gaussian wavelet

e quindi, per la formula di Plancherel polarizzata, si ha che per ogni $a > 0$ e b reale

$$(W_\psi f)(a, b) = \langle \hat{f}, \widehat{\psi_{a,b}} \rangle = \langle \hat{f}, a^{1/2} e_b \hat{\psi}(a \cdot) \rangle = a^{1/2} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i b \xi} \overline{\hat{\psi}(a\xi)} d\xi.$$

A parte il fattore di fase, se pensiamo che anche $\hat{\psi}$ sia altamente concentrata come nel caso dell'onda gaussiana, quando $a \rightarrow 0$, la funzione $\hat{\psi}(a \cdot)$ è sempre meno concentrata. In altro modo ci accorgiamo che per $a \rightarrow 0$ recuperiamo le frequenze grandi comprese nel segnale f .

Un altro modo in cui possiamo scrivere la trasformata wavelet è adoperando la convoluzione. Introduciamo la seguente notazione: data una funzione g in $L^2(\mathbb{R})$, definiamo la funzione g^* mediante la formula

$$g^*(x) = \overline{g(-x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Risulta

$$(W_\psi f)(a, b) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} a^{-1/2} dx = f * \psi_{a,0}^*(b).$$

Valgono le seguenti relazioni di ortogonalità.

TEOREMA 3.3 (Relazioni di ortogonalità). *Se ψ è in $L^2(\mathbb{R})$ e soddisfa la condizione di ammissibilità*

$$(3.2) \quad \int_0^{+\infty} |\hat{\psi}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{\xi} = \int_0^{+\infty} |\hat{\psi}(-\xi)|^2 \frac{d\xi}{\xi}$$

allora per ogni f_1 e f_2 in $L^2(\mathbb{R})$ vale

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} W_\psi f_1(a, b) \overline{W_\psi f_2(a, b)} \frac{db da}{a^2} = C_\psi \langle f_1, f_2 \rangle,$$

dove C_ψ è il valore comune dei due integrali della formula (3.2).

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che f_1 e f_2 siano ad esempio di Schwartz (il caso generale segue per densità). Abbiamo osservato che la trasformata wavelet è una convoluzione. Precisamente $W_\psi f(a, b) = f * \psi_{a,0}^*(b)$. Quindi per ogni $a > 0$ fissato, siccome $\psi_{a,0}^*$ è in $L^2(\mathbb{R})$ e f è integrabile, si ha che $b \mapsto W_\psi f(a, b)$ in $L^2(\mathbb{R})$.

Calcoliamo la trasformata di $\psi_{a,0}^*$: per ogni φ di Schwartz è facile controllare che $(\widehat{\varphi})^* = \widehat{\varphi}$ e per la formula di Plancherel polarizzata si ha

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\psi_{a,0}^*}, \varphi \rangle &= \langle \widehat{\psi_{a,0}^*}, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \overline{\psi_{a,0}}, \widehat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi_{a,0}(x)} \widehat{\varphi}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x/a) a^{-1/2} \widehat{\varphi}(x)} dx = a^{1/2} \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(-t) \widehat{\varphi}(-at)} dt \\ &= a^{1/2} \overline{\langle \psi, (\widehat{\delta_a \varphi})^* (-\cdot) \rangle} \quad \text{dove } \delta_a \varphi(x) = a^{-1} \varphi(x/a) \\ &= a^{1/2} \overline{\langle \psi, (\widehat{\delta_a \varphi}) (-\cdot) \rangle} = a^{1/2} \overline{\langle \widehat{\psi}, \overline{\delta_a \varphi} \rangle} = a^{1/2} \int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{\psi}(a\xi) \varphi(\xi)} d\xi = \langle a^{1/2} \widehat{\psi}(a\cdot), \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Quindi $\widehat{\psi_{a,0}^*}(\xi) = a^{1/2} \overline{\widehat{\psi}(a\xi)}$.

Utilizziamo allora la formula di Plancherel (polarizzata) nell'integrale su \mathbb{R} rispetto alla variabile b . Risulta

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(a, b) \overline{W_\psi f_2(a, b)} \frac{db da}{a^2} &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_1 * \psi_{a,0}^*(b) \overline{f_2 * \psi_{a,0}^*(b)} \frac{db da}{a^2} \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f_1 * \psi_{a,0}^*}(\xi) \overline{\widehat{f_2 * \psi_{a,0}^*}(\xi)} \frac{d\xi da}{a^2} \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f_1}(\xi) a^{1/2} \overline{\widehat{\psi}(a\xi)} \widehat{f_2}(\xi) a^{1/2} \widehat{\psi}(a\xi) \frac{d\xi da}{a^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f_1}(\xi) \overline{\widehat{f_2}(\xi)} \int_0^{+\infty} |\widehat{\psi}(a\xi)|^2 \frac{da}{a} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f_1}(\xi) \overline{\widehat{f_2}(\xi)} \int_0^{+\infty} |\widehat{\psi}(\text{sgn}(\xi)t)|^2 \frac{dt}{t} d\xi \\ &= \langle f_1, f_2 \rangle C_\psi. \end{aligned}$$

Si noti che si può applicare Fubini perché $|\widehat{f_1} \widehat{f_2}|$ è integrabile e $|\widehat{\psi}|^2$ è integrabile rispetto a da/a per la condizione di ammissibilità (3.2). \square

Siccome $\overline{W_\psi f_2(a, b)} = \langle \psi_{a,b}, f_2 \rangle$, ne segue che

TEOREMA 3.4 (Formula di inversione per la trasformata wavelet continua). *Se ψ è una wavelet ammissibile e C_ψ è il valore comune degli integrali della formula (3.2), allora per ogni f in L^2 si ha la seguente formula di ricostruzione (valida in senso L^2)*

$$f = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(a, b) \psi_{a,b} \frac{db da}{a^2},$$

nel senso che per ogni g in L^2 vale

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(a, b) \langle \psi_{a,b}, g \rangle \frac{db da}{a^2}.$$

OSSERVAZIONE 3.5. Spieghiamo meglio la formula di ricostruzione. Fissiamo $A, B > 0$. Allora è ben definito il funzionale (antilineare) $I_{A,B} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$

$$I_{A,B}(g) = \int_{1/A < a < A, |b| < B} W_\psi f(a, b) \langle \psi_{a,b}, g \rangle \frac{db da}{a^2} \quad \forall g \in L^2(\mathbb{R}).$$

Infatti,

$$\int_{1/A < a < A} \int_{|b| < B} |W_\psi f(a, b) \langle \psi_{a,b}, g \rangle| \frac{db da}{a^2} \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \int_{1/A < a < A} \int_{|b| < B} \frac{db da}{a^2}$$

e l'ultimo integrale è convergente. Allora per il Teorema di rappresentazione di Riesz, esiste un unico elemento $F_{A,B}$ in $L^2(\mathbb{R})$ tale che

$$I_{A,B}(g) = \langle F_{A,B}, g \rangle.$$

D'altra parte, per quanto dimostrato

$$\begin{aligned} \left\| f - \frac{1}{C_\psi} F_{A,B} \right\|_2 &= \sup_{\|g\|_2=1} \left| \langle f - \frac{1}{C_\psi} F_{A,B}, g \rangle \right| \\ &= \sup_{\|g\|_2=1} \left| \frac{1}{C_\psi} \int_{\substack{0 < a < 1/A \\ a > A, |b| \geq B}} W_\psi f(a, b) \langle \psi_{a,b}, g \rangle \frac{db da}{a^2} \right| \\ &\leq \sup_{\|g\|_2=1} \left| \frac{1}{C_\psi} \int_{\substack{0 < a < 1/A \\ a > A, |b| \geq B}} |W_\psi f(a, b)|^2 \frac{db da}{a^2} \right|^{1/2} \left| \frac{1}{C_\psi} \int_{\substack{0 < a < 1/A \\ a > A, |b| \geq B}} |W_\psi g(a, b)|^2 \frac{db da}{a^2} \right|^{1/2} \\ &\leq \sup_{\|g\|_2=1} \left| \frac{1}{C_\psi} \int_{\substack{0 < a < 1/A \\ a > A, |b| \geq B}} |W_\psi f(a, b)|^2 \frac{db da}{a^2} \right|^{1/2} \underbrace{\left| \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} |W_\psi g(a, b)|^2 \frac{db da}{a^2} \right|^{1/2}}_{=\|g\|_2=1} \\ &= \left| \frac{1}{C_\psi} \int_{\substack{0 < a < 1/A \\ a > A, |b| \geq B}} |W_\psi f(a, b)|^2 \frac{db da}{a^2} \right|^{1/2} \end{aligned}$$

e l'ultimo integrale tende a zero per $A, B \rightarrow \infty$.

Questo dimostra che f si può ricostruire, in senso L^2 , tramite $\frac{1}{C_\psi} \lim_{A,B \rightarrow \infty} F_{A,B}$.

Osserviamo che si potrebbero adoperare per l'analisi e la sintesi due wavelet distinte. In tal caso si complica un pochino l'argomento di densità e i risultati precedenti diverrebbero

TEOREMA 3.6 (Relazioni di ortogonalità e inversione 2). *Se ψ_1 e ψ_2 sono in $L^2(\mathbb{R})$ e soddisfano le condizioni di ammissibilità*

$$(3.3) \quad \int_0^{+\infty} |\hat{\psi}_1(\xi) \hat{\psi}_2(\xi)| \frac{d\xi}{\xi} < \infty$$

$$(3.4) \quad \int_0^{+\infty} \overline{\hat{\psi}_1(\xi)} \hat{\psi}_2(\xi) \frac{d\xi}{\xi} = \int_0^{+\infty} \overline{\hat{\psi}_1(-\xi)} \hat{\psi}_2(-\xi) \frac{d\xi}{\xi}$$

allora per ogni f_1 e f_2 in $L^2(\mathbb{R})$ vale

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} W_{\psi_1} f_1(a, b) \overline{W_{\psi_2} f_2(a, b)} \frac{db da}{a^2} = C_{\psi_1, \psi_2} \langle f_1, f_2 \rangle,$$

dove C_{ψ_1, ψ_2} è il valore comune dei due integrali della formula (3.4). Inoltre per ogni f in $L^2(\mathbb{R})$ si ha la seguente formula di ricostruzione (valida in senso L^2)

$$f = \frac{1}{C_{\psi_1, \psi_2}} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} W_{\psi_1} f(a, b) \psi_{2,a,b} \frac{db da}{a^2},$$

nel senso che per ogni g in $L^2(\mathbb{R})$ vale

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{C_{\psi_1, \psi_2}} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} W_{\psi_1} f(a, b) \langle \psi_{2,a,b}, g \rangle \frac{db da}{a^2}.$$

OSSERVAZIONE 3.7. Ovviamente, se prendiamo $\psi = \psi_1 = \psi_2$, allora le condizioni (3.3) e (3.4) diventano la condizione di ammissibilità (3.2).

2.1. Alcuni scalogrammi. Iniziamo con il comportamento della wavelet analizzante una funzione oscillante con una determinata frequenza.

Sia $f(x) = \cos(\pi x/2)$ il nostro segnale nell'intervallo $[-5, 5]$. Esisterà una scala in cui la wavelet abbia una forma adattabile a quella del coseno. Per questa scala, utilizzando le traslazioni, si passerà da forte correlazione quando la wavelet e il coseno si trovano in fase, a pressoché nulla correlazione. Si veda la figura 3.12, in cui abbiamo utilizzato la Mexican Hat wavelet.

A scale (sensibilmente) più grandi o più piccole, intervengono le cancellazioni del coseno o della wavelet che rendono i coefficienti praticamente nulli. Lo scalogramma che otteniamo sarà quindi del tipo in Figura 3.13 o 3.14. Si notino le differenze tra i due scalogrammi, uno ottenuto con la Haar wavelet (più allungato e con quattro lobi rossi) e l'altro con la Mexican Hat wavelet.

Vi è una maniera di associare a una determinata scala una pseudo-frequenza; questa corrispondenza dipende ovviamente dalla wavelet scelta. Come in Figura 3.15 e 3.16, possiamo notare che la riga dei massimi disegnata in rosa corrisponde approssimativamente alla scala 8; nella tabella delle corrispondenze, notiamo che per la wavelet adoperata (Mexihan Hat), tale scala corrisponde alla frequenza 30Hz (che effettivamente è quella del segnale in input).

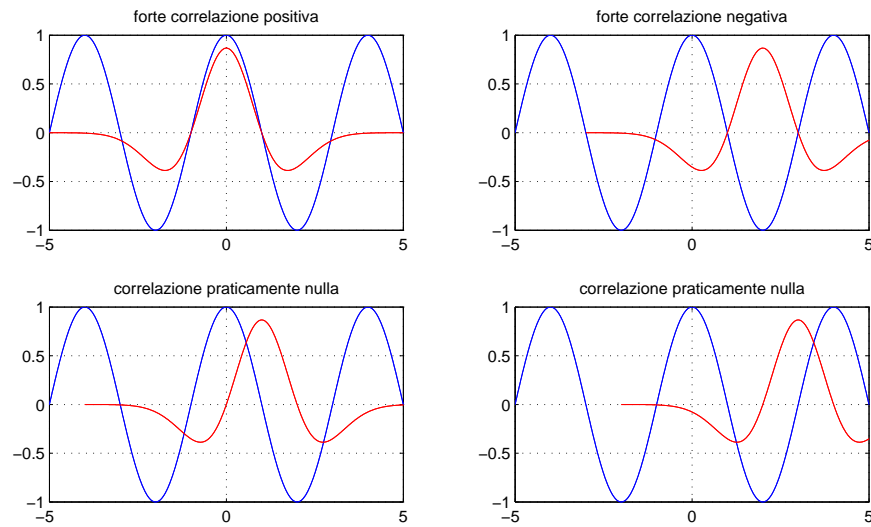


FIGURA 3.12. Correlazione a una determinata scala della MexHat wavelet (rosso) e di un coseno (blu)

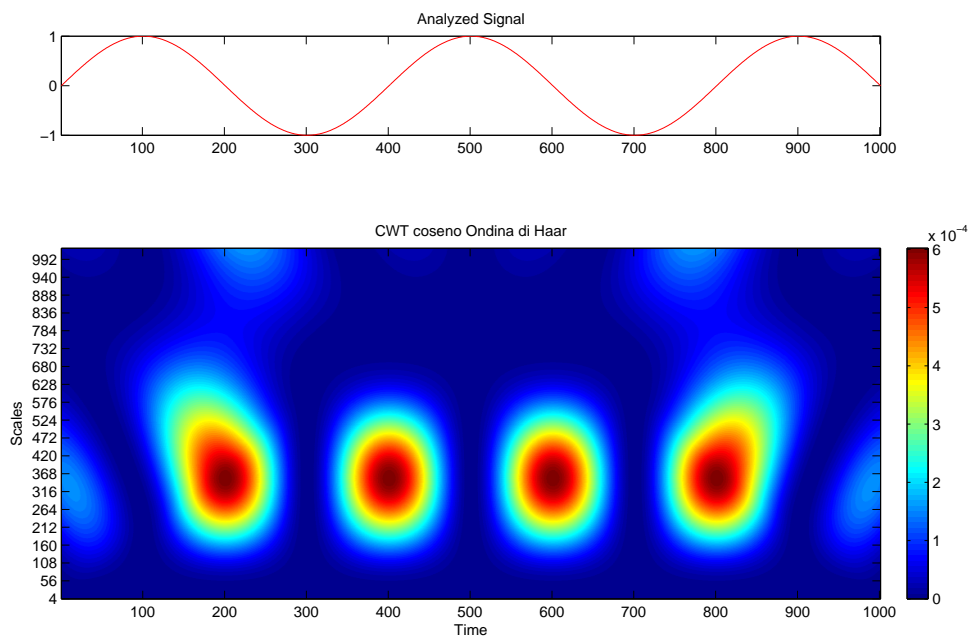


FIGURA 3.13. Scalogramma della funzione coseno ottenuto con Haar wavelet

Totalmente diverso è invece lo scalogramma e l'assegnazione della corrispondenza scala-pseudofrequenza che si ottiene con la Morlet wavelet. Lo scalogramma assomiglia di più al risultato della trasformata di Gabor (si vedano le figure 3.17 e 3.18).

Le figure che seguono mostrano gli scalogrammi relativi a segnali che contengono due frequenze.

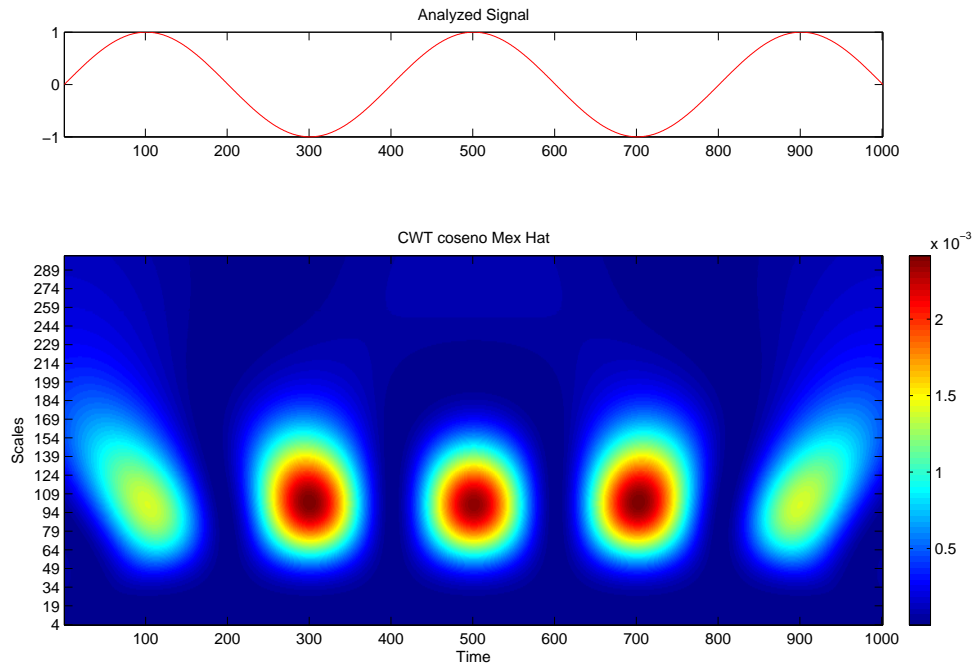


FIGURA 3.14. Scalogramma della funzione coseno ottenuto con Mexican Hat wavelet

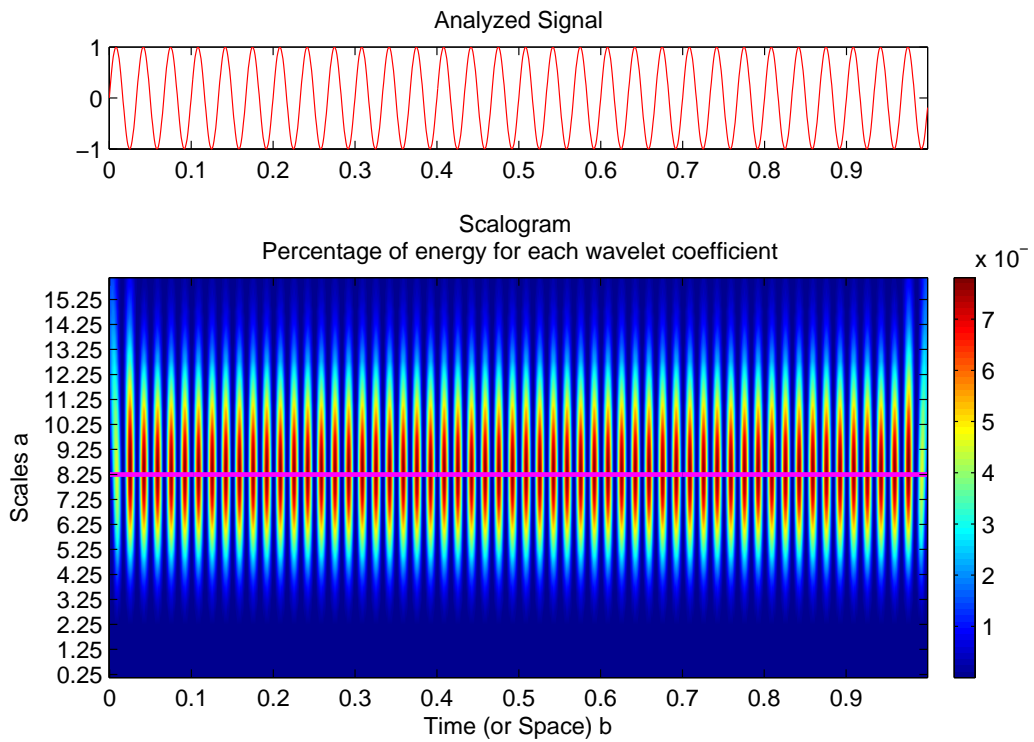


FIGURA 3.15. La trasformata wavelet (MexHat) di un segnale con frequenza 30Hz

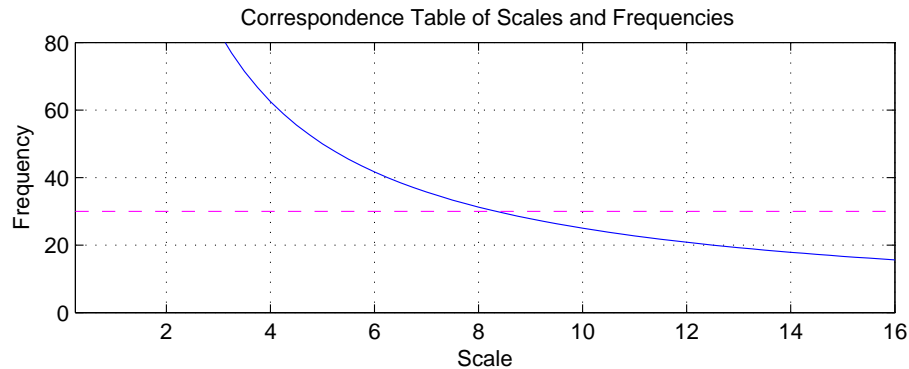


FIGURA 3.16. La tabella di corrispondenza scale-pseudofrequenze per la Mexican Hat wavelet

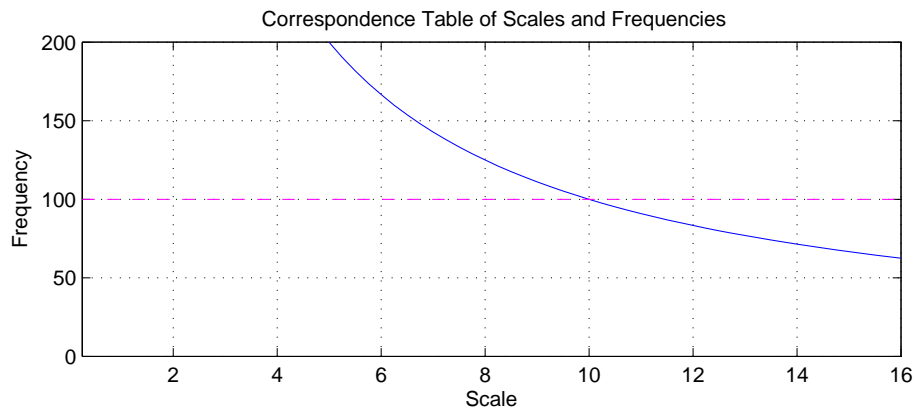


FIGURA 3.17. La tabella di corrispondenza scale-pseudofrequenze per la Morlet wavelet

In particolare, nella figura 3.19 mostriamo lo scalogramma del segnale $f(x) = \sin(60\pi x) + \sin(140\pi x)$, con durata 1 secondo. Questo segnale è la somma di due sinusoidi, una con frequenza 30Hz e l'altra con frequenza 70Hz.

Lo scalogramma è stato ottenuto con la Morlet wavelet; più netto è il contributo della frequenza più bassa (che corrisponde a una scala più alta), ma le frequenze vengono ben separate e appaiono nettamente.

Nella figura 3.20 mostriamo invece un brusco cambiamento nella frequenza di un segnale. La wavelet adoperata è quella gaussiana. Il segnale per $1/4$ di secondo è un seno con frequenza 10Hz e improvvisamente cambia frequenza e si porta a 40Hz.

Nella figura 3.21 esaminiamo lo scalogramma della funzione gradino, che presenta una discontinuità a salto nell'origine. La wavelet adoperata è quella gaussiana.

In corrispondenza della discontinuità si viene a formare un cono, la cui ampiezza diventa sempre più piccola alle scale basse.

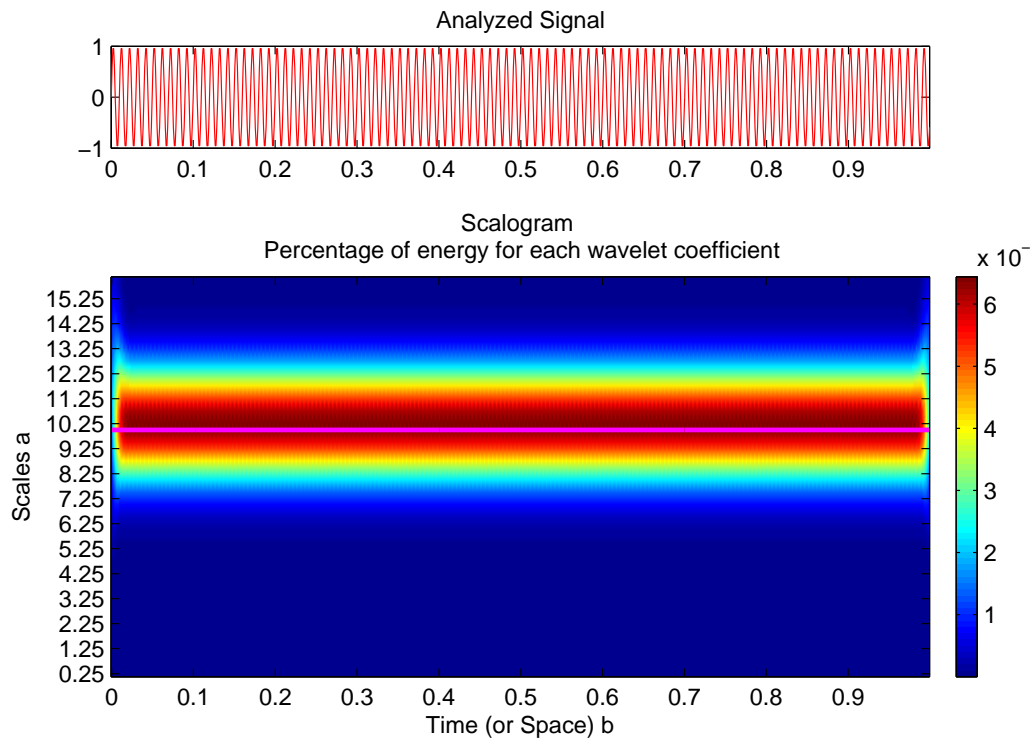


FIGURA 3.18. La trasformata wavelet (Morlet) di un segnale con frequenza 100Hz

Queste caratteristiche si comprendono facilmente se pensiamo a come è definita la trasformata wavelet: a una scala fissata, quando la wavelet si trova lontano dal salto, avrà correlazione nulla con la funzione salto, perché la wavelet ha media nulla. Diversa è la situazione quando invece parte della wavelet si trova da una parte del salto e parte dall'altro: in questa situazione la correlazione sarà forte (eventualmente, come nel caso della Mexican hat wavelet o di wavelet pari, quando il centro della wavelet si trova in esatta corrispondenza con il salto, ci sarà contributo nullo).

Infine questo processo è identico, ma si svolge in uno spazio più piccolo quando si trattano le scale piccole, mentre si svolge in uno spazio più grande quando le scale sono grandi. A questo è dovuta la forma a cono.

Tutti questi scalogrammi risentono dei cosiddetti side effects: ai lati lo scalogramma non è affidabile, perché per calcolare la trasformata wavelet in questi punti occorre prolungare il segnale a un intervallo più grande.

Solitamente si pone il segnale nullo al di fuori dell'intervallo, oppure lo si prolunga costante agli estremi, oppure lo si periodicizza. In tutti i modi, spesso vengono introdotte delle asperità che non corrispondono al vero segnale.

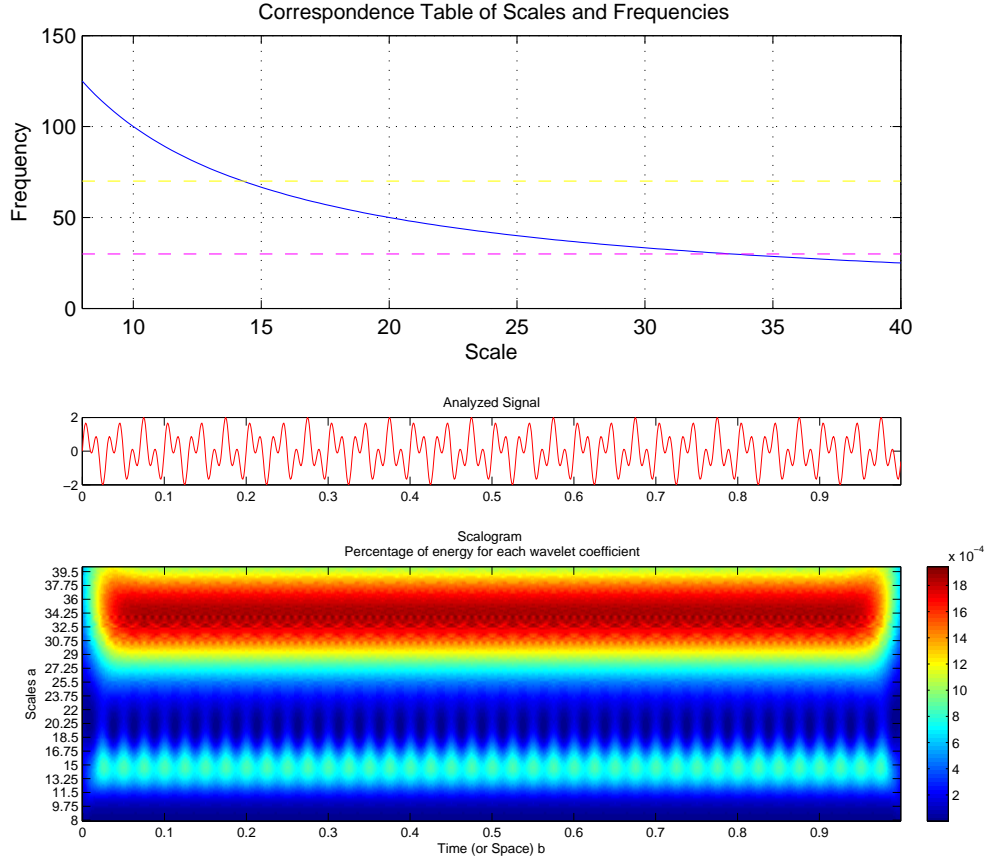


FIGURA 3.19. La trasformata wavelet (Morlet) di un segnale con due frequenze

2.2. Rettangoli di Heisenberg. Consideriamo una wavelet ψ reale e simmetrica, in modo che anche $\hat{\psi}$ sia reale e simmetrica e valutiamo il valore atteso del tempo $\mu(|\psi_{a,b}|^2)$ della densità di probabilità $|\psi_{a,b}|^2$ e il suo discostamento da tale valore atteso. Per semplicità indichiamo con σ la varianza $\sigma(|\psi|^2)$. Si ha

$$\mu(|\psi_{a,b}|^2) = \int_{\mathbb{R}} x |\psi_{a,b}(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} (au + b) |\psi(u)|^2 du = b$$

$$\sigma^2(|\psi_{a,b}|^2) = \int_{\mathbb{R}} (x - b)^2 |\psi_{a,b}(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} (au)^2 |\psi(u)|^2 du = a^2 \sigma^2(|\psi|^2) = a^2 \sigma^2.$$

Supponiamo anche che ψ sia ammissibile e $\hat{\psi}(0) = 0$, cosicché possiamo pensare che $\hat{\psi}$ sia non nulla in una sorta di anello simmetrico rispetto a 0. Quindi, anziché cercare il valore atteso della frequenza della densità di probabilità $|\widehat{\psi_{a,b}}|^2$ (che sarebbe 0), ci limitiamo a cercare il valore atteso della frequenza restringendoci a una parte dell'anello, ad esempio quella positiva, ovvero consideriamo la densità di probabilità $\widetilde{\psi_{a,b}}$ definita da

$$\widetilde{\psi_{a,b}}(\xi) = \begin{cases} 2|\widehat{\psi_{a,b}}(\xi)|^2 & \xi \geq 0 \\ 0 & \xi < 0 \end{cases}$$

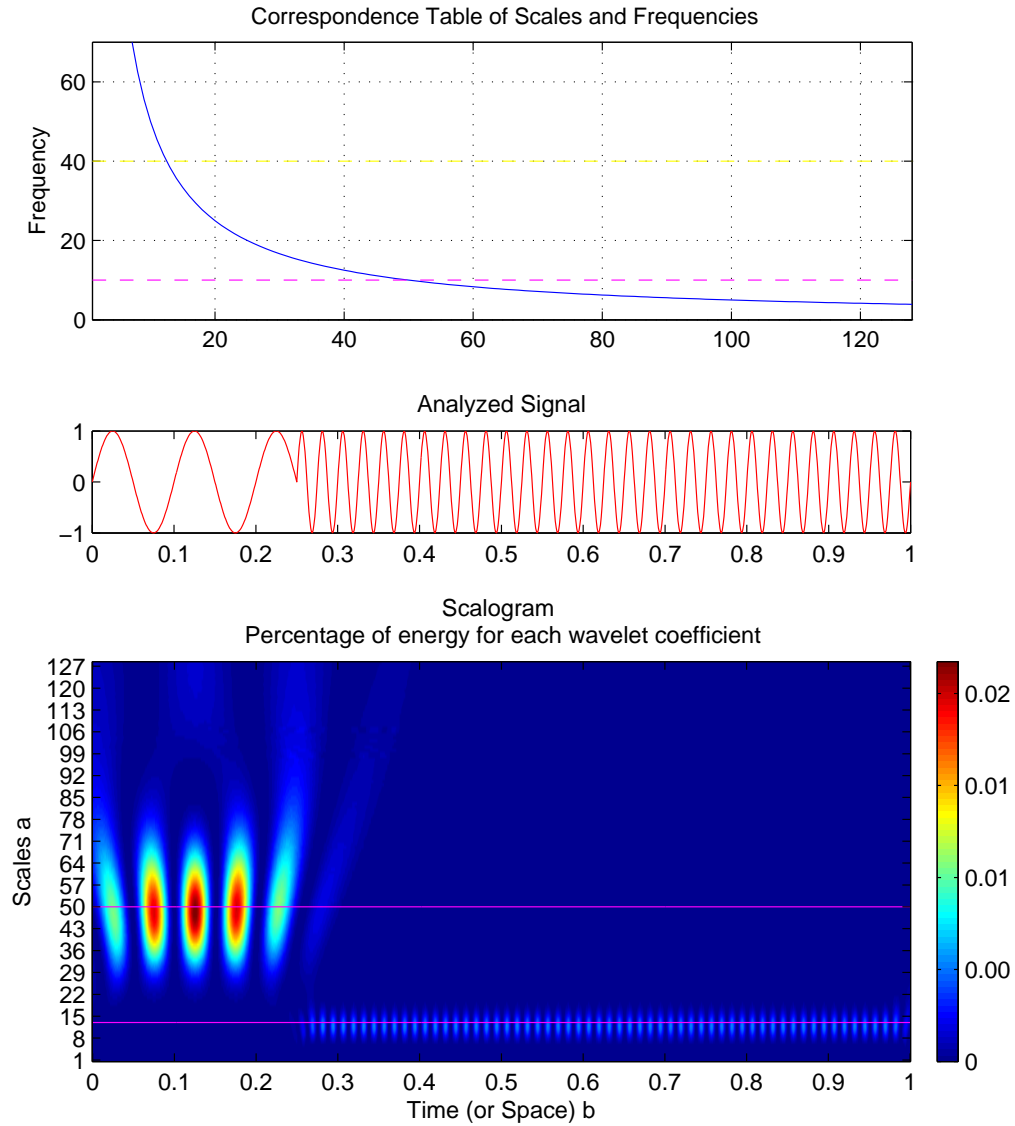


FIGURA 3.20. La trasformata wavelet (gaussiana) di un segnale con due frequenze una di seguito all'altra

Per semplicità scriviamo $\bar{\xi} = \mu(\tilde{\psi})$. Si ha

$$\mu(\widetilde{\psi}_{a,b}) = 2 \int_0^\infty \xi |\widehat{\psi}_{a,b}(\xi)|^2 d\xi = 2 \int_0^\infty \xi a |\hat{\psi}(a\xi)|^2 d\xi = \frac{2}{a} \int_0^\infty \eta |\hat{\psi}(\eta)|^2 d\eta = \frac{1}{a} \bar{\xi}.$$

Il discostamento dalla frequenza attesa è

$$\begin{aligned} \sigma^2(\widetilde{\psi}_{a,b}) &= 2 \int_0^\infty \left(\xi - \frac{1}{a} \bar{\xi}\right)^2 |\widehat{\psi}_{a,b}(\xi)|^2 d\xi = 2 \int_0^\infty \frac{(a\xi - \bar{\xi})^2}{a} |\hat{\psi}(a\xi)|^2 d\xi \\ &= 2 \int_0^\infty \frac{(\eta - \bar{\xi})^2}{a^2} |\hat{\psi}(\eta)|^2 d\eta = \frac{1}{a^2} \sigma^2(\tilde{\psi}). \end{aligned}$$

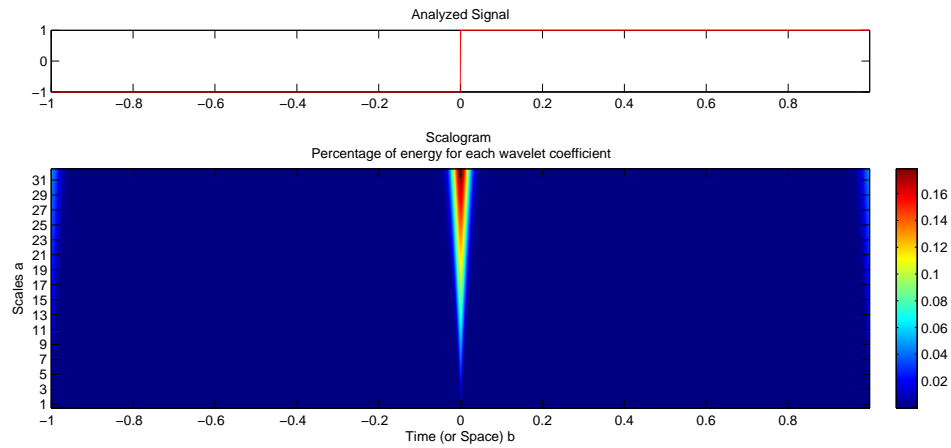


FIGURA 3.21. La trasformata wavelet (gaussian) di una discontinuità a salto

Quindi il rettangolo che associamo a $\psi_{a,b}$ è un rettangolo centrato in $(b, \frac{1}{a} \bar{\xi})$ e con lati di lunghezza $a \sigma$ nella direzione dei tempi e lunghezza $\frac{1}{a} \sigma(\tilde{\psi})$ nella direzione delle frequenze.

La situazione che si presenta è quindi quella di rettangoli le cui dimensioni variano al variare della scala. Precisamente, le dimensioni del rettangolo relativo alla wavelet scelta sono invariate per spostamenti in tempo, mentre variano al variare della scala, mantenendo la stessa area: a scale più grandi il rettangolo risulta più largo in tempo e più stretto intorno a una bassa frequenza, viceversa a scale piccole il rettangolo risulta più stretto in tempo e più largo intorno a un'alta frequenza. Si veda la figura 3.22. Si noti che invece i rettangoli di Heisenberg relativi alla STFT sono sempre uguali, indipendentemente da dove essi vengano centrati.

2.3. Un confronto tra STFT e CWT. In questo esempio confrontiamo l'analisi di Gabor con finestra gaussiana con l'analisi tramite la wavelet di Morlet (che è quella che ha la forma più simile). Scopo di questo esempio è di far vedere la flessibilità dell'analisi tramite la trasformata wavelet, che permette di trattare simultaneamente e con buona approssimazione sia fenomeni molto localizzati, come due impulsi molto vicini, sia fenomeni più ampi, come due sinusoidi.

Il segnale che analizziamo, durata 2 secondi e campionato a 1/8000 di sec, è la somma di due sinusoidi, una di 500Hz e una di 1kHz, più due impulsi, molto vicini, uno al tempo $t_1 = 0,625$ e l'altro al tempo $t_2 = 6,25$ millisecondi più tardi

$$f(t) = \sin(2\pi 500 t) + \sin(2\pi 1000 t) + 4.5 \delta_{t_1}(t) + 4.5 \delta_{t_2}(t).$$

L'analisi di Gabor con finestra gaussiana 128 non separa i due impulsi, ma separa molto bene le frequenze delle due sinusoidi (figura 3.24 in alto). Restringendo la finestra a 64, iniziano

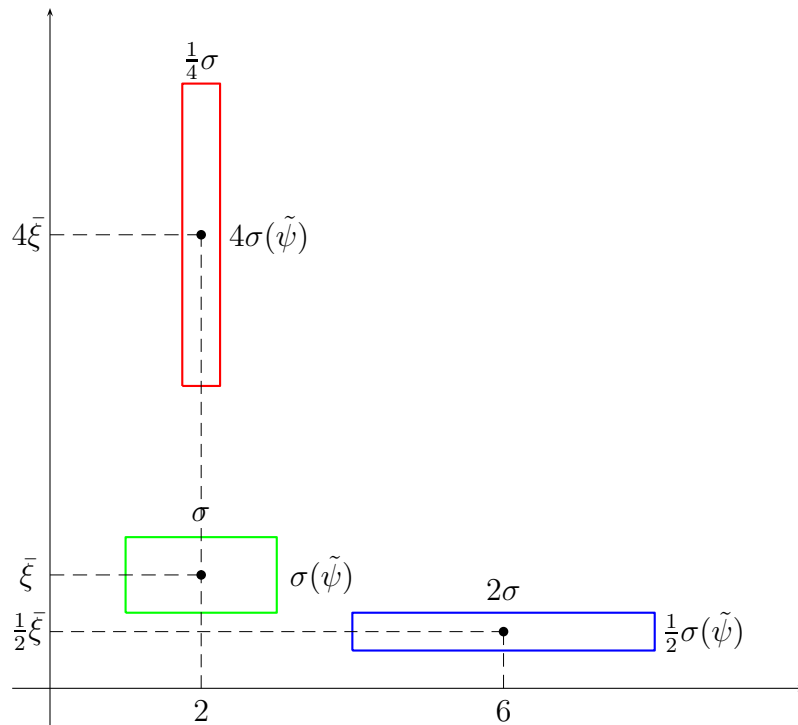


FIGURA 3.22. Rettangoli di Heisenberg per la CWT: in verde il rettangolo corrispondente a $\psi_{1,2}$, in rosso quello relativo a $\psi_{1/4,2}$; in blu quello corrispondente a $\psi_{2,6}$

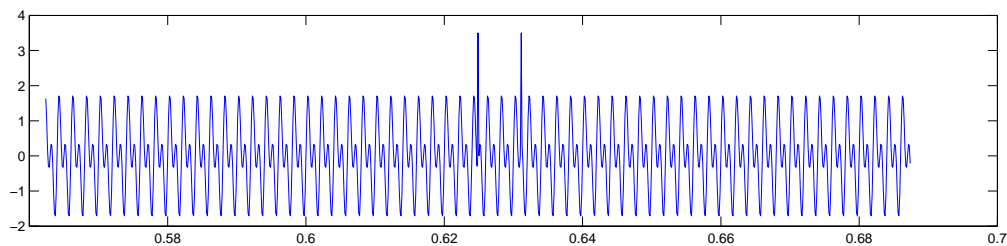


FIGURA 3.23. Un segnale con due frequenze e due impulsi

a distinguersi i due impulsi, ma peggiora la situazione con le frequenze, che risultano più sparse (figura 3.24 in basso). Con la finestra di dimensione 32 si vedono bene i due impulsi, ma le frequenze sono indistinguibili (figura 3.25 in basso) e il costo computazionale è alto.

Lo scalogramma che otteniamo con la wavelet di Morlet e pochissime scale (solo 6 dilatazioni) è nella figura 3.26 e ha costo computazionale molto basso.

Nota 1. Importante per le applicazioni — come per la STFT — è il fatto che ancora si ottiene che lo spazio $\{Wf : f \in L^2\}$ è uno spazio con un nucleo riprodotto (si veda il libro di I. Daubechies [3], p. 31).

2.4. Studio della regolarità. Una delle più importanti applicazioni della trasformata wavelet è nell'individuazione delle singolarità di un segnale. Se supponiamo che la wavelet ψ abbia media nulla, il valore della trasformata wavelet $W_\psi f(a, b)$ misura la variazione di f

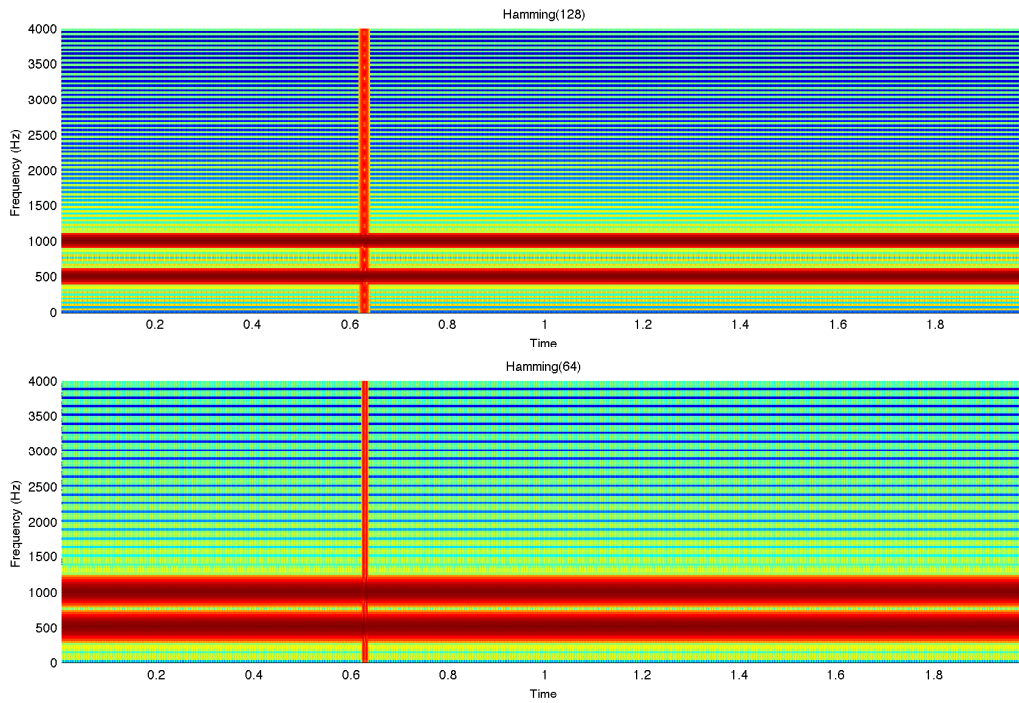


FIGURA 3.24. Trasformate di Gabor del segnale di figura 3.23 con finestra di dimensione 128 in alto, di dimensione 64 in basso.

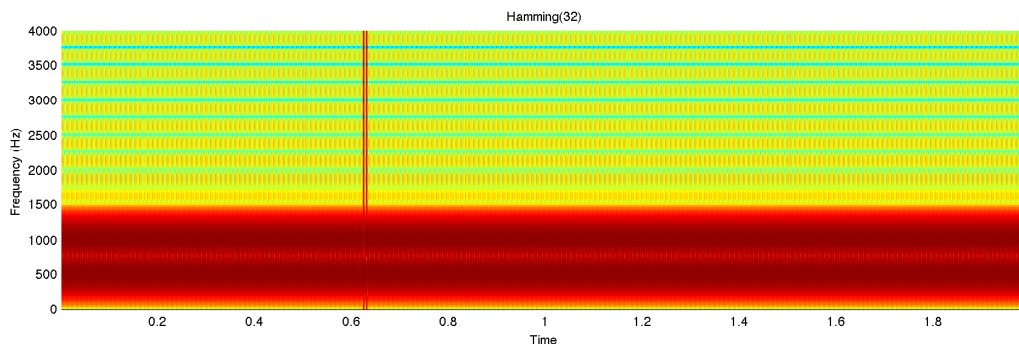


FIGURA 3.25. Trasformata di Gabor del segnale di figura 3.23 con finestra di dimensione 32.

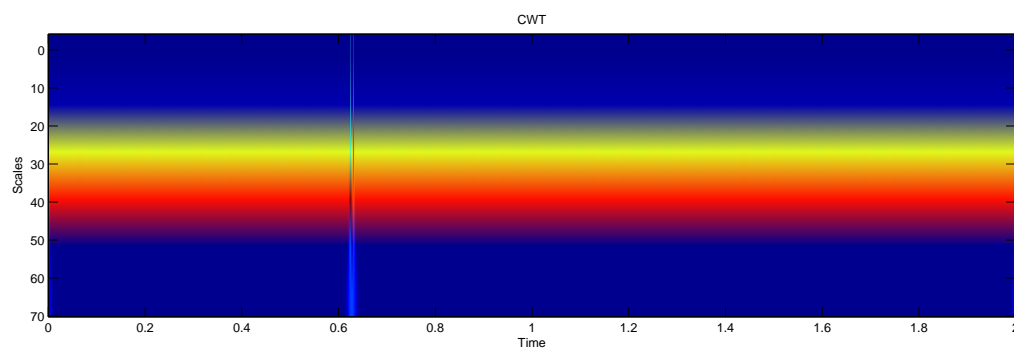


FIGURA 3.26. Trasformata wavelet continua di note e impulsi.

in un intorno di b di ampiezza a . Siccome una funzione liscia in b cambia poco in un intorno piccolo di b , la trasformata wavelet di una funzione liscia dovrebbe essere piccola alle scale piccole. Viceversa, a una singolarità dovrebbe corrispondere un grosso cambiamento di f e quindi dovremmo ottenere valori grandi della trasformata wavelet.

Per rendere più precise le considerazioni precedenti, supponiamo che la wavelet ψ abbia supporto compatto e m momenti nulli, ovvero supponiamo che

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \psi(x) dx = 0 \quad \forall k = 0, \dots, m-1.$$

Supponiamo inoltre che il segnale f in un intorno di un punto b soddisfi la seguente stima in un opportuno intorno di b :

$$(3.5) \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (x-b)^k \right| \leq K |x-b|^m \quad \forall x \in (b-\delta, b+\delta).$$

Ad esempio, se f è un segnale reale di classe C^m (o anche leggermente meno), per la formula di Taylor con resto di Lagrange tale stima è soddisfatta.

Allora, siccome ogni dilatata di ψ ha ancora $m-1$ momenti nulli, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} |W_\psi f(a, b)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi_{a,b}(x)} dx \right| \\ &= a^{-1/2} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx \right| \\ &= a^{-1/2} \left| \int_{\mathbb{R}} f(t+b) \overline{\psi(t/a)} dt \right| \\ &= a^{-1/2} \left| \int_{\mathbb{R}} \left(f(t+b) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} t^k \right) \overline{\psi(t/a)} dt \right| \\ &= a^{-1/2} \left| \int_{\mathbb{R}} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (x-b)^k \right) \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx \right| \\ &\leq a^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (x-b)^k \right| \left| \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right| dx. \end{aligned}$$

La wavelet ψ è centrata e a supporto compatto, quindi possiamo pensare che il suo supporto sia contenuto nell'intervallo simmetrico $[-A, A]$. Quindi l'ultimo integrale è esteso alla regione $|\frac{x-b}{a}| \leq A$. Se a è abbastanza piccolo, ovvero $aA < \delta$, allora tale regione è contenuta nell'intorno dove vale la stima del resto enunciata, quindi

$$|W_\psi f(a, b)| \leq K a^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} |x-b|^m \left| \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right| dx = K a^{m+1/2} \int_{\mathbb{R}} |t|^m |\psi(t)| dt.$$

In particolare, $a \mapsto W_\psi f(a, b)$ tende a zero per $a \rightarrow 0$ con ordine $m+1/2$.

Viceversa, se ψ è a supporto compatto e con m momenti nulli e vale una stima analoga su $W_\psi f$, allora f soddisfa la (3.5).

Nella figura 3.27 esaminiamo gli scalogrammi della funzione gradino, che non è continua nell'origine, e della funzione triangolo, che presenta un punto di non derivabilità nell'origine. La wavelet adoperata è il Mexican Hat. In entrambi i casi, in corrispondenza dell'origine si viene a formare un cono, la cui ampiezza è trascurabile alle scale basse. Si noti che l'ampiezza del cono relativa alla funzione gradino è più grande (inoltre al centro del cono si evidenzia una riga blu dovuta al fatto che la Mexican Hat wavelet è pari).

3. Analisi Multi-Risoluzione (MRA)

Nelle applicazioni è ovviamente necessaria una discretizzazione. Si tratta di un problema molto delicato, perché non tutte le scelte delle discretizzazioni dei parametri a, b portano a algoritmi buoni. Vediamo quella che è una “sorpresa”, ovvero il fatto che esistono wavelet per cui la famiglia delle dilatate tramite potenze diadiche e traslate di interi risulta una base ortonormale di $L^2(\mathbb{R})$. Queste wavelet si chiamano wavelet ortonormali.

Un modo standard per generare wavelet ortonormali è quello dell'analisi multirisoluzione. Ne nasce un algoritmo ricorsivo, che rende molto efficace la programmazione.

Per maggiori dettagli su questa sezione si vedano i libri di Hernandez e Weiss [6] e di Soardi [11].

3.1. Basi di Riesz.

DEFINIZIONE 3.3. Diciamo che $\{x_k : k \in \mathbb{Z}\}$ è una base di Riesz per lo spazio di Hilbert \mathcal{H} , se:

- per ogni x in \mathcal{H} esiste una successione (α_k) in $\ell^2(\mathbb{Z})$ tale che $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k x_k$ con serie convergente in \mathcal{H} ;
- esistono due costanti $A, B > 0$ tali che se x ha come sopra la decomposizione $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k x_k$, allora

$$A \sum_k |\alpha_k|^2 \leq \|x\|_{\mathcal{H}}^2 \leq B \sum_k |\alpha_k|^2.$$

Ovviamente una base ortonormale è una base di Riesz con $A = B = 1$.

3.2. MRA. Un'Analisi Multi-Risoluzione (MRA) è una successione $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ di sottospazi chiusi di $L^2(\mathbb{R})$ tali che

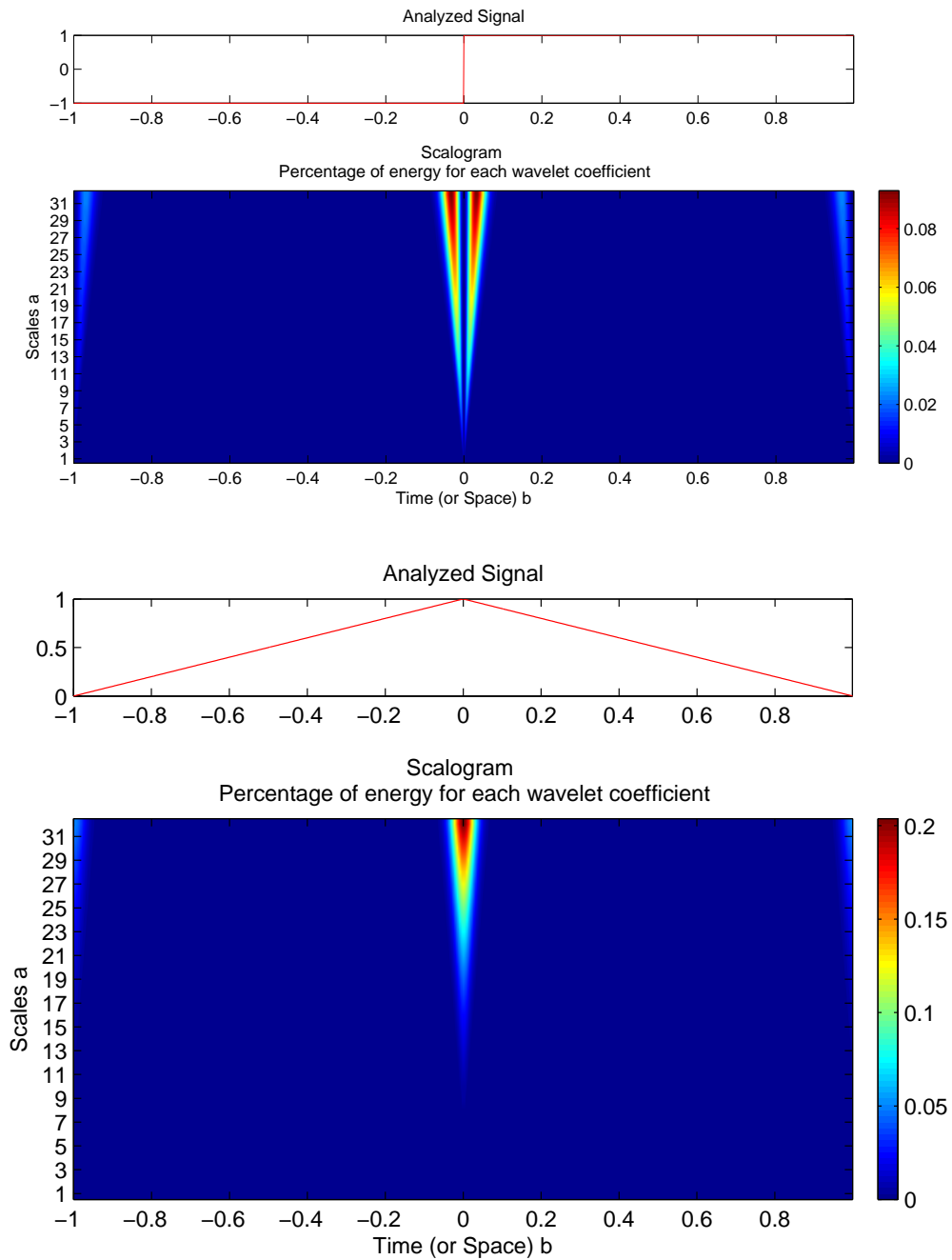


FIGURA 3.27. La trasformata wavelet (Mexican Hat) di una funzione con discontinuità a salto (sopra) e con un punto di non derivabilità (sotto)

- (1) $V_j \subset V_{j+1}$ per ogni $j \in \mathbb{Z}$;
- (2) per ogni $j \in \mathbb{Z}$ vale: $f \in V_j$ se e solo se $f(2 \cdot) \in V_{j+1}$;
- (3) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$;
- (4) $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$;

- (5) esiste una funzione φ in V_0 tale che la famiglia $\{\tau_k\varphi\}$ sia una base ortonormale di V_0 . Tale funzione φ si chiama funzione di scala.

Vedremo che non tutte le condizioni sono indipendenti. Talvolta la condizione (5) viene rimpiazzata da una più debole:

- (5') esiste una funzione φ in V_0 tale che la famiglia $\{\tau_k\varphi\}$ sia una base di Riesz per V_0 .

In questo caso, parleremo di MRA con base di Riesz. Come vedremo, la condizione (5) non è realmente più restrittiva della (5'), nel senso che se abbiamo una MRA con base di Riesz allora tale MRA può essere anche realizzata con un'altra funzione di scala le cui traslate forniscono una base ortonormale.

ESEMPIO 3.8. Per $j \in \mathbb{Z}$ definiamo $V_j = \{f : f \text{ è costante su } [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)], k \in \mathbb{Z}\} = \overline{\text{span}\{1_{[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]}\}}$. Si verifichi che è una MRA. Possiamo scegliere come funzione di scala $\varphi = 1_{[-1,0]}$ (oppure $\varphi = 1_{[0,1], \dots}$)

La difficoltà maggiore risiede nel provare la (4). Una possibilità è adoperare un criterio successivo, il Teorema 3.11.

Si noti che, posto $\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k)$, allora la funzione $\varphi_{0,k} = \tau_k \varphi$ è in V_0 e quindi $\varphi_{j,k}$ è in V_j . Inoltre, al variare di k , le $\varphi_{j,k}$ formano una base ortonormale di V_j . Ma non è vero che le $\varphi_{j,k}$ formano una base ortonormale di $L^2(\mathbb{R})$ se facciamo variare j e k , perché i sottospazi V_j sono uno contenuto nell'altro e non vi è ragione di dire che a diverse scale queste funzioni siano ortogonali.

OSSERVAZIONE 3.9. Sia (V_j) una successione di sottospazi chiusi con le proprietà (1) e (4) e denotiamo con $P_j : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow V_j$ il proiettore ortogonale sullo spazio V_j . Allora per ogni f in $L^2(\mathbb{R})$

$$\|(1 - P_j)f\|_2^2 \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0.$$

Infatti se f è in $L^2(\mathbb{R})$, per la (1) e la (4), esiste una successione (f_j) , con f_j in V_j , tale che $\|f - f_j\|_2 \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$. D'altra parte $\|f - P_j f\|_2 \leq \|f - f_j\|_2 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$.

Analizziamo più in dettaglio le altre condizioni.

TEOREMA 3.10. *Le condizioni (1), (2) e (5') implicano la (3).*

DIMOSTRAZIONE. Per assurdo, sia f un elemento non nullo di $\cap V_j$. Possiamo supporre che $\|f\|_2 = 1$. Dal fatto che, per j fissato, f è in V_{-j} , segue che

$$f_j(x) = 2^{j/2} f(2^j x) \in V_0 \quad \|f_j\|_2 = \|f\|_2 = 1.$$

Possiamo quindi rappresentare la funzione f_j tramite la base di Riesz generata dalla funzione di scala mediante una serie convergente in $L^2(\mathbb{R})$

$$f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k^j \varphi(x - k)$$

con la condizione

$$A \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k^j|^2 \leq \|f_j\|_2^2 = 1.$$

Quindi, passando alla trasformata di Fourier,

$$2^{-j/2} \hat{f}(2^{-j}\xi) = \hat{f}_j(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k^j \widehat{\tau_k \varphi}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k^j e^{-2\pi i k \xi} \hat{\varphi}(\xi) = m_j(\xi) \hat{\varphi}(\xi)$$

dove m_j è una funzione periodica di periodo 1 e, per la formula di Plancherel–Parseval, $\|m_j\|_{L^2[0,1]} = \|(\alpha_k^j)_k\|_{\ell^2} \leq \sqrt{1/A}$.

In altri termini, si ha $\hat{f}(\xi) = 2^{j/2} \hat{f}_j(2^j \xi) = 2^{j/2} m_j(2^j \xi) \hat{\varphi}(2^j \xi)$ e quindi per ogni $j \geq 1$

$$\begin{aligned} \int_1^2 |\hat{f}(\xi)| d\xi &\leq 2^{j/2} \left(\int_1^2 |\hat{\varphi}(2^j \xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\int_1^2 |m_j(2^j \xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &= 2^{-j/2} \left(\int_{2^j}^{2^{j+1}} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{2^j}^{2^{j+1}} |m_j(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{2^j}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2^j} \int_{2^j}^{2^{j+1}} |m_j(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{2^j}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2^j} \sum_{\ell=0}^{2^j-1} \int_{2^{j+\ell}}^{2^{j+\ell+1}} |m_j(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{2^j}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} 1/\sqrt{A} \end{aligned}$$

perché ciascun addendo è minore o uguale a $1/A$. Siccome $\hat{\varphi} \in L^2$, passando al limite per $j \rightarrow +\infty$ otteniamo che $\hat{f}(\xi) = 0$ q.o. su $[1, 2]$.

Ripetendo lo stesso ragionamento sulla funzione f_ℓ , che anch'essa sta nell'intersezione dei V_j si ottiene $\hat{f}_\ell(\xi) = 0$ q.o. su $[1, 2]$, quindi $\hat{f}(\xi) = 0$ q.o. su $(0, \infty)$.

Ragionando in maniera analoga a partire dall'intervallo $[-2, -1]$ otteniamo $\hat{f}(\xi) = 0$ q.o. su $(-\infty, 0)$. Ma allora non può essere $\|f\|_2 = 1$. \square

TEOREMA 3.11. *Sia (V_j) una successione di sottospazi chiusi di $L^2(\mathbb{R})$ tale che valgano (1), (2) e (5). Supponiamo inoltre che la funzione di scala φ sia tale che $|\hat{\varphi}|$ è continua in 0. Allora le affermazioni seguenti sono equivalenti:*

- i) $\hat{\varphi}(0) \neq 0$
- ii) vale (4), ovvero $\cup V_j$ è denso in L^2 .

Inoltre, se vale i) o ii), allora $|\hat{\varphi}(0)| = 1$.

DIMOSTRAZIONE. Iniziamo a provare che da i) segue ii). Supponiamo che $\hat{\varphi}(0) \neq 0$. Poniamo

$$\mathcal{W} = \overline{\cup V_j}.$$

Il nostro scopo è provare che $\mathcal{W}^\perp = \{0\}$.

Iniziamo a verificare che \mathcal{W} è invariante per traslazioni. Prima verifichiamo che è invariante per quelle diadiche del tipo $\tau_{2^{-\ell}m}$ con $\ell, m \in \mathbb{Z}$. Prendiamo f in \mathcal{W} . Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono j_0 in \mathbb{Z} e h in V_{j_0} tali che $\|f - h\|_2 < \varepsilon$. Siccome i V_j sono uno contenuto nell'altro, h sta in V_j per ogni $j \geq j_0$ e quindi possiamo scrivere

$$h(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k 2^{j/2} \varphi(2^j x - k)$$

con $c_k = \langle h, \varphi_{j,k} \rangle$ e serie convergente in $L^2(\mathbb{R})$. Quindi

$$(\tau_{2^{-\ell}m}h)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k 2^{j/2} \varphi(2^j(x - 2^{-\ell}m) - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k 2^{j/2} \varphi(2^j x - 2^{j-\ell}m - k).$$

Se prendiamo $j \geq \ell$, allora $\varphi(2^j x - 2^{j-\ell}m - k)$ è un elemento di V_j , perché è del tipo $\varphi(2^j x - k')$ con $k' \in \mathbb{Z}$. Inoltre la serie converge in $L^2(\mathbb{R})$, quindi $\tau_{2^{-\ell}m}h$ è in V_j .

Ne segue che $\tau_{2^{-\ell}m}f$ è ancora in \mathcal{W} , perché $\|\tau_{2^{-\ell}m}f - \tau_{2^{-\ell}m}h\|_2 = \|f - h\|_2 < \varepsilon$.

Se x è reale, allora possiamo trovare m, ℓ interi tali che $2^{-\ell}m$ è arbitrariamente vicino a x . Quindi, per la continuità delle traslazioni $\|\tau_x f - \tau_{2^{-\ell}m}f\|_2 < \varepsilon$. Quindi \mathcal{W} è invariante per traslazioni generali.

Siccome $\hat{\varphi}(0) \neq 0$ e $|\hat{\varphi}|$ è continua in 0, allora $\hat{\varphi}(\xi) \neq 0$ per ogni ξ in $(-\delta, \delta)$ con $\delta > 0$ opportuno. Supponiamo che g sia in \mathcal{W}^\perp ; allora, utilizzando l'invarianza per traslazioni di \mathcal{W} risulta

$$0 = \langle \tau_{-x}f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t+x) \overline{g(t)} dt$$

per ogni x reale e per ogni f in \mathcal{W} . Per la formula di Plancherel (polarizzata)

$$0 = \langle \widehat{\tau_{-x}f}, \widehat{g} \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \xi x} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Siccome $\widehat{f\hat{g}}$ è integrabile, questo vuol dire che $\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)} = 0$ per q.o. ξ .

Se scegliamo in particolare come funzioni f in \mathcal{W} quelle del tipo $f(x) = 2^j \varphi(2^j x)$, con j intero, si ha $\hat{f}(\xi) = \hat{\varphi}(2^{-j}\xi)$ e quindi otteniamo

$$\hat{\varphi}(2^{-j}\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} = 0 \quad \text{q.o. } \xi \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Siccome $\hat{\varphi}(2^{-j}\xi) \neq 0$ quando $\xi \in (-2^j\delta, 2^j\delta)$, si ha $\hat{g}(\xi) = 0$ per q.o. $\xi \in (-2^j\delta, 2^j\delta)$. Se facciamo ora tendere $j \rightarrow \infty$, ne ricaviamo che $g = 0$.

Viceversa, supponiamo che valga ii), ovvero $L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j}$ e mostriamo che segue i). Sia f tale che $\hat{f} = 1_{[-1/2, 1/2]}$. Allora

$$\|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2 = 1.$$

Inoltre, come visto nell'osservazione 3.9, se denotiamo con P_j il proiettore ortogonale sullo spazio V_j , si ha $\|(1 - P_j)f\|_2^2 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$.

Quindi $\|P_j f\|_2 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \|f\|_2$. Per la (2) e la (5), le funzioni $\varphi_{j,k}$ formano una base ortonormale di V_j quindi

$$(3.6) \quad \|P_j f\|_2^2 = \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} \right\|_2^2 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \|f\|_2^2 = 1.$$

Calcoliamo questo limite in un altro modo. Per la formula di Plancherel e dal fatto che $\hat{f} = 1_{[-1/2, 1/2]}$ abbiamo

$$\begin{aligned} \|P_j f\|_2^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{j,k} \rangle|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \langle \hat{f}, \widehat{\varphi_{j,k}} \rangle \right|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-1/2}^{1/2} 2^{-j/2} e^{2\pi i k 2^{-j} \xi} \overline{\hat{\varphi}(2^{-j} \xi)} d\xi \right|^2 \\ &= 2^j \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-2^{-(j+1)}}^{2^{-(j+1)}} e^{2\pi i k \xi} \overline{\hat{\varphi}(\xi)} d\xi \right|^2. \end{aligned}$$

Se j è grande, l'intervallo $[-2^{-(j+1)}, 2^{-(j+1)}]$ è contenuto in $[-1/2, 1/2]$ e quindi l'ultimo integrale che abbiamo scritto è il $(-k)$ -esimo coefficiente della serie di Fourier della funzione $1_{[-2^{-(j+1)}, 2^{-(j+1)}]} \widehat{\varphi}$. Quindi per la formula di Parseval

$$\begin{aligned} \|P_j f\|_2^2 &= 2^j \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| 1_{[-2^{-(j+1)}, 2^{-(j+1)}]} \widehat{\varphi}(k) \right|^2 \\ &= 2^j \int_{-2^{-(j+1)}}^{2^{-(j+1)}} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} |\hat{\varphi}(2^{-j} \xi)|^2 d\xi \xrightarrow{j \rightarrow \infty} |\hat{\varphi}(0)|^2, \end{aligned}$$

perché $|\hat{\varphi}|$ è continua in 0. Per la (3.6), ne concludiamo che $|\hat{\varphi}(0)| = 1 \neq 0$. \square

Se ripercorriamo la dimostrazione appena fatta, ci accorgiamo che in realtà abbiamo dimostrato due fatti leggermente più forti.

COROLLARIO 3.12. *Supponiamo che valgano le condizioni (1), (2), (5) e inoltre esista $\mu > 0$ tale che $\hat{\varphi}(\xi) \neq 0$ su $(-\mu, \mu)$. Allora vale la (4).*

COROLLARIO 3.13. *Se (V_j) è una MRA con base ortonormale, allora*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{-j+1}} \int_{-2^{-j}}^{2^{-j}} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = 1.$$

Analizziamo ora la condizione (5') e mostriamo che una MRA con base di Riesz non è un concetto realmente più debole.

Un criterio molto importante per stabilire quando le traslate intere di una funzione forniscano un sistema ortonormale è il seguente.

PROPOSIZIONE 3.14. *Sia g in $L^2(\mathbb{R})$. Le traslate intere di g formano un sistema ortonormale se e solo se*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + k)|^2 = 1 \quad \text{q.o. } \xi \in \mathbb{R}.$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che le traslate intere di g formino un sistema ortonormale. Allora

$$\begin{aligned} \delta_{k,0} &= \int_{\mathbb{R}} g(x) \overline{g(x-k)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\xi)|^2 e^{2\pi i k \xi} d\xi \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_{\ell}^{\ell+1} |\hat{g}(\xi)|^2 e^{2\pi i k \xi} d\xi \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_0^1 |\hat{g}(\mu + \ell)|^2 e^{2\pi i k \mu} d\mu \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\mu + \ell)|^2 \right) e^{2\pi i k \mu} d\mu. \end{aligned}$$

Siccome $\mu \mapsto e^{2\pi i k \mu}$ al variare di k sono una base ortonormale di $L^2[0,1]$ deve risultare $\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\mu + \ell)|^2 = 1$ q.o.

Viceversa, si ripercorrono le stesse uguaglianze e si arriva alla tesi.

Si noti che lo scambio tra serie e integrale si può giustificare tramite il Teorema di Fubini e Tonelli; infatti, dai calcoli che abbiamo fatto, è finito $\|g\|_2^2 = \int_0^1 \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\mu + \ell)|^2 \right) d\mu$. \square

Un'importante conseguenza, che limita la scelta di funzioni di scala, è la seguente.

COROLLARIO 3.15. *Sia g una funzione in $L^2(\mathbb{R})$, le cui traslate intere formino un sistema ortonormale. Allora $|\text{supp}(\hat{g})| \geq 1$. L'uguaglianza vale se e solo se $|\hat{g}|$ è la funzione caratteristica di un insieme misurabile K di \mathbb{R} di misura 1.*

DIMOSTRAZIONE. Si noti che $\|g\|_2 = 1 = \|\hat{g}\|_2$. Inoltre dalla proposizione 3.14 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + k)|^2 = 1$ per q.o. $\xi \in \mathbb{R}$, quindi $|\hat{g}(\xi)| \leq 1$ q.o. Ne deduciamo che

$$|\text{supp}(\hat{g})| = \int_{\text{supp}(\hat{g})} 1 \, d\xi \geq \int |\hat{g}(\xi)|^2 \, d\xi = 1.$$

Supponiamo ora che $|\text{supp}(\hat{g})| = 1$ (l'altra implicazione è banale) e, per assurdo, supponiamo che $|\hat{g}|$ non sia una funzione caratteristica, ovvero che $0 < |\hat{g}(\xi)| < 1$ su un qualche insieme E di misura positiva. Allora arriviamo a una contraddizione:

$$1 = \|\hat{g}\|_2^2 = \int_{\text{supp}(\hat{g})} |\hat{g}(\xi)|^2 \, d\xi = \int_E + \int_{\text{supp}(\hat{g}) \setminus E} < |E| + |\text{supp}(\hat{g}) \setminus E| = |\text{supp}(\hat{g})| = 1.$$

Quindi $|\hat{g}(\xi)| = 1$ sul suo supporto, ovvero $|\hat{g}|$ è la funzione caratteristica di $K = \text{supp}(\hat{g})$ e ovviamente $|K| = \|g\|_2^2 = 1$ per l'ortonormalità di g . \square

Come dicevamo, la condizione (5') non è realmente più debole della (5). Tuttavia vedremo che l'interesse verso le basi di Riesz è nelle applicazioni.

TEOREMA 3.16. *Se vale (5') allora si può trovare una funzione di scala γ in V_0 le cui traslate formino una base ortonormale.*

Il teorema discende abbastanza agevolmente dal fatto seguente.

LEMMA 3.17. *Supponiamo che φ in $L^2(\mathbb{R})$ sia tale che $\{\tau_k \varphi : k \in \mathbb{Z}\}$ sia una base di Riesz con costanti A e B dello spazio da loro generato. Inoltre definiamo*

$$\sigma_\varphi(\xi) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k)|^2 \right)^{1/2}.$$

Allora $\sqrt{A} \leq \sigma_\varphi(\xi) \leq \sqrt{B}$ per q.o. $\xi \in \mathbb{R}$.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 3.17. Notiamo innanzi tutto che la funzione σ_φ è sempre ben definita quando φ è di quadrato integrabile, perché

$$\int_{[0,1]} |\sigma_\varphi(\xi)|^2 \, d\xi = \int_{[0,1]} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k)|^2 \, d\xi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{[k, k+1]} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \, d\xi = \|\varphi\|_2^2,$$

quindi $|\sigma_\varphi(\xi)| < \infty$ per quasi ogni ξ .

Sia $\mathbf{c} = (c_k)$ una successione in $\ell^2(\mathbb{Z})$ e poniamo

$$S_{\mathbf{c}} = \sum_k c_k \varphi_{0,k}$$

Siccome $\{\tau_k \varphi : k \in \mathbb{Z}\}$ è una base di Riesz, si ha

$$A \sum_k |c_k|^2 \leq \|S_{\mathbf{c}}\|_2 \leq B \sum_k |c_k|^2.$$

Notiamo che

$$\hat{S}_{\mathbf{c}}(\xi) = \sum_k c_k e^{-2\pi i k \xi} \hat{\varphi}(\xi) = \theta_{\mathbf{c}}(\xi) \hat{\varphi}(\xi)$$

dove $\theta_{\mathbf{c}}$ è una funzione 1-periodica e in L^2 sul periodo con $\|\theta_{\mathbf{c}}\|_{L^2[0,1]}^2 = \sum_k |c_k|^2$. Inoltre per il teorema di Plancherel e per quello di Tonelli,

$$\begin{aligned} \|S_{\mathbf{c}}\|_2^2 &= \|\hat{S}_{\mathbf{c}}\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |\theta_{\mathbf{c}}(\xi) \hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \sum_k \int_k^{k+1} |\theta_{\mathbf{c}}(\xi) \hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_0^1 |\theta_{\mathbf{c}}(\xi)|^2 \sum_k |\hat{\varphi}(\xi + k)|^2 d\xi \\ &= \int_0^1 |\theta_{\mathbf{c}}(\xi) \sigma_{\varphi}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Allora $\|S_{\mathbf{c}}\|_2^2 = \|\theta_{\mathbf{c}}(\xi) \sigma_{\varphi}(\xi)\|_{L^2[0,1]}^2$ e la proprietà di essere base di Riesz può essere riscritta nel modo seguente

$$A \|\theta_{\mathbf{c}}\|_{L^2[0,1]}^2 \leq \|\theta_{\mathbf{c}} \sigma_{\varphi}\|_{L^2[0,1]}^2 \leq B \|\theta_{\mathbf{c}}\|_{L^2[0,1]}^2.$$

Scegliamo ora la successione \mathbf{c} in modo che $\theta_{\mathbf{c}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=0}^{m-1} e^{2\pi i k(\xi-\eta)}$, dove η è fissato in $[0, 1]$. Allora

$$|\theta_{\mathbf{c}}(\xi)|^2 = \sum_{j=-m+1}^{m-1} \left(1 - \frac{|j|}{m}\right) e^{2\pi i j(\xi-\eta)} = \frac{1}{m} \left(\frac{\sin(\pi m(\xi-\eta))}{\sin(\pi(\xi-\eta))}\right)^2 = K_m(\eta - \xi)$$

e K_m è il nucleo di Fejér. È banale controllare che $\|\theta_{\mathbf{c}}\|_{L^2[0,1]} = 1$ e quindi la proprietà di essere base di Riesz diventa

$$(3.7) \quad A \leq (K_m * \sigma_{\varphi}^2)(\eta) \leq B \quad \text{q.o. } \xi \in [0, 1].$$

Siccome il nucleo di Fejér è un'identità approssimata e σ_{φ}^2 è in $L^2([0, 1]) \subset L^1([0, 1])$, si ha $(K_m * \sigma_{\varphi}^2)(\eta) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sigma_{\varphi}^2(\eta)$ per q.o. η . La tesi segue facendo tendere m a infinito nella (3.7). \square

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.16. Definiamo la funzione γ ponendo $\hat{\gamma} = \hat{\varphi}/\sigma_{\varphi}$. Siccome σ_{φ} è limitata dall'alto e dal basso con costanti positive, si ha

$$0 < \frac{1}{\sqrt{B}} \leq \frac{1}{\sigma_{\varphi}(\xi)} \leq \frac{1}{\sqrt{A}} \quad \text{per q.o. } \xi$$

e quindi $\hat{\gamma}$ è in L^2 . Ne concludiamo che anche γ è in L^2 . Inoltre per la definizione di σ_{φ}

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\gamma}(\xi + k)|^2 = \frac{1}{\sigma_{\varphi}^2(\xi)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k)|^2 = 1.$$

Per la Proposizione 3.14, le traslate intere di γ formano un sistema ortonormale.

Infine, siccome σ_φ e $1/\sigma_\varphi$ sono funzioni limitate e periodiche di periodo 1 possiamo trovare le loro serie di Fourier: esisteranno due successioni (a_k) e (b_k) in $\ell^2(\mathbb{Z})$ tali che

$$\frac{1}{\sigma_\varphi(\xi)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2\pi i k \xi} \quad \text{e} \quad \sigma_\varphi(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k e^{2\pi i k \xi},$$

con convergenza in $L^2[0, 1]$. Quindi

$$\hat{\gamma}(\xi) = \frac{\hat{\varphi}(\xi)}{\sigma_\varphi(\xi)} = \hat{\varphi}(\xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2\pi i k \xi} \quad \text{e} \quad \hat{\varphi}(\xi) = \hat{\gamma}(\xi) \sigma_\varphi(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k e^{2\pi i k \xi}.$$

Invertendo la trasformata di Fourier otteniamo

$$\gamma(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi_{0,k}(x) \quad \text{e} \quad \varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \gamma_{0,k}(x),$$

ovvero γ è in $\overline{\text{sp}\{\varphi_{0,k} : k \in \mathbb{Z}\}} = V_0$. Inoltre φ (e le sue traslate intere) è in $\overline{\text{sp}\{\gamma_{0,k} : k \in \mathbb{Z}\}}$. Quindi $\overline{\text{sp}\{\gamma_{0,k} : k \in \mathbb{Z}\}} = \overline{\text{sp}\{\varphi_{0,k} : k \in \mathbb{Z}\}} = V_0$ e le traslate intere di γ formano una base ortonormale di V_0 . \square

4. Wavelet generate da una MRA

Vediamo ora come costruire le wavelet a partire da una MRA con base ortonormale. Le wavelet che costruiremo sono wavelet ortonormali, ovvero

DEFINIZIONE 3.4. Una funzione ψ in $L^2(\mathbb{R})$ si dice wavelet ortonormale se $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ è una base ortonormale di $L^2(\mathbb{R})$ dove $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$.

Sia W_0 il complemento ortogonale di V_0 in V_1 : ovvero V_0 è un sottospazio chiuso di V_1 , quindi $V_1 = V_0 \oplus V_0^\perp$ e poniamo $W_0 = V_0^\perp$. Si noti che W_0 è un sottospazio chiuso di V_1 .

Se dilatiamo gli elementi di W_0 per 2^j otteniamo un sottospazio chiuso W_j di V_{j+1} tale che

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

Inoltre la somma diretta è ancora ortogonale, perché se f è in V_j e g è in W_j , allora $f(2^{-j}\cdot)$ e $g(2^{-j}\cdot)$ sono in V_0 e W_0 rispettivamente e quindi

$$\langle f, g \rangle = 2^{-j} \langle f(2^{-j}\cdot), g(2^{-j}\cdot) \rangle = 0.$$

Quindi W_j è il dilatato di W_0 , ma è anche il complemento ortogonale di V_j in V_{j+1} .

Siccome $V_j \rightarrow \{0\}$ quando $j \rightarrow -\infty$, ci aspettiamo che

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1} \oplus W_j = \dots = \bigoplus_{h=-\infty}^j W_h$$

Infine $V_j \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ quando $j \rightarrow +\infty$, quindi sembra sensato concludere che

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus W_j.$$

Questa decomposizione è molto interessante, perché è ortogonale. Infatti, se $j < k$, allora $V_{k+1} = W_k \oplus V_k$ e W_j è contenuto in V_k .

Il nostro scopo diventa quello di trovare ψ in W_0 le cui traslate intere formino una base ortonormale di W_0 . Infatti se la troviamo, allora $\psi_{j,k}$ al variare di k formano una base ortonormale di W_j e al variare anche di j di $L^2(\mathbb{R})$, visto che i W_j sono ortogonali.

4.1. Risoluzione e dettagli. Data una MRA $(V_j)_j$, abbiamo denotato con P_j la proiezione da $L^2(\mathbb{R})$ sullo spazio a risoluzione V_j .

Se scegliamo una risoluzione V_j si ha

$$f = P_{j+1}f + (1 - P_{j+1})f \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R})$$

e a sua volta $P_{j+1}f$ si potrà ulteriormente proiettare alle risoluzioni più basse.

Siccome $V_j \subset V_{j+1}$ si ha $P_j P_{j+1} = P_{j+1} P_j = P_j$, quindi

$$P_{j+1}f = P_j P_{j+1}f + (1 - P_j)P_{j+1}f = P_j f + (P_{j+1} - P_j)f$$

da cui

$$f = P_j f + (P_{j+1} - P_j)f + (1 - P_{j+1})f$$

in cui i tre addendi sono a due a due ortogonali. Siccome $P_j f$ è in V_j , $(1 - P_{j+1})f$ è nel complemento ortogonale di V_{j+1} in $L^2(\mathbb{R})$, l'addendo in mezzo rappresenta la proiezione sul complemento ortogonale di V_j in V_{j+1} , ossia sullo spazio W_j .

Indichiamo con D_j la proiezione ortogonale su W_j . Dalla relazione precedente segue che $D_j f = (P_{j+1} - P_j)f$. Possiamo pensare a $D_j f$ come al dettaglio da aggiungere a $P_j f$ per passare alla risoluzione più alta.

Iterando questo procedimento, per ogni f in $L^2(\mathbb{R})$ e ogni $k > 0$ otteniamo la decomposizione in addendi ortogonali

$$f = (1 - P_{k+1})f + \sum_{j=-k}^k (P_{j+1} - P_j)f + P_{-k}f = (1 - P_{k+1})f + \sum_{j=-k}^k D_j f + P_{-k}f.$$

La serie $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|D_j f\|_2^2$ è convergente, perché dalla relazione precedente si ricava che

$$\sum_{j=-k}^k \|D_j f\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

quindi la serie $\sum_{j \in \mathbb{Z}} D_j f$ è convergente in $L^2(\mathbb{R})$, perché è normalmente convergente in uno spazio completo.

Come visto nell'osservazione 3.9, per la densità di $\cup V_j$ in L^2 si ha $\|(1 - P_{k+1})f\|_2^2 \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$.

Quindi anche $P_{-k}f$ converge in $L^2(\mathbb{R})$ a una funzione g ; tale funzione g deve stare in V_j per ogni j , quindi $g = 0$. Abbiamo così più formalmente provato che f è una somma in $L^2(\mathbb{R})$

di addendi ortogonali

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} D_j f \quad \text{ossia } L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j.$$

4.2. Filtro passa-basso. Consideriamo ora la decomposizione $V_0 = V_{-1} \oplus W_{-1}$ e si osservi che $\frac{1}{2}\varphi(\cdot/2)$ è in $V_{-1} \subset V_0$. Siccome le traslate intere di φ sono una base ortonormale di V_0 allora in senso L^2

$$(3.8) \quad \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_k \alpha_k \varphi(x+k),$$

dove $\alpha_k = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{2}\right) \overline{\varphi(x+k)} dx$ e la successione (α_k) è in $\ell^2(\mathbb{Z})$. Ma allora

$$\hat{\varphi}(2\xi) = \hat{\varphi}(\xi) \sum_k \alpha_k e^{2\pi i k \xi} = \hat{\varphi}(\xi) m_0(\xi).$$

Si noti che la funzione m_0 che abbiamo appena definito, ossia

$$m_0(\xi) = \sum_k \alpha_k e^{2\pi i k \xi} \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

è una funzione periodica di periodo 1 e in $L^2([0, 1])$. La funzione m_0 si chiama filtro passa-basso associato alla funzione di scala φ .

ESEMPIO 3.18. Continuando l'esempio 3.8, $V_j = \overline{\text{span}\{1_{[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]}\}}$, scegliamo come funzione di scala $\varphi = 1_{[-1, 0]}$. Siccome

$$\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} 1_{[-2, 0]}(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(x+1)$$

il filtro passa-basso è $m_0(\xi) = \frac{1}{2}(e^{2\pi i \xi} + 1)$.

PROPOSIZIONE 3.19. Il filtro passa-basso m_0 associato a una funzione di scala di una MRA con base ortonormale è in $L^\infty(\mathbb{R})$ e soddisfa

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + 1/2)|^2 = 1 \quad \text{q.o. } \xi.$$

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 3.14 con $g = \varphi$, otteniamo $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\eta + k)|^2 = 1$ per q.o. η . In particolare per $\eta = 2\xi$, abbiamo

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(2\xi + k)|^2 = 1 \quad \text{q.o. } \xi.$$

Per la definizione del filtro $\hat{\varphi}(2\xi + k) = \hat{\varphi}(2(\xi + k/2)) = \hat{\varphi}(\xi + k/2) m_0(\xi + k/2)$ e quindi l'uguaglianza precedente diventa

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k/2)|^2 |m_0(\xi + k/2)|^2 = 1 \quad \text{q.o. } \xi.$$

Separando la somma con k pari e dispari e usando il fatto che m_0 è periodica di periodo 1, troviamo

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k/2)|^2 |m_0(\xi + k/2)|^2 \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k)|^2 |m_0(\xi + k)|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k + 1/2)|^2 |m_0(\xi + k + 1/2)|^2 \\
&= |m_0(\xi)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k)|^2 + |m_0(\xi + 1/2)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 1/2 + k)|^2 \\
&= |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + 1/2)|^2,
\end{aligned}$$

per la solita Proposizione 3.14. Dalla relazione si ricava $|m_0(\xi)|^2 \leq 1$, quindi m_0 è limitata quasi ovunque. \square

Una conseguenza di questa proprietà è il fatto che il filtro $\xi \mapsto m_0(\xi + 1/2)$ è un filtro passa-alto.

4.3. Generazione di wavelet ortonormali. Per determinare ψ cerchiamo di capire meglio come è fatto lo spazio W_{-1} . Questo dipende dalla caratterizzazione degli spazi V_{-1} e V_0 , che vediamo sul lato della trasformata di Fourier. Premettiamo una osservazione.

PROPOSIZIONE 3.20. *Se $h \in L^2[0, 1]$ è 1-periodica e φ è la funzione di scala di una MRA, allora $h\hat{\varphi}$ è in $L^2(\mathbb{R})$.*

DIMOSTRAZIONE. Basta calcolare $\int_{\mathbb{R}} |h\hat{\varphi}|^2 d\xi$ come serie di integrali su intervalli a coordinate intere, usare la periodicità di h , il solito criterio 3.14 e il fatto che h è in $L^2[0, 1]$. In formule:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |h(\xi) \hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi &= \sum_k \int_k^{k+1} |h(\xi) \hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \sum_k \int_0^1 |h(\xi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi + k)|^2 d\xi \\
&= \int_0^1 |h(\xi)|^2 d\xi.
\end{aligned}
\quad \square$$

LEMMA 3.21. *Sia φ la funzione di scala della MRA (V_j) e sia m_0 il filtro passa basso associato. Allora*

$$\begin{aligned}
V_{-1} &= \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}(\xi) = m(2\xi) m_0(\xi) \hat{\varphi}(\xi) \text{ dove } m \in L^2[0, 1] \text{ e 1-periodica} \right\} \\
V_0 &= \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}(\xi) = \ell(\xi) \hat{\varphi}(\xi) \text{ dove } \ell \in L^2[0, 1] \text{ e 1-periodica} \right\}
\end{aligned}$$

Si osservi che, siccome m_0 è limitata, le funzioni m possono essere prese in maniera arbitraria.

DIMOSTRAZIONE. Siccome la descrizione di V_0 è più facile, ci limitiamo a quella di V_{-1} . Si ha che f è in V_{-1} se e solo se $f(2\cdot)$ è in V_0 e per la (5) questo avviene se e solo se esiste $(c_k) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tale che $f(2\cdot) = \sum_k c_k \tau_k \varphi$ con serie convergente in senso $L^2(\mathbb{R})$.

Ancora, questo è equivalente a dire che esiste $(c_k) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tale che $\frac{1}{2}\hat{f}(\frac{\cdot}{2}) = \sum_k c_k \widehat{\tau_k \varphi}$ con serie convergente in senso $L^2(\mathbb{R})$, ovvero

$$\hat{f}(\xi) = \sum_k 2c_k e^{-4\pi i \xi k} \hat{\varphi}(2\xi) = m(2\xi) m_0(\xi) \hat{\varphi}(\xi),$$

dove abbiamo posto $m(\xi) = \sum_k 2c_k e^{-2\pi i \xi k}$, che è una funzione 1-periodica e in $L^2[0, 1]$ perché $(c_k) \in \ell^2(\mathbb{Z})$. \square

Definiamo un operatore $U : V_0 \rightarrow L^2[0, 1]$ ponendo $Uf = \ell$ per f in V_0 , dove ℓ è data dal lemma precedente.

È facile verificare, usando la Proposizione 3.14, che $U : V_0 \rightarrow L^2[0, 1]$ è lineare e unitario, quindi

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle Uf, Ug \rangle_{L^2([0,1])} \quad \forall f, g \in V_0.$$

Se f è in W_{-1} è quindi in V_0 e è ortogonale a V_{-1} . Il prossimo lemma caratterizza W_{-1} .

LEMMA 3.22. *Si ha*

$$W_{-1} = \left\{ f : \hat{f}(\xi) = e^{2\pi i \xi} s(2\xi) \overline{m_0(\xi + 1/2)} \hat{\varphi}(\xi) \text{ dove } s \in L^2[0, 1] \text{ e 1-periodica} \right\}$$

Notiamo che nel passaggio da V_0 a V_{-1} abbiamo adoperato il filtro passa-basso m_0 , mentre W_{-1} è descritto tramite il filtro passa-alto $\xi \mapsto \overline{m_0(\xi + 1/2)}$, quindi ci aspettiamo che V_{-1} contenga la parte con frequenze basse e quindi con le caratteristiche macroscopiche, mentre in W_{-1} sono contenute le frequenze più alte ovvero i dettagli.

DIMOSTRAZIONE. Se f è ortogonale a V_{-1} , allora $\langle f, g \rangle = 0$ per ogni g in V_{-1} . Siccome f è anche in V_0 , utilizzando l'isometria U , possiamo dire che $\ell = Uf$ soddisfa

$$0 = \langle f, g \rangle = \langle Uf, Ug \rangle_{L^2([0,1])} = \int_0^1 \ell(\xi) \overline{Ug(\xi)} d\xi$$

per ogni g in V_{-1} . Poiché Ug è della forma $Ug(\xi) = m(2\xi) m_0(\xi)$ con m 1-periodica e in $L^2[0, 1]$, ne ricaviamo che la condizione di ortogonalità diventa

$$\int_0^1 \ell(\xi) \overline{m(2\xi) m_0(\xi)} d\xi = 0 \quad \forall m \text{ 1-periodica e in } L^2[0, 1].$$

Notiamo che $m(2\cdot)$ è una generica funzione periodica di periodo $1/2$ e $L^2[0, 1/2]$ e possiamo spezzare l'integrale in due parti e usare la periodicità di m per ottenere

$$0 = \int_0^{1/2} \overline{m(2\xi)} [\ell(\xi) \overline{m_0(\xi)} + \ell(\xi + 1/2) \overline{m_0(\xi + 1/2)}] d\xi.$$

Anche la funzione tra parentesi quadre è $L^2[0, 1/2]$ e ha periodo $1/2$; siccome è ortogonale a una qualsiasi periodica di periodo $1/2$ e $L^2[0, 1/2]$ deve essere

$$\ell(\xi) \overline{m_0(\xi)} + \ell(\xi + 1/2) \overline{m_0(\xi + 1/2)} = \det \begin{pmatrix} \ell(\xi) & -\overline{m_0(\xi + 1/2)} \\ \ell(\xi + 1/2) & \overline{m_0(\xi)} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{q.o. } \xi$$

ovvero, per quasi ogni ξ fissato, i vettori $(\ell(\xi), \ell(\xi + 1/2))$ e $(\overline{m_0(\xi + 1/2)}, -\overline{m_0(\xi)})$ sono linearmente dipendenti.

Ricordiamo che per la Proposizione 3.19, il vettore $(\overline{m_0(\xi + 1/2)}, -\overline{m_0(\xi)})$ ha modulo 1 per q.o. ξ , quindi è non nullo. Allora la condizione di lineare dipendenza diventa il fatto che per quasi ogni ξ fissato esiste una costante $\lambda(\xi)$ tale che

$$(3.9) \quad (\ell(\xi), \ell(\xi + 1/2)) = -\lambda(\xi + 1/2) (\overline{m_0(\xi + 1/2)}, -\overline{m_0(\xi)}).$$

In particolare

$$(3.10) \quad \ell(\xi) = -\lambda(\xi + 1/2) \overline{m_0(\xi + 1/2)}.$$

Vediamo le proprietà della funzione λ . Precisamente, proviamo ora che la funzione λ è in $L^2[0, 1]$ e è periodica di periodo 1.

Dalla (3.9) e per la Proposizione 3.19

$$|\lambda(\xi)|^2 = |\ell(\xi + 1/2)|^2 + |\ell(\xi + 1)|^2 \quad \text{q.o. } \xi,$$

quindi λ è in $L^2[0, 1]$, perché lo è ℓ .

Inoltre moltiplicando scalarmente la (3.9) per $(m_0(\xi + 1/2), -m_0(\xi))$ otteniamo

$$\ell(\xi)m_0(\xi + 1/2) - \ell(\xi + 1/2)m_0(\xi) = -\lambda(\xi + 1/2),$$

ovvero

$$\lambda(\xi) = \ell(\xi) m_0(\xi - 1/2) - \ell(\xi - 1/2) m_0(\xi).$$

Per la 1-periodicità di m_0 e ℓ , anche λ è 1-periodica. Inoltre è semplice verificare che

$$\lambda(\xi + 1/2) = -\lambda(\xi).$$

Sia s definita da

$$s(\xi) = e^{-i\pi\xi} \lambda(\xi/2) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Si verifica che s è in $L^2[0, 1]$ e 1-periodica.

Inoltre dalla (3.10) ricaviamo che

$$\ell(\xi) = -e^{2\pi i(\xi+1/2)} s(2\xi + 1) \overline{m_0(\xi + 1/2)} = e^{2\pi i\xi} s(2\xi) \overline{m_0(\xi + 1/2)}$$

come volevasi.

Viceversa, è facile verificare che una f siffatta è ortogonale a V_{-1} (esercizio). \square

Riscalando tutto otteniamo la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 3.23. *Sia φ la funzione di scala per la MRA (V_j) e sia m_0 il filtro passa-basso associato. Allora*

$$W_0 = \left\{ f : \hat{f}(2\xi) = e^{2\pi i\xi} s(2\xi) \overline{m_0(\xi + 1/2)} \hat{\varphi}(\xi) \text{ dove } s \in L^2[0, 1] \text{ e } 1\text{-periodica} \right\}$$

e W_0 è invariante per traslazioni intere. Inoltre

$$W_j = \left\{ f : \hat{f}(2^{j+1}\xi) = e^{2\pi i\xi} s(2\xi) \overline{m_0(\xi + 1/2)} \hat{\varphi}(\xi) \text{ dove } s \in L^2[0, 1] \text{ e } 1\text{-periodica} \right\}.$$

L'unico fatto nuovo è l'invarianza per traslazioni intere, che segue banalmente: se f è della forma scritta, $\tau_k f$ è della stessa forma corrispondentemente a $s_k(\xi) = e^{-2\pi i k \xi} s(\xi)$.

A questo punto, per esempio in corrispondenza a $s(\xi) = 1$, otteniamo l'ondina madre. È il contenuto del prossimo teorema.

TEOREMA 3.24. *Sia φ la funzione di scala per l'MRA (V_j) e sia m_0 il filtro passa-basso associato. Una funzione ψ in W_0 è una wavelet ortonormale per $L^2(\mathbb{R})$ se e solo se*

$$(3.11) \quad \hat{\psi}(2\xi) = e^{2\pi i\xi} \nu(2\xi) \overline{m_0(\xi + 1/2)} \hat{\varphi}(\xi),$$

per q.o. ξ dove ν è una funzione misurabile 1-periodica e $|\nu(\xi)| = 1$ q.o.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\hat{\psi}$ sia come nella formula (3.11). Siccome ψ è di quella particolare forma, ψ è in W_0 .

Verifichiamo che le traslate intere di ψ generano W_0 : se g è una funzione in W_0 , allora è di una forma particolare,

$$\hat{g}(2\xi) = e^{2\pi i\xi} s(2\xi) \overline{m_0(\xi + 1/2)} \hat{\varphi}(\xi) \text{ dove } s \in L^2[0, 1] \text{ e } 1\text{-periodica.}$$

Quindi

$$\hat{g}(\xi) = e^{\pi i\xi} s(\xi) |\nu(\xi)|^2 \overline{m_0((\xi + 1)/2)} \hat{\varphi}(\xi/2) = s(\xi) \overline{\nu(\xi)} \hat{\psi}(\xi).$$

Ora $s\bar{\nu}$ è in $L^2[0, 1]$ e 1-periodica, quindi $s(\xi)\bar{\nu}(\xi) = \sum_k c_k e^{-2\pi i k \xi}$ con $(c_k) \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Invertendo la trasformata di Fourier otteniamo

$$g(x) = \sum_k c_k \psi(x - k).$$

Il fatto che il sistema $\{\tau_k \psi : k \in \mathbb{Z}\}$ sia ortonormale segue dalla Proposizione 3.14, separando la somma sugli interi pari e dispari, usando la periodicità e la Proposizione 3.19:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + k)|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}((\xi + k)/2)|^2 |m_0((\xi + k + 1)/2)|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi/2 + k)|^2 |m_0((\xi + 1)/2)|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}((\xi + 1)/2 + k)|^2 |m_0(\xi/2)|^2 \\ &= |m_0((\xi + 1)/2)|^2 + |m_0(\xi/2)|^2 = 1. \end{aligned}$$

Si noti che abbiamo anche usato il fatto che $\tau_k \varphi$ generano un sistema ortonormale.

Quindi $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ è una base ortonormale per W_j . Siccome i W_j sono ortogonali e la loro somma è $L^2(\mathbb{R})$, abbiamo ottenuto una base ortonormale per $L^2(\mathbb{R})$.

Viceversa, verifichiamo ora che tutte le wavelet ortonormali in W_0 sono di questa forma.

Siccome ψ è in W_0 , la ψ deve essere della forma data, per una opportuna ν in $L^2[0,1]$ e 1-periodica. Dall'ortonormalità delle traslate segue

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + k)|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\nu(\xi)|^2 |\hat{\varphi}((\xi + k)/2)|^2 |m_0((\xi + k + 1)/2)|^2 \\ &= |\nu(\xi)|^2 \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi/2 + k)|^2 |m_0((\xi + 1)/2)|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}((\xi + 1)/2 + k)|^2 |m_0(\xi/2)|^2 \right) \\ &= |\nu(\xi)|^2 (|m_0((\xi + 1)/2)|^2 + |m_0(\xi/2)|^2) \\ &= |\nu(\xi)|^2, \end{aligned}$$

ovvero $|\nu(\xi)| = 1$ q.o. □

OSSERVAZIONE 3.25. Se prendiamo $\nu = 1$, allora in termini dei coefficienti (α_k) del filtro m_0 si ha

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(2\xi) &= e^{2\pi i \xi} \overline{m_0(\xi + 1/2)} \hat{\varphi}(\xi) \\ &= e^{2\pi i \xi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{2\pi i k(\xi + 1/2)} \hat{\varphi}(\xi) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_k} e^{-2\pi i(k-1)\xi} \hat{\varphi}(\xi) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_k} \widehat{\tau_{k-1}\varphi}(\xi) \end{aligned}$$

quindi $\frac{1}{2} \psi(\frac{x}{2}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_k} \tau_{k-1}\varphi(x)$ o anche

$$(3.12) \quad \psi(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_k} \varphi(2x - (k - 1)).$$

ESEMPIO 3.26. Continuando l'esempio 3.8, calcoliamo la wavelet associata (corrispondente alla scelta $\nu = 1$). Possiamo farlo tramite la relazione $\hat{\psi}(2\xi) = e^{2\pi i \xi} \overline{m_0(\xi + 1/2)} \hat{\varphi}(\xi)$ oppure dalla formula (3.12).

Tenuto conto che $\varphi(x) = 1_{[-1,0)}(x)$ e $\hat{\varphi}(\xi) = e^{i\pi\xi} \text{sinc}(\pi\xi)$, $m_0(\xi) = e^{i\pi\xi} \cos(\pi\xi)$, si ottiene che

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{\pi i \xi} e^{-i\pi(\xi/2 + 1/2)} \cos(\pi(\xi/2 + 1/2)) e^{i\pi\xi} \text{sinc}(\pi\xi) = i e^{\pi i \xi} \frac{\sin^2(\pi\xi/2)}{\pi\xi/2}.$$

Antitrasformando si ottiene $\psi = 1_{[-1,-1/2)} - 1_{[-1/2,0)}$.

Più semplicemente, dalla formula (3.12), considerando che solo due tra i coefficienti α_k sono non nulli: $\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{2}$ e si ottiene

$$\psi(x) = 2 \sum_k (-1)^k \overline{\alpha_k} \varphi(2x - (k-1)) = \varphi(2x+1) - \varphi(2x) = 1_{[-1, -1/2)}(x) - 1_{[-1/2, 0)}(x)$$

come prima.

È la Haar wavelet già incontrata (a meno di traslazione). Siccome è ben localizzata in tempo, il filtro passa-basso è molto semplice, perché si descrive tramite una somma finita. Questo rende comoda l'analisi e la sintesi tramite questa wavelet. Tuttavia la sua trasformata ha un insufficiente decadimento all'infinito, perché la wavelet di Haar non è regolare.

OSSERVAZIONE 3.27. Si può anche calcolare $|\varphi|$ in termini di $|\psi|$. Infatti per quasi ogni ξ

$$|\hat{\varphi}(\xi)|^2 = |\hat{\varphi}(\xi)|^2 (|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + 1/2)|^2) = |\hat{\varphi}(2\xi)|^2 + |\hat{\psi}(2\xi)|^2$$

Iterando questa formula arriviamo a

$$|\hat{\varphi}(\xi)|^2 = |\hat{\varphi}(2^N \xi)|^2 + \sum_{j=1}^N |\hat{\psi}(2^j \xi)|^2.$$

La successione $(\sum_{j=1}^N |\hat{\psi}(2^j \xi)|^2)_N$ è crescente e, siccome $|\hat{\varphi}(\xi)| \leq 1$, è anche limitata. Pertanto ammette limite. Quindi anche la successione $(|\hat{\varphi}(2^N \xi)|^2)_N$ ammette limite.

Per il lemma di Fatou

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_N |\hat{\varphi}(2^N \xi)|^2 d\xi \leq \liminf_N \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(2^N \xi)|^2 d\xi = \liminf_N \frac{1}{2^N} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = 0.$$

Quindi $\lim_{N \rightarrow \infty} |\hat{\varphi}(2^N \xi)|^2 = 0$ per q.o. ξ e abbiamo la relazione

$$|\hat{\varphi}(\xi)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\hat{\psi}(2^j \xi)|^2 \quad \text{q.o. } \xi \in \mathbb{R}.$$

4.4. Wavelet ortonormali e condizione di ammissibilità. Se supponiamo che φ sia anche $L^1(\mathbb{R})$, allora $\hat{\varphi}$ è continua in 0 e necessariamente $\hat{\varphi}(0) \neq 0$ (per il Teorema 3.11 questo equivale alla richiesta (4) della MRA).

Sempre per il Teorema 3.11, si ha $|\hat{\varphi}(0)| = 1$ e allora anche m_0 è continua in un intorno di 0 e $m_0(0) = 1$. Siccome $|m_0(\xi + 1/2)|^2 = 1 - |m_0(\xi)|^2$, la funzione $|m_0|^2$ è continua anche in un intorno di $1/2$ e $m_0(1/2) = 0$.

Sia ψ data da $\hat{\psi}(\xi) = e^{\pi i \xi} \nu(\xi) \overline{m_0((\xi+1)/2)} \hat{\varphi}(\xi/2)$, con $|\nu(\xi)| = 1$.

Ne ricaviamo che $|\hat{\psi}|$ è continua in 0 e $\hat{\psi}(0) = 0$. Questa non è la condizione di ammissibilità, ma vi si avvicina molto.

Si può dimostrare che una wavelet ortonormale ψ verifica la condizione

$$(3.13) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^k \xi)|^2 = 1 \quad \text{q.o. } \xi,$$

da cui si ricava la condizione di ammissibilità.

Infatti dalla relazione (3.13) si ottiene $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^k \xi)|^2 / \xi = 1/\xi$ e integrando sull'intervallo $[1, 2]$ otteniamo

$$\begin{aligned} \log 2 &= \int_1^2 \frac{1}{\xi} d\xi \\ &= \int_1^2 \frac{\sum_k |\hat{\psi}(\pm 2^k \xi)|^2}{\xi} d\xi \\ &= \sum_k \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{|\hat{\psi}(\pm \xi)|^2}{\xi} d\xi \\ &= \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\pm \xi)|^2}{\xi} d\xi \end{aligned}$$

ovvero la condizione di ammissibilità (3.2).

Nella sezione successiva vedremo che le wavelet a banda limitata soddisfano la condizione (3.13). La relazione è vera per tutte le wavelet ortonormali, ma la dimostrazione non è semplice (si veda [6, Capitolo 7]).

5. Wavelet ortonormali a banda limitata

In questa sezione ci occupiamo inizialmente di descrivere alcune famiglie di wavelet ortonormali. Abbiamo già visto l'esempio di analisi multirisoluzione che genera la Haar wavelet. In questa sezione vedremo la Shannon wavelet e la Meyer wavelet, che provengono da analisi multirisoluzione. Entrambe queste wavelet sono a banda limitata.

Successivamente mostreremo che le wavelet ortonormali a banda limitata soddisfano la condizione (3.13).

Infine vedremo la wavelet di Journé, che è un esempio di una wavelet ortonormale a banda limitata ma che non è associata ad alcuna analisi multirisoluzione.

5.1. La Shannon wavelet. Questo esempio è duale rispetto a quello di Haar. Si ottiene una wavelet ben localizzata in frequenza, ma sparsa in tempo.

Si ricordi che per il Corollario 3.15, per ottenere una base ortonormale costruita tramite traslate intere di una funzione caratteristica 1_K , l'insieme K deve avere misura 1.

Si prenda φ tale che $\hat{\varphi} = 1_K$ dove $K = [-1/2, 1/2)$, quindi $\varphi(x) = \text{sinc}(\pi x)$. Le traslate intere di φ formano un sistema ortonormale.

Si prenda $V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}(\xi) = 0 \text{ se } \xi \notin [-2^{j-1}, 2^{j-1}) \right\}$. È semplice verificare che (V_j) formano una MRA con funzione di scala φ .

Il filtro passa-basso m_0 è una funzione 1-periodica e tale che

$$1_{[-1/4, 1/4)}(\xi) = \hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi) \hat{\varphi}(\xi) = m_0(\xi) 1_{[-1/2, 1/2)}(\xi)$$

Quindi $m_0(\xi) = 1_{[-1/4, 1/4)}$ per $\xi \in [-1/2, 1/2)$ e estesa in modo da essere periodica di periodo 1, quindi per ξ reale

$$m_0(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 1_{[-1/4, 1/4)}(\xi + k).$$

Si ha $W_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}(\xi) = 0 \text{ se } \xi \notin [-2^j, -2^{j-1}] \cup [2^{j-1}, 2^j] \right\}$.

La Shannon wavelet si determina più semplicemente con la formula sulla trasformata

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(2\xi) &= e^{2\pi i \xi} \sum_k 1_{[-1/4, 1/4)}(\xi + \frac{1}{2} + k) 1_K(\xi) \\ &= e^{2\pi i \xi} 1_K(\xi) (1_{[-1/4, 1/4)}(\xi + \frac{1}{2}) + 1_{[-1/4, 1/4)}(\xi - \frac{1}{2})) \\ \hat{\psi}(\xi) &= e^{\pi i \xi} (1_{[-1, -1/2]}(\xi) + 1_{[1/2, 1]}(\xi)). \end{aligned}$$

Ovviamente non è ben localizzata in tempo:

$$\psi(x) = \frac{\sin(2\pi(x + 1/2)) - \sin(\pi(x + 1/2))}{\pi(x + 1/2)}.$$

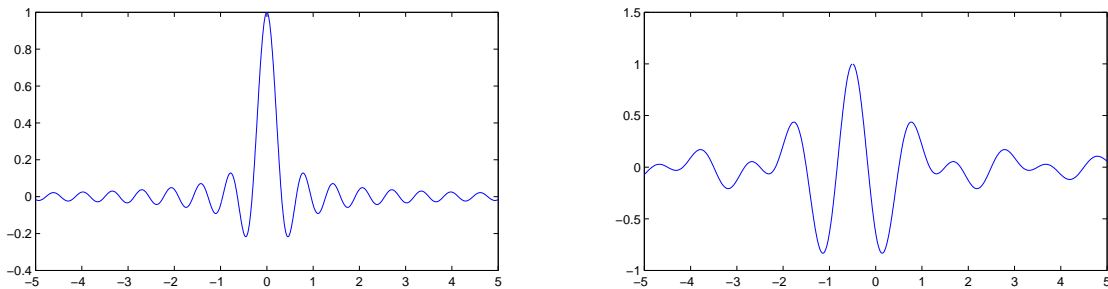


FIGURA 3.28. A sinistra la funzione di scala, a destra la Shannon wavelet

5.2. Meyer Wavelet. Si tratta di una versione regolarizzata della Shannon wavelet, quindi è ben localizzata in frequenza come la Shannon wavelet, ma, grazie al fatto che risulta a decrescenza rapida, è meglio localizzata in tempo.

Partiamo col costruire una funzione $\beta \in C^\infty$ che goda delle seguenti proprietà

$$\begin{aligned} 0 &\leq \beta(x) \leq 1 \\ \beta(x) &= 1 - \beta(1-x) \quad \forall x \\ \beta(x) &= 0 \quad x \leq 0 \quad \beta(x) = 1 \quad x \geq 1. \end{aligned}$$

Ad esempio, sia $\gamma(x) = \exp(-\frac{1}{x(1-x)})$ se $0 < x < 1$ e $\gamma(x) = 0$ altrove e poniamo

$$\beta(x) = \frac{\int_{-\infty}^x \gamma(t) dt}{\int_0^1 \gamma(t) dt}.$$

Siccome $\gamma(x) = \gamma(1-x)$, è facile vedere che β soddisfa le proprietà richieste.

A questo punto poniamo

$$\chi(\xi) = \begin{cases} 1 & |\xi| \leq 1/3 \\ \cos[\frac{\pi}{2}\beta(3|\xi| - 1)] & |\xi| \in (1/3, 2/3) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Allora χ è liscia, pari, ha supporto in $[-2/3, 2/3]$, i suoi valori sono tra 0 e 1 e, con un po' di calcoli, si può verificare che χ soddisfa la relazione

$$\chi^2(\xi) + \chi^2(\xi - 1) = 1 \quad \forall \xi \in [0, 1].$$

Prendiamo φ tale che $\hat{\varphi} = \chi$ e per ogni j sia V_j il sottospazio chiuso in $L^2(\mathbb{R})$ generato dalle traslate di $\varphi(2^j \cdot)$. In formule

$$V_j = \overline{\text{span} \{x \mapsto \varphi(2^j x - k) : k \in \mathbb{Z}\}}.$$

Proviamo ora che abbiamo costruito una MRA.

La proprietà (5) è immediata, usando la Proposizione 3.14. Infatti,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\chi(\xi + k)|^2 = \chi^2(\xi) + \chi^2(\xi - 1) = 1 \quad \forall \xi \in [0, 1]$$

e, siccome $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\cdot + k)|^2$ è periodica di periodo 1, l'identità vale per ogni ξ .

La condizione (2) è immediata dalla definizione, la condizione (3) discenderà dalla validità delle altre, la (4) dipende dal fatto che $\hat{\varphi} = 1$ in un intorno di 0 e dal Corollario 3.12.

La condizione più difficile da verificare è la (1), ossia il fatto che $V_j \subset V_{j+1}$. Ad esempio, proviamo che $V_{-1} \subset V_0$. Ragionando come nel Lemma 3.21, si verifica che

$$V_0 = \left\{ f : \hat{f}(\xi) = \ell(\xi) \chi(\xi), \text{ per qualche } \ell \in L^2[0, 1], \text{ 1-periodica} \right\}$$

Quindi f è in V_{-1} se e solo se $f(2 \cdot)$ è in V_0 , ovvero se e solo se esiste m in $L^2[0, 1]$ e 1-periodica tale che

$$\hat{f}\left(\frac{\xi}{2}\right) = m(\xi) \chi(\xi).$$

Mostriamo che allora f è anche in V_0 : dalla formula precedente segue $\hat{f}(\xi) = m(2\xi) \chi(2\xi)$.

Definiamo la funzione m_0 ponendo

$$m_0(\xi) = \chi(2\xi)/\chi(\xi) \quad \forall \xi \quad |\xi| \leq 1/2.$$

Allora $m_0 \in C^\infty[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ e quindi $L^2[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ e limitata; chiamiamo ancora m_0 la sua estensione a una funzione 1-periodica (quindi m_0 è in $L^2[0, 1]$, limitata, 1-periodica).

Notiamo che $m_0(\xi) = 0$ per $\frac{1}{3} \leq |\xi| \leq \frac{1}{2}$. Si ha

$$\chi(2\xi) = m_0(\xi) \chi(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Infatti la relazione è vera se $|\xi| \leq 1/2$ e si noti che $\chi(2\xi) = \chi(\xi) = 0$ se $|\xi| \geq 2/3$ per cui rimane da controllare che la relazione funzioni anche per $|\xi| \in [1/2, 2/3]$, dove $\chi(2\xi) = 0$; d'altra parte, se $\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{2}{3}$ si ha $-\frac{1}{2} \leq \xi - 1 \leq -\frac{1}{3}$ e quindi $m_0(\xi) = m_0(\xi - 1) = 0$ e analogamente se $-\frac{2}{3} \leq \xi \leq -\frac{1}{2}$ si ha $\frac{1}{3} \leq \xi + 1 \leq \frac{1}{2}$ e quindi $m_0(\xi) = m_0(\xi + 1) = 0$.

A prescindere dall'espressione di m_0 , si ha

$$\hat{f}(\xi) = m(2\xi) m_0(\xi) \chi(\xi) = \ell(\xi) \chi(\xi)$$

dove $\ell(\xi) = m(2\xi) m_0(\xi)$ è 1-periodica, $L^2[0, 1]$. Questo significa che f è in V_0 .

La verifica con j arbitrario è analoga.

La funzione m_0 è il filtro passa-basso associato alla funzione di scala φ ; si noti che siccome $\chi(2\xi) = 0$ se $|\xi| \geq 1/3$ e se $|\xi| \leq 1/3$ si ha $\chi(\xi) = 1$, allora se $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ si ha $m_0(\xi) = \chi(2\xi)$, da cui

$$m_0(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi(2(\xi + k)).$$

La wavelet associata è

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{\pi i \xi} \overline{m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)} \hat{\varphi}(\xi/2),$$

quindi

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{\pi i \xi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi(\xi + 2k + 1) \chi(\xi/2) = e^{\pi i \xi} (\chi(\xi + 1) + \chi(\xi - 1)) \chi(\xi/2) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Si noti che la Meyer wavelet ha trasformata liscia e a supporto compatto. Questo comporta una buona localizzazione in frequenza, ma, rispetto alla Shannon wavelet, una miglior localizzazione in tempo, perché ψ risulta a decadimento rapido.

5.3. Una proprietà delle wavelet a banda limitata. Stabiliamo il fatto che le wavelet a banda limitata sono ammissibili. Questo comporta che le wavelet ortonormali forniscono una discretizzazione (senza perdita) della CWT.

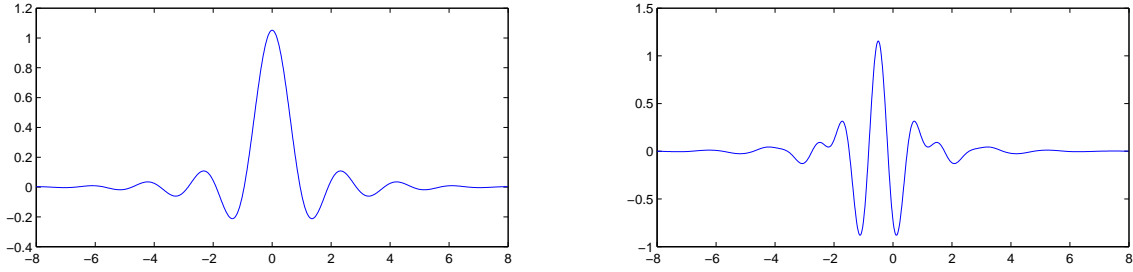


FIGURA 3.29. A sinistra la funzione di scala, a destra la Meyer Wavelet

PROPOSIZIONE 3.28. *Sia ψ una wavelet ortonormale a banda limitata. Allora*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j \xi)|^2 = 1 \quad \text{q.o. } \xi \in \mathbb{R}.$$

La dimostrazione si basa sui seguenti risultati.

LEMMA 3.29. *Sia ψ una wavelet ortonormale e sia D_j il proiettore ortogonale sul sottospazio chiuso $W_j = \overline{\text{sp}}\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$. Allora*

$$\widehat{D_j f}(\xi) = \hat{\psi}(2^{-j} \xi) \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2^j \ell) \overline{\hat{\psi}(2^{-j} \xi + \ell)}.$$

DIMOSTRAZIONE. Siccome $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ è una base ortonormale di W_j e per la polarizzazione della formula di Plancherel si ha

$$\begin{aligned} \widehat{D_j f} &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \right)^\wedge \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \hat{f}, \widehat{\psi_{j,k}} \rangle \widehat{\psi_{j,k}} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \hat{f}, \gamma_{j,k} \rangle \gamma_{j,k}, \end{aligned}$$

dove abbiamo posto $\gamma_{j,k} = \widehat{\psi_{j,k}}$. In formule

$$\gamma_{j,k}(\xi) = 2^{-j/2} e^{-2\pi i 2^{-j} k \xi} \hat{\psi}(2^{-j} \xi) = E_j^k(\xi) \hat{\psi}(2^{-j} \xi),$$

dove $\left\{ \xi \mapsto E_j^k(\xi) = 2^{-j/2} e^{-2\pi i 2^{-j} k \xi} : k \in \mathbb{Z} \right\}$ è una base ortonormale delle funzioni periodiche di periodo 2^j e $L^2[0, 2^j]$.

Ora

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{f}, \gamma_{j,k} \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(2^{-j}\xi)} \overline{E_j^k(\xi)} d\xi \\
&= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_{2^j \ell}^{2^j(\ell+1)} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(2^{-j}\xi)} \overline{E_j^k(\xi)} d\xi \\
&= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \widehat{f}(\xi + 2^j \ell) \overline{\widehat{\psi}(2^{-j}\xi + \ell)} \overline{E_j^k(\xi)} d\xi \\
&= \int_0^1 F_j(\xi) \overline{E_j^k(\xi)} d\xi,
\end{aligned}$$

dove

$$F_j(\xi) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + 2^j \ell) \overline{\widehat{\psi}(2^{-j}\xi + \ell)}$$

è periodica di periodo 2^j e $L^2[0, 2^j]$. Ne segue che in senso L^2

$$F_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle F_j, E_j^k \rangle_{L^2[0, 2^j]} E_j^k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \widehat{f}, \gamma_{j,k} \rangle E_j^k.$$

Più esplicitamente,

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + 2^j \ell) \overline{\widehat{\psi}(2^{-j}\xi + \ell)} = F_j(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \widehat{f}, \gamma_{j,k} \rangle E_j^k(\xi).$$

Ricordando che $\gamma_{j,k} = E_j^k \widehat{\psi}(2^{-j}\cdot)$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\widehat{D_j f}(\xi) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \widehat{f}, \gamma_{j,k} \rangle \gamma_{j,k}(\xi) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \widehat{f}, \gamma_{j,k} \rangle \widehat{\psi}(2^{-j}\xi) E_j^k(\xi) \\
&= \widehat{\psi}(2^{-j}\xi) \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + 2^j \ell) \overline{\widehat{\psi}(2^{-j}\xi + \ell)} \quad \square
\end{aligned}$$

LEMMA 3.30. *Supponiamo che ψ sia una wavelet ortonormale a banda limitata in $(-2^J, 2^J)$ e sia f in $L^2(\mathbb{R})$ tale che il supporto di \widehat{f} sia nell'intervallo $I = (a, b)$, di ampiezza $b-a \leq 2^{-J-1}$ e tale che $I \cap [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] = \emptyset$. Allora*

$$\widehat{D_j f}(\xi) = \widehat{f}(\xi) |\widehat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2 \quad \text{q.o. } \xi \in I.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia ξ in I . Se $-j \leq J+1$, allora $\xi + 2^j \ell$ non è nel supporto di \widehat{f} per ogni $\ell \neq 0$. Quindi la serie del Lemma 3.29 si riduce al solo addendo con $\ell = 0$.

Se invece $-j > J+1$, allora $|2^{-j}\xi| \geq 2^{J+1}|\xi| > 2^J$, perché $I \cap [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] = \emptyset$. Ne deduciamo che $\widehat{\psi}(2^{-j}\xi) = 0$.

In entrambi i casi, $\widehat{D_j f}(\xi) = \widehat{f}(\xi) |\widehat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2$. □

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 3.28. Iniziamo a verificare che

$$\omega(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j \xi)|^2 = 1 \quad \text{q.o. } \xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(-1, -\frac{1}{2}\right).$$

La tesi seguirà dal fatto che per ogni n in \mathbb{Z} si ha $\omega(2^n \xi) = \omega(\xi)$.

Notiamo che possiamo scrivere, a meno di un insieme finito di punti, l'intervallo $(\frac{1}{2}, 1)$ (o il suo simmetrico) come unione di 2^J intervalli aperti di ampiezza 2^{-J-1} che soddisfano le ipotesi del Lemma 3.30. Chiamiamo I uno di questi intervalli e osserviamo che è sufficiente dimostrare la tesi per ξ in I .

Sia f una funzione in $L^2(\mathbb{R})$ tale che il supporto di \hat{f} sia nell'intervallo I . Allora, siccome abbiamo decomposto $L^2(\mathbb{R})$ nella somma diretta ortogonale $\oplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$ e i proiettori decrescono la norma, osserviamo che

$$\text{a) } \left\| \sum_{j=-M}^M D_j f \right\|_2 \leq \|f\|_2 \quad \forall M \geq 0 \quad \text{b) } \left\| f - \sum_{j=-M}^M D_j f \right\|_2 \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0$$

e quindi per la formula di Plancherel

$$\text{a') } \left\| \sum_{j=-M}^M \widehat{D_j f} \right\|_2 \leq \|\hat{f}\|_2 \quad \forall M \geq 0 \quad \text{b') } \left\| \hat{f} - \sum_{j=-M}^M \widehat{D_j f} \right\|_2 \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0$$

Dall'osservazione a') e dal Lemma 3.30 segue che

$$\begin{aligned} \int_I |\hat{f}(\xi)|^2 \left(\sum_{j=-M}^M |\hat{\psi}(2^{-j} \xi)|^2 \right)^2 d\xi &= \int_I \left| \sum_{j=-M}^M \hat{f}(\xi) |\hat{\psi}(2^{-j} \xi)|^2 \right|^2 d\xi \\ &= \int_I \left| \sum_{j=-M}^M \widehat{D_j f}(\xi) \right|^2 d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{j=-M}^M \widehat{D_j f}(\xi) \right|^2 d\xi = \left\| \sum_{j=-M}^M \widehat{D_j f} \right\|_2^2 \\ &\leq \|\hat{f}\|_2^2 = \int_I |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà della funzione f , concludiamo che per quasi ogni ξ in I e per ogni M

$$\sum_{j=-M}^M |\hat{\psi}(2^{-j} \xi)|^2 \leq 1.$$

Questo implica che la serie a termini non negativi $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^{-j} \xi)|^2$ è convergente per quasi ogni ξ in I e la sua somma è minore o uguale a 1.

Per il Lemma di Fatou e l'osservazione b')

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_I |\hat{f}(\xi)|^2 \left(1 - \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2 \right)^2 d\xi \\
&= \int_I \liminf_{M \rightarrow \infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \left(1 - \sum_{j=-M}^M |\hat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2 \right)^2 d\xi \\
&\leq \liminf_{M \rightarrow \infty} \int_I |\hat{f}(\xi)|^2 \left(1 - \sum_{j=-M}^M |\hat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2 \right)^2 d\xi \\
&= \liminf_{M \rightarrow \infty} \int_I \left| \hat{f}(\xi) - \sum_{j=-M}^M \widehat{D_j f}(\xi) \right|^2 d\xi \\
&\leq \liminf_{M \rightarrow \infty} \left\| \hat{f} - \sum_{j=-M}^M \widehat{D_j f} \right\|_2^2 = 0.
\end{aligned}$$

Allora $1 - \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2 = 0$ per quasi ogni ξ in I . □

5.4. Journé wavelet. Questo esempio mostra che non tutte le wavelet ortonormali sono associate a una MRA.

Iniziamo col caratterizzare gli insiemi misurabili K le cui funzioni indicatrici sono trasformate di wavelet ortonormali. Ricordando il Corollario 3.15, occorre che $|K| = 1$.

PROPOSIZIONE 3.31. *Sia $K \subset \mathbb{R}$ un insieme misurabile tale che $|K| = 1$. Allora ψ tale che $\hat{\psi} = 1_K$ è una wavelet ortonormale se e solo se valgono*

- i) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} 1_K(\xi + k) = 1$ per q.o. $\xi \in \mathbb{R}$;
- ii) $\sum_{j \in \mathbb{Z}} 1_K(2^j \xi) = 1$ per q.o. $\xi \in \mathbb{R}$.

Notiamo che la condizione i) è equivalente al fatto che i traslati dell'insieme K si possano sovrapporre al più su un insieme di misura nulla e la loro unione sia praticamente \mathbb{R} . In formule: $\cup_{k \in \mathbb{Z}} (K + k) = \mathbb{R} \setminus E$ con $|E| = 0$ e se $k \neq \ell$ allora $|(K + k) \cap (K + \ell)| = 0$.

Analogamente, la condizione ii) è equivalente al fatto che se $i \neq j$ allora $|2^{-i}K \cap 2^{-j}K| = 0$ (ovvero che i due insiemi $2^{-i}K$ e $2^{-j}K$ si possano sovrapporre al più su un insieme di misura nulla) e che $\cup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{-j}K = \mathbb{R} \setminus E$ con $|E| = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che ψ sia una wavelet ortonormale. Allora per la Proposizione 3.14, vale la condizione i). Per K limitato, la condizione ii) è conseguenza della

Proposizione 3.28. In generale, per verificare che vale anche ii), si procede per assurdo: supponiamo innanzi tutto che esista un insieme F di misura positiva tale che $\sum_{j \in \mathbb{Z}} 1_K(2^j \xi) > 1$ per $\xi \in F$ (in seguito ci occuperemo del caso in cui $\sum_{j \in \mathbb{Z}} 1_K(2^j \xi) < 1$).

Allora esistono $i \neq j$ tali che $|2^{-i}K \cap 2^{-j}K| > 0$. Per la formula di Plancherel polarizzata otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \psi_{-j,0}, \psi_{-i,0} \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} 2^{-(i+j)/2} \psi(2^{-i}x) \overline{\psi(2^{-j}x)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} 2^{(i+j)/2} \hat{\psi}(2^i \xi) \overline{\hat{\psi}(2^j \xi)} d\xi \\ &= 2^{(i+j)/2} \int_{\mathbb{R}} 1_K(2^i x) 1_K(2^j x) dx \\ &= 2^{(i+j)/2} |2^{-i}K \cap 2^{-j}K| > 0. \end{aligned}$$

Ne deduciamo che $\sum_{j \in \mathbb{Z}} 1_K(2^j \xi) \leq 1$ per q.o. $\xi \in \mathbb{R}$.

D'altra parte se esistesse un insieme F di misura positiva tale che $\sum_{j \in \mathbb{Z}} 1_K(2^j \xi) < 1$ per ξ in F (e possiamo supporre che F sia di misura finita), allora $F \cap 2^{-j}K = \emptyset$ per ogni j . Quindi la funzione f tale che $\hat{f} = 1_F$ sarebbe in $L^2(\mathbb{R})$, non nulla, ma ortogonale a tutte le wavelet generate da ψ , infatti

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} \psi_{-j,k}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} 1_F(\xi) 2^{j/2} 1_K(2^j \xi) e^{i2^j kx} d\xi = 0.$$

Ma allora $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ non sarebbe base ortonormale di $L^2(\mathbb{R})$.

Quindi $\sum_{j \in \mathbb{Z}} 1_K(2^j \xi) = 1$ per quasi ogni ξ .

Viceversa, mostriamo che le condizioni i) e ii) sono sufficienti a garantire che ψ sia una wavelet ortonormale.

Mostriamo innanzi tutto che se vale i) allora $\{1_K e^{2\pi i n x} : n \in \mathbb{Z}\}$ è una base ortonormale di $L^2(K)$. Questo segue dall'ortonormalità

$$\begin{aligned} \int_K e^{2\pi i n x} e^{-2\pi i m x} dx &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i(n-m)\xi} 1_K(\xi) d\xi \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_j^{j+1} e^{2\pi i(n-m)\xi} 1_K(\xi) d\xi \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_0^1 e^{2\pi i(n-m)\xi} 1_K(\xi + j) d\xi \\ &= \int_0^1 e^{2\pi i(n-m)\xi} d\xi = \delta_{n,m} \end{aligned}$$

e dalla completezza: la condizione i) vuole infatti dire che a parte insiemi di misura nulla i traslati di K coprono tutto \mathbb{R} una volta sola. Quindi se $f \neq 0$ è in $L^2(K)$, la estendiamo banalmente a \mathbb{R} ponendo $f(x) = 0$ se $x \notin K$ e consideriamo la periodizzata

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k) \quad \text{q.o. } x.$$

Siccome gli insiemi $K+k$ non si sovrappongono, la funzione \tilde{f} è ben definita e non nulla. Inoltre $|\tilde{f}(x)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(x+k)|^2$ per quasi ogni x . Ne ricaviamo che \tilde{f} è 1-periodica e in $L^2[0, 1]$, infatti

$$\int_0^1 |\tilde{f}(x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 |f(x+k)|^2 dx = \|f\|_2^2.$$

Per la completezza del sistema trigonometrico esiste n t.c.

$$0 \neq \int_0^1 \tilde{f}(x) e^{2\pi i n x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i n x} dx = \int_K f(x) e^{2\pi i n x} dx.$$

Ne deduciamo che (a j fissato) il sistema $\left\{ x \mapsto 2^{-j/2} 1_K(2^{-j}x) e^{2\pi i n 2^{-j}x} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ è una base ortonormale di $L^2(2^j K)$.

Usiamo ora la condizione ii) per verificare che la famiglia

$$\left\{ x \mapsto 2^{-j/2} 1_K(2^{-j}x) e^{2\pi i n 2^{-j}x} : n, j \in \mathbb{Z} \right\}$$

è una base ortonormale per $L^2(\mathbb{R})$. La tesi seguirà dal teorema di Plancherel, notando che

$$\widehat{\psi_{j,n}}(x) = 2^{-j/2} 1_K(2^{-j}x) e^{2\pi i n 2^{-j}x}.$$

Se $j \neq j'$

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\psi_{j,k}}, \widehat{\psi_{j',k'}} \rangle &= \int_{\mathbb{R}} 2^{-(j+j')/2} 1_K(2^{-j}x) e^{2\pi i k 2^{-j}x} 1_K(2^{-j'}x) e^{-2\pi i k' 2^{-j'}x} dx \\ &= \int_{2^j K \cap 2^{j'} K} \dots = 0 \end{aligned}$$

perché l'insieme su cui si integra ha misura nulla per la condizione ii). Ne deduciamo che abbiamo un sistema ortonormale.

Se poi f è in $L^2(\mathbb{R})$, allora $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j$, dove $f_j(x) = f(x) 1_K(2^{-j}x)$ è in $L^2(2^j K)$ e si usa la completezza già vista. \square

Costruiamo ora la wavelet ortonormale di Journé. Sia

$$K = \left[-\frac{16}{7}, -2\right) \cup \left[-\frac{1}{2}, -\frac{2}{7}\right) \cup \left(\frac{2}{7}, \frac{1}{2}\right] \cup \left(2, \frac{16}{7}\right]$$

e definiamo ψ ponendo $\widehat{\psi} = 1_K$. È facile verificare che $|K| = 1$. Inoltre ψ è una wavelet ortonormale se sono soddisfatte le condizioni della Proposizione 3.31.

Scriviamo $K = K_{-2} \cup K_{-1} \cup K_1 \cup K_2$ dove

$$K_{-2} = [-\frac{16}{7}, -2) \quad K_{-1} = [-\frac{1}{2}, -\frac{2}{7}) \quad K_1 = (\frac{2}{7}, \frac{1}{2}] \quad K_2 = (2, \frac{16}{7}]$$

e notiamo che

$$K_2 - 2 = (0, \frac{2}{7}] \quad K_{-2} + 2 = [-\frac{2}{7}, 0) \quad (K_{-2} + 2) \cup K_{-1} \cup K_1 \cup (K_2 - 2) = [-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}].$$

Allora per ogni ξ in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 1_K(\xi + k) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} 1_{K_{-2}}(\xi + k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} 1_{K_{-1} \cup K_1}(\xi + k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} 1_{K_2}(\xi + k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} 1_{K_{-2}}(\xi + k - 2) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} 1_{K_{-1} \cup K_1}(\xi + k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} 1_{K_2}(\xi + k + 2) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} 1_{K_{-2}+2}(\xi + k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} 1_{K_{-1} \cup K_1}(\xi + k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} 1_{K_2-2}(\xi + k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} 1_{(K_{-2}+2) \cup K_{-1} \cup K_1 \cup (K_2-2)}(\xi + k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} 1_{[-1/2, 0) \cup (0, 1/2]}(\xi + k) = 1, \end{aligned}$$

ovvero vale i).

Inoltre notiamo che

$$\frac{1}{4}K_{\pm 2} = \{\pm \xi : \xi \in (\frac{1}{2}, \frac{4}{7}]\} \quad 2K_{\pm 1} = \{\pm \xi : \xi \in (\frac{4}{7}, 1]\} \quad (\frac{1}{4}K_{\pm 2}) \cup (2K_{\pm 1}) = \{\pm \xi : \xi \in (\frac{1}{2}, 1]\}$$

quindi ad esempio

$$1_{(1/2, 1]}(\xi) = 1_{K_2}(4x) + 1_{K_1}(\frac{\xi}{2}),$$

da cui per $\xi > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} 1_K(2^j \xi) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} 1_{K_2}(2^j \xi) + \sum_{j \in \mathbb{Z}} 1_{K_1}(2^j \xi) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} 1_{K_2}(4 \cdot 2^{j-1} \xi) + \sum_{j \in \mathbb{Z}} 1_{K_1}(2^{j-1} \xi) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} 1_{\frac{1}{4}K_2}(2^j \xi) + \sum_{j \in \mathbb{Z}} 1_{2K_1}(2^j \xi) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} 1_{\frac{1}{4}K_2 \cup 2K_1}(2^j \xi) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} 1_{(1/2, 1]}(2^j \xi) = 1, \end{aligned}$$

ovvero vale ii) per $\xi > 0$. La verifica per $\xi < 0$ è analoga. Per la Proposizione 3.31, ψ è una wavelet ortonormale.

Vediamo ora che ψ non può essere associata a alcuna MRA. Procediamo per assurdo. Se lo fosse, per l'osservazione 3.27, il modulo della trasformata della funzione di scala sarebbe

dato da

$$|\hat{\varphi}(\xi)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\hat{\psi}(2^j \xi)|^2 \quad \text{q.o. } \xi.$$

Sia $\xi > 0$. Si ha

$$\begin{aligned} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} 1_K(2^j \xi) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} 1_{K_2}(2^j \xi) + \sum_{j=1}^{\infty} 1_{K_1}(2^j \xi) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} 1_{K_2}(4 \cdot 2^{j-2} \xi) + \sum_{j=1}^{\infty} 1_{K_1}(2^{j+1} \xi/2) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} 1_{\frac{1}{4}K_2}(2^{j-2} \xi) + \sum_{j=1}^{\infty} 1_{2K_1}(2^{j+1} \xi) \\ &= \sum_{j=-1}^{\infty} 1_{\frac{1}{4}K_2}(2^j \xi) + \sum_{j=2}^{\infty} 1_{2K_1}(2^j \xi) \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} 1_{(1/2,1]}(2^j \xi) + 1_{\frac{1}{4}K_2}(\xi/2) + 1_{\frac{1}{4}K_2}(\xi) + 1_{\frac{1}{4}K_2}(2\xi) \\ &= 1_{(0,1/4]}(\xi) + 1_{(1,8/7]}(\xi) + 1_{(1/2,4/7]}(\xi) + 1_{(1/4,2/7]}(\xi) \end{aligned}$$

quindi, per parità,

$$|\hat{\varphi}(\xi)|^2 = \begin{cases} 1 & |\xi| \in (0, \frac{2}{7}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{4}{7}] \cup [1, \frac{8}{7}] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ma allora le traslate di φ non possono generare un sistema ortonormale, perché se $\xi \in (0, \frac{1}{7})$ si ha $\xi + 1 \in (1, \frac{8}{7})$ e quindi

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + j)|^2 \geq 2 > 1 \quad \text{q.o. } \xi \in (0, \frac{1}{7}).$$

Le wavelet che non sono associabili a MRA sono in un certo senso patologiche. Si può dimostrare infatti che [12, Capitolo 7] se ψ è a supporto compatto allora ψ proviene da MRA; inoltre tutte le wavelet ortonormali ψ tali che $|\hat{\psi}|$ è continua e $|\hat{\psi}(\xi)| = O(|\xi|^{-1/2-\alpha})$ per $\xi \rightarrow \infty$ con $\alpha > 0$ sono associabili a MRA.

6. L’algoritmo di Mallat

Abbiamo detto che se $(V_j)_j$ è una MRA, denotiamo con W_j il complemento ortogonale di V_j in V_{j+1} . Con P_j denotiamo la proiezione da $L^2(\mathbb{R})$ a V_j e con D_j la proiezione ortogonale su W_j . In questa sezione descriviamo l’algoritmo di Mallat, che è un algoritmo molto veloce in grado di decomporre un segnale nei coefficienti della base ortonormale data dalla wavelet.

Nelle applicazioni (digitali) f è un segnale che in partenza è già campionato. Possiamo pensare f come costante su un intervallo di lunghezza fissata 2^{-J} e di conoscere i campioni $f(\frac{k}{2^J})$. Questo si adatta perfettamente all'esempio dell'ondina di Haar, assegnando a f la risoluzione dello spazio V_J e scrivendo quindi

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{2^J}\right) 1_{[2^{-J}(k-1), 2^{-J}k)}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{2^J}\right) 1_{[-1,0)}(2^J x - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{J,k} \varphi_{J,k}(x)$$

dove $a_{J,k} = 2^{-J/2} f\left(\frac{k}{2^J}\right)$.

Molti segnali possono essere trattati come funzioni a banda limitata. In tal caso, per il Teorema di Shannon, possiamo ricostruire un segnale f a banda in $[-2^{J-1}, 2^{J-1}]$ tramite i suoi campioni

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{2^J}\right) \text{sinc}\left(2^J \pi(x - \frac{k}{2^J})\right).$$

Questa formula descrive il fatto che se supponiamo che f sia nello spazio V_J dell'esempio della MRA di Shannon allora, nelle notazioni dell'esempio, otteniamo

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{2^J}\right) \varphi(2^J \pi x - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{J,k} \varphi_{J,k}(x)$$

dove $a_{J,k} = 2^{-J/2} f\left(\frac{k}{2^J}\right)$.

In una MRA generale, il segnale f in ingresso, di cui si conoscano i campioni $f\left(\frac{k}{2^J}\right)$, sarà confuso con $P_J f$ e quindi deve poter essere scritto nella forma

$$f(x) \sim P_J f(x) = \sum_k a_{J,k} 2^{J/2} \varphi(2^J x - k),$$

dove i coefficienti di approssimazione $(a_{J,k})_k$ devono essere noti, in $\ell^2(\mathbb{Z})$ e ricavabili, con buona approssimazione, dai campioni $f\left(\frac{k}{2^J}\right)$.

Una maniera semplice di realizzare questo è scegliere, come nel caso di Haar e Shannon, $a_{J,k} = 2^{-J/2} f\left(\frac{k}{2^J}\right)$. Possiamo giustificare questa scelta come segue. Supponiamo J grande, ovvero di partire da un segnale alla massima risoluzione possibile. Dato un segnale f , i suoi coefficienti di approssimazione al livello J sono

$$a_{J,k} = \langle f, \varphi_{J,k} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) 2^{J/2} \overline{\varphi(2^J x - k)} dx.$$

Se f è continua e φ ha una buona localizzazione, allora $\varphi(2^J \cdot - k)$ è localizzata in un piccolo intervallo attorno a $\frac{k}{2^J}$. Inoltre $\hat{\varphi}(0) = 1$, quindi

$$a_{J,k} \sim 2^{J/2} f\left(\frac{k}{2^J}\right) \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(2^J x - k)} dx = 2^{-J/2} f\left(\frac{k}{2^J}\right) \hat{\varphi}(0) = 2^{-J/2} f\left(\frac{k}{2^J}\right).$$

Ci sono altri modi per associare ai campioni $f\left(\frac{k}{2^J}\right)$ i coefficienti $(a_{J,k})_k$. Si veda per esempio il libro di S. Mallat [9, cap VII, problem 7.6].

Siccome $V_J = V_{J-1} \oplus W_{J-1}$ decomponiamo il segnale nella somma della sua approssimazione a una scala più bassa (più rozza) e dei dettagli:

$$f(x) = P_J f(x) = P_{J-1} f(x) + D_{J-1} f(x).$$

Allo stesso modo operiamo sull’approssimazione $P_{J-1} f$, introducendo approssimazioni sempre più rozze e i relativi dettagli:

$$f(x) = P_{J-2} f(x) + D_{J-2} f(x) + D_{J-1} f(x).$$

Il processo si arresta quando arriviamo a un certo livello di approssimazione, ad esempio per fissare le idee al livello 0:

$$f(x) = P_0 f(x) + \sum_{j=0}^{J-1} D_j f(x).$$

La comodità e velocità dell’algoritmo di Mallat risiede nel fatto che vi è un modo particolarmente semplice di descrivere le approssimazioni e i dettagli usando il filtro passa-basso.

Ricordiamo che $m_0(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{2\pi i k \xi}$ e le formule (3.8) e (3.12) che riportiamo di seguito:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{x}{2}\right) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \varphi(x+k) \\ \psi(x) &= 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \bar{\alpha}_k \varphi(2x - (k-1)). \end{aligned}$$

Queste formule, dilatate e traslate, danno

$$\begin{aligned} \varphi(2^{j-1}x - k) &= 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n \varphi(2^j x - 2k + n) \\ \psi(2^{j-1}x - k) &= 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \bar{\alpha}_n \varphi(2^j x - 2k - (n-1)). \end{aligned}$$

In termini dei vettori delle basi ortonormali possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \varphi_{j-1,k}(x) &= \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n \varphi_{j,2k-n}(x) \\ \psi_{j-1,k}(x) &= \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \bar{\alpha}_n \varphi_{j,2k+n-1}(x). \end{aligned}$$

Denotiamo con $(a_{j,k})_k$ e con $(d_{j,k})_k$ rispettivamente le successioni dei coefficienti di approssimazione e dei dettagli al livello j . In formule, le successioni $(a_{j,k})_k$ e $(d_{j,k})_k$ sono quelle per cui

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \varphi_{j,k} \quad D_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}.$$

Se in ingresso abbiamo $P_J f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{J,k} \rangle \varphi_{J,k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{J,k} \varphi_{J,k}$, ovvero in ingresso abbiamo la successione $(a_{J,k})_k$, allora possiamo generare i coefficienti di approssimazione $(a_{J-1,k})_k$ al livello $J-1$ e i dettagli $(d_{J-1,k})_k$ al livello $J-1$. Infatti

$$a_{J-1,k} = \langle f, \varphi_{J-1,k} \rangle = \langle f, \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n \varphi_{J,2k-n} \rangle = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n \langle f, \varphi_{J,2k-n} \rangle = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n a_{J,2k-n}$$

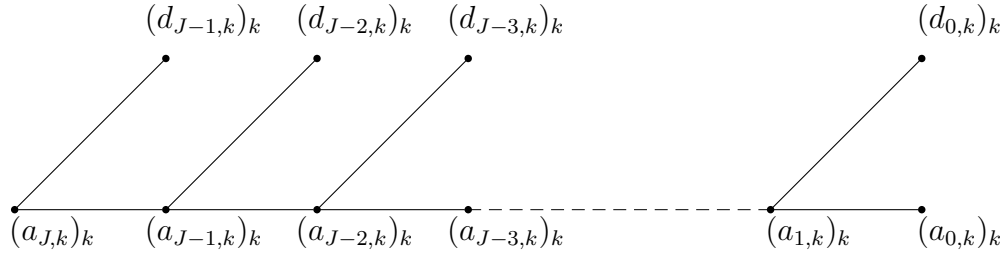
e i dettagli si calcolano tramite

$$d_{J-1,k} = \langle f, \psi_{J-1,k} \rangle = \langle f, \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \bar{\alpha}_n \varphi_{J,2k+n-1} \rangle = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \alpha_n a_{J,2k+n-1}.$$

Viceversa, se in ingresso abbiamo i coefficienti di approssimazione $(a_{J-1,k})_k$ al livello $J-1$ e i dettagli $(d_{J-1,k})_k$ al livello $J-1$, possiamo ricostruire i coefficienti di approssimazione $(a_{J,k})_k$ al livello superiore J . Infatti,

$$\begin{aligned} a_{J,k} &= \langle P_J f, \varphi_{J,k} \rangle = \langle P_{J-1} f + D_{J-1} f, \varphi_{J,k} \rangle \\ &= \left\langle \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{J-1,n} \varphi_{J-1,n} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_{J-1,n} \psi_{J-1,n}, \varphi_{J,k} \right\rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (a_{J-1,n} \langle \varphi_{J-1,n}, \varphi_{J,k} \rangle + d_{J-1,n} \langle \psi_{J-1,n}, \varphi_{J,k} \rangle) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sqrt{2} (a_{J-1,n} \alpha_{2n-k} + (-1)^{k+1} d_{J-1,n} \bar{\alpha}_{k-2n+1}). \end{aligned}$$

L'algoritmo di analisi (e ricostruzione) di Mallat solitamente è descritto con un albero:



Riassumiamo quanto abbiamo visto nel seguente teorema. Introduciamo per brevità le seguenti notazioni. Data una successione doppia $x = (x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ denotiamo con \tilde{x} e \dot{x} le seguenti successioni

$$\tilde{x}(n) = x(-n) \quad \dot{x}(n) = \begin{cases} x(n/2) & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Inoltre se $x = (x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ e $y = (y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ sono due successioni in $\ell^2(\mathbb{Z})$ indichiamo con $x \star y$ la loro convoluzione discreta, ossia

$$x \star y(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) y(k-n) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

TEOREMA 3.32. *Sia data una MRA (V_j) con funzione di scala φ e filtro passa-basso $m_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{2\pi i k}$. Sia ψ la wavelet ortonormale associata secondo la (3.12). Sia f in $L^2(\mathbb{R})$ e per ogni j in \mathbb{Z} definiamo le successioni α , β , a_j e d_j mediante*

$$\alpha(k) = \alpha_k \quad \beta(k) = (-1)^k \alpha_{-k} \quad a_j(k) = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \quad d_j(k) = \langle f, \psi_{j,k} \rangle \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Allora quando decomponiamo il segnale

$$a_{J-1}(k) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{\alpha(n)} a_J(2k - n) = \sqrt{2} \bar{\alpha} \star a_J(2k)$$

$$d_{J-1}(k) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \alpha(n) a_J(2k + n - 1) = \sqrt{2} \beta \star a_J(2k - 1).$$

Quando ricostruiamo il segnale

$$a_J(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sqrt{2} (a_{J-1}(n) \alpha(2n - k) + (-1)^{k+1} d_{J-1}(n) \bar{\alpha}(k - 2n + 1))$$

$$= \sqrt{2} (\tilde{\alpha} \star \dot{a}_{J-1} + \bar{\beta} \star \dot{d}_{J-1})(k).$$

L'algorithmo di decomposizione quindi prevede una convoluzione discreta e un downsampling (vengono presi solo i coefficienti di posto pari della convoluzione discreta). L'algorithmo di ricostruzione prevede invece un upsampling (realizzato tramite l'operatore $x \mapsto \dot{x}$) e una convoluzione discreta.

ESEMPIO 3.33. Nel caso della MRA di Haar, il filtro passa-basso è caratterizzato dall'aver

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_n = 0 \quad \forall n \neq 0, 1,$$

quindi l'algorithmo di decomposizione è molto semplice

$$a_{J-1,k} = \frac{\sqrt{2}}{2} (a_{J,2k} + a_{J,2k-1})$$

$$d_{J-1,k} = \frac{\sqrt{2}}{2} (a_{J,2k-1} - a_{J,2k}).$$

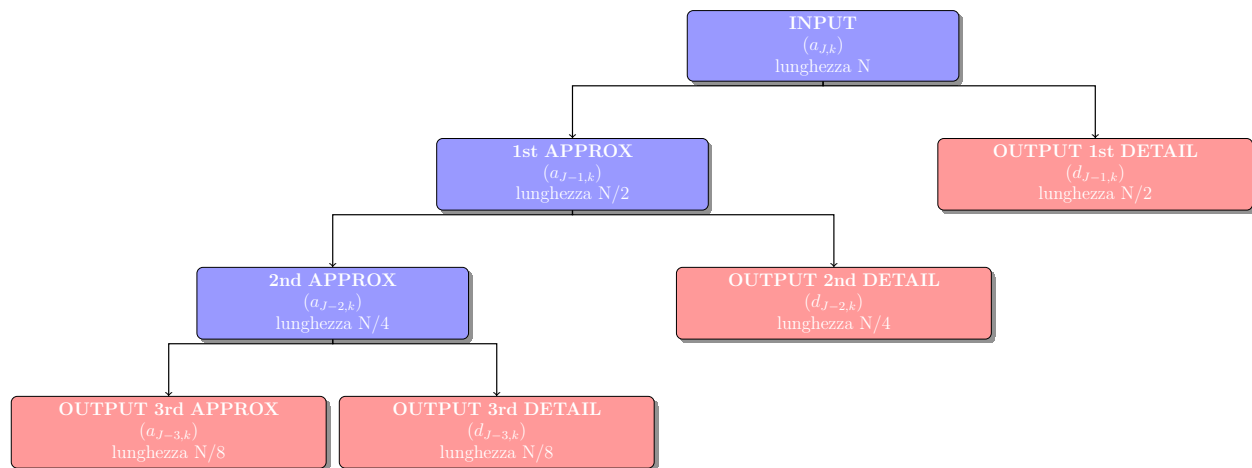
L'algorithmo di ricostruzione è

$$\begin{cases} a_{J,2n} = \frac{\sqrt{2}}{2} (a_{J-1,n} - d_{J-1,n}) \\ a_{J,2n-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} (a_{J-1,n} + d_{J-1,n}) \end{cases}$$

come si poteva facilmente calcolare anche dall'algorithmo di decomposizione.

Da questo esempio si capisce che le wavelet come la Haar sono interessanti, perché il loro filtro passa-basso è un FIR (Finite Impulse Response ovvero la serie si riduce a una somma finita). Tuttavia, la Haar wavelet è troppo poco regolare, quindi la sua trasformata di Fourier non decade abbastanza rapidamente e l'analisi in frequenza non dà buoni risultati.

In generale non avremo delle serie, ma delle somme finite, perché il segnale che immetteremo nel computer sarà un vettore con N entrate. Avremo $N/2$ coefficienti di approssimazione al livello successivo e $N/2$ coefficienti di dettaglio.

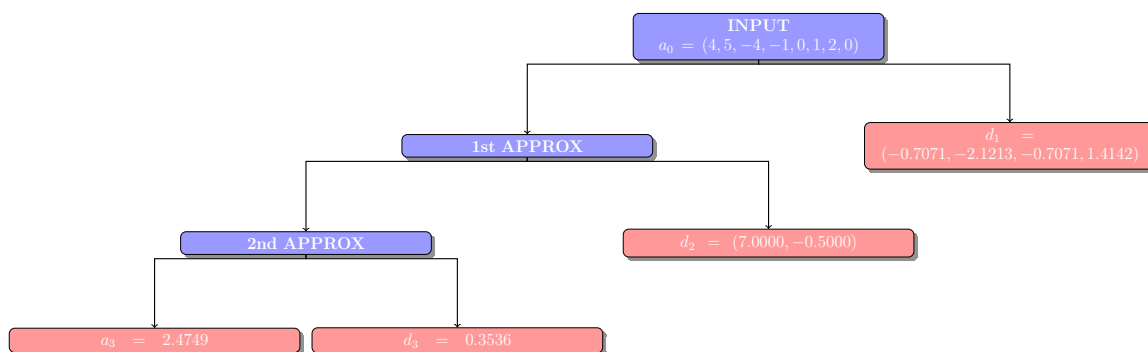


Nella figura abbiamo rappresentato mediante un albero l'algoritmo di decomposizione di livello 3. Come vedete l'output consiste di $N/2 + N/4 + N/8 + N/8 = N$ coefficienti, quindi il numero di coefficienti rimane invariato e da questo punto di vista non c'è risparmio. Il vantaggio è che i coefficienti molto piccoli potranno essere trascurati, con buona conservazione delle caratteristiche del segnale. Da qui il risparmio nella codifica dei dati.

A titolo di esempio, consideriamo un segnale molto semplice, dato dal vettore

$$X = (4, 5, -4, -1, 0, 1, 2, 0)$$

che ha 8 entrate e scriviamone la decomposizione di livello 3 (oltre non si potrà andare) mediante la Haar wavelet. Risulta



Mostriamo che la decomposizione che abbiamo trovato è un modo efficiente di descrivere il segnale, eliminando uno a uno i coefficienti a partire dal più piccolo (in valore assoluto). Nella figura 3.30 il primo grafico è quello del segnale X . Il secondo grafico è quello del segnale che ricostruiamo annullando il coefficiente $d_3 = 0.3536$, che è il più piccolo fra tutti. Notiamo che le caratteristiche del segnale sono pressoché invariate. Ripetiamo la stessa operazione, annullando questa volta il secondo coefficiente del secondo dettaglio, ovvero $d_2(2) = -0.5000$. Ricostruendo, otteniamo il segnale che ha il terzo grafico, che conserva ancora tutte le caratteristiche salienti del segnale originale, anche se abbiamo un risparmio

del 25% sui coefficienti. Questo esempio mostra che le wavelet sono uno strumento valido per comprimere un segnale.

Nei grafici dopo al terzo abbiamo mano a mano eliminato tutti i coefficienti, sempre seguendo la stessa politica (ovvero eliminando ogni volta il coefficiente più piccolo in valore assoluto). L'ultimo grafico rappresenta la media del segnale.

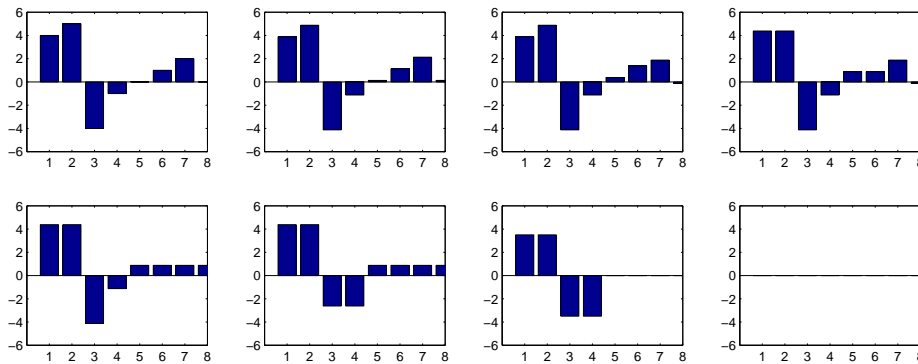


FIGURA 3.30. La compressione di un segnale discreto

6.1. Rimozione del rumore. Abbiamo già discusso nel caso della CWT come possano essere studiati i bordi, ovvero le asperità di un segnale. Un altro frequente utilizzo delle wavelet è nella rimozione di rumore. Questo è un tipico problema inverso, in cui il segnale f che vorremmo è ricevuto sporcato da un rumore, di solito bianco e di norma piccola, quindi in realtà riceviamo la funzione

$$g(t) = f(t) + \varepsilon n(t) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nota la funzione g , vorremmo ricavare il segnale originale f . Non abbiamo molte informazioni sul rumore, tranne il fatto che è una funzione di quadrato integrabile, a media nulla e varianza fissata; $\varepsilon > 0$ si suppone essere piccolo.

Per recuperare il segnale f , almeno approssimativamente, dobbiamo sfruttare altre informazioni che possiamo avere sul segnale (ad esempio: è banda?)

Una maniera di procedere molto semplicistica è dire che il rumore di solito si concentra nelle scale più fini (che corrispondono alle frequenze più alte). Quindi si potrebbe rimuovere il rumore semplicemente proiettando in uno spazio di approssimazione più basso.

Questo procedimento di solito toglie abbastanza bene il rumore, tuttavia elimina anche le caratteristiche fini del segnale presenti alle scale piccole. L'idea si basa sul fatto che solitamente il rumore non viene considerato molto dalle wavelet, quindi si suppone che responsabili del rumore siano i coefficienti piccoli. Ci sono molte tecniche per eliminare i coefficienti piccoli; la più banale è il hard-thresholding, in cui i coefficienti al di sotto di una certa soglia vengono semplicemente annullati. Una tecnica leggermente più fine è il

soft-thresholding, che consiste nel porre uguali a zero i coefficienti al di sotto di una certa soglia e abbassare anche gli altri in modo lineare. Ovvero, se s indica la nostra soglia

$$\text{soft - thresholding}(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq s \\ \text{sgn}(x)(|x| - s)_+ & |x| > s. \end{cases}$$

In questo procedimento è di fondamentale importanza la scelta della soglia. Esistono molti metodi, elaborati statisticamente, per predire quale possa essere una buona soglia per un segnale dato.

Nella figura 3.31 vediamo un esempio in cui abbiamo adoperato hard-thresholding per rimuovere il rumore dal segnale originale.

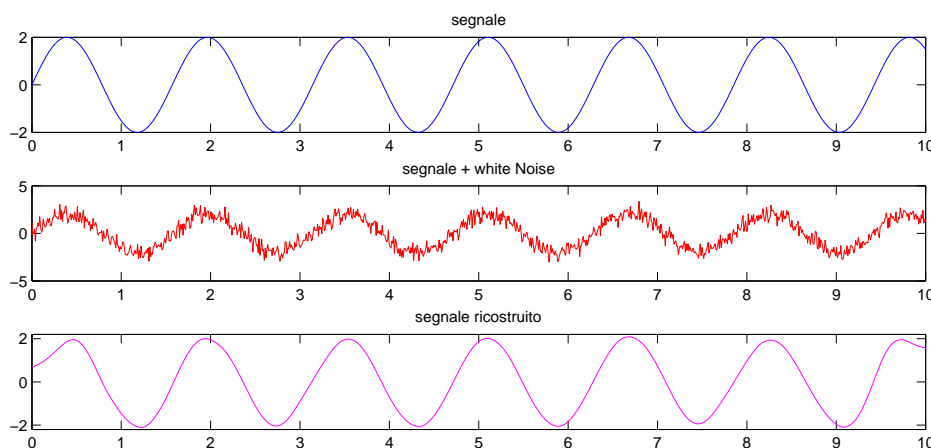


FIGURA 3.31. Rimozione del rumore

7. Altri esempi di wavelet ortonormali

Dopo così tanti anni esistono tantissime famiglie di wavelet, ciascuna si adatta meglio a un particolare scopo.

Il maggior interesse è su quelle a supporto compatto, il cui filtro passa-basso è un FIR. Per il momento abbiamo visto solo la Haar. Una famiglia interessante per la regolarità è quella generata dalle Splines.

7.1. Spline di ordine 1 e la Franklin wavelet. Iniziamo con una facile generalizzazione della MRA di Haar, in cui prendiamo funzioni un pochino più regolari.

Sia V_0 lo spazio delle spline di ordine 1 e in $L^2(\mathbb{R})$ ovvero il sottospazio di $L^2(\mathbb{R})$ formato dalle funzioni continue su \mathbb{R} e lineari quando ristrette a un intervallo della forma $[k, k + 1]$ con k intero.

V_0 è un sottospazio chiuso di $L^2(\mathbb{R})$. Infatti è facile verificare che

$$V_0^N = \{f|_{[-N, N]} : f \in V_0\} \quad N = 1, 2, \dots$$

è uno spazio vettoriale di dimensione finita (precisamente $2N + 1$). Quindi è un sottospazio chiuso di $L^2([-N, N])$.

Sia allora $(f_n)_n$ una successione di elementi di V_0 convergente a f in $L^2(\mathbb{R})$. Per ogni intero positivo N la restrizione della funzione f_n all'intervallo $[-N, N]$ è in V_0^N e inoltre

$$\int_{-N}^N |f_n(x) - f(x)|^2 dx \leq \|f_n - f\|_2^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ossia $f_n|_{[-N, N]}$ converge a $f|_{[-N, N]}$ in $L^2([-N, N])$. Siccome V_0^N è un sottospazio chiuso di $L^2([-N, N])$, si ha che $f|_{[-N, N]}$ è in V_0^N . Per l'arbitrarietà di N , concludiamo che f è continua su \mathbb{R} e lineare su ogni intervallo della forma $[k, k + 1]$ con k intero.

Definiamo V_j come lo spazio delle funzioni f di $L^2(\mathbb{R})$ tali che $f(2^{-j}\cdot)$ è in V_0 . Quindi le funzioni in V_j sono funzioni continue su \mathbb{R} e lineari quando ristrette a un intervallo della forma $[2^{-j}k, 2^{-j}(k + 1)]$ con k intero.

È facile verificare che le proprietà della MRA (1), (2), (4) sono soddisfatte.

Per la (5) dobbiamo trovare una funzione di scala. Ne seguirà anche la (3).

Notiamo che se f è in V_0 , allora f è completamente determinata dai valori $f(k)$. Inoltre la successione $f(k)$ deve essere in $\ell^2(\mathbb{Z})$; viceversa ogni successione in $\ell^2(\mathbb{Z})$ genera una f . Infatti

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} |f(x)|^2 dx &= \int_0^1 |(1-t)f(k) + tf(k+1)|^2 dt \\ &= \int_0^1 [(1-t)^2|f(k)|^2 + t^2|f(k+1)|^2 + 2\operatorname{Re}(f(k)\overline{f(k+1)})t(1-t)] dt \\ &= \frac{|f(k)|^2 + |f(k+1)|^2 + \operatorname{Re}(f(k)\overline{f(k+1)})}{3} \end{aligned}$$

Siccome

$$|\operatorname{Re}(f(k)\overline{f(k+1)})| \leq \frac{1}{2}(|f(k)|^2 + |f(k+1)|^2),$$

abbiamo

$$\frac{1}{6}(|f(k)|^2 + |f(k+1)|^2) \leq \int_k^{k+1} |f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2}(|f(k)|^2 + |f(k+1)|^2),$$

da cui

$$\frac{1}{3} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(k)|^2 \leq \|f\|_2^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(k)|^2.$$

Sia φ la box spline di ordine 1, ovvero

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

È facile verificare che ogni funzione di V_0 ha la rappresentazione

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \varphi(x - k + 1)$$

e quindi $\{\tau_k \varphi : k \in \mathbb{Z}\}$ è una base di Riesz per V_0 .

Risulta $\varphi = 1_{[0,1]} * 1_{[0,1]}$, quindi

$$\hat{\varphi}(\xi) = e^{-2\pi i \xi} \text{sinc}^2(\pi \xi)$$

e ogni f in V_0 è quindi caratterizzata dalla condizione

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \widehat{\tau_{k-1} \varphi}(\xi) = e^{-2\pi i \xi} \text{sinc}^2(\pi \xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) e^{-2\pi i (k-1)\xi} = \text{sinc}^2(\pi \xi) \ell_f(\xi)$$

dove $\ell_f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) e^{-2\pi i k \cdot}$ è una funzione 1-periodica e $L^2([0, 1])$, con norma comparabile a quella di f . Analogamente, ogni f in V_1 è caratterizzata dalla condizione

$$\hat{f}(\xi) = \text{sinc}^2(\pi \xi / 2) \ell_f(\xi)$$

dove ℓ_f è una funzione 2-periodica e $L^2([0, 2])$.

Per trovare una funzione γ che sia una funzione di scala ortonormale, occorre calcolare

$$\begin{aligned} [\sigma_\varphi(\xi)]^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\text{sinc}^2(\pi(\xi + k))|^2 \\ &= \frac{1}{\pi^4} \sin^4(\pi \xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\xi + k)^4} \\ &= \frac{1}{6\pi^4} \sin^4(\pi \xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{d^2}{d\xi^2} \frac{1}{(\xi + k)^2} \\ &= \frac{1}{6\pi^4} \sin^4(\pi \xi) \frac{d^2}{d\xi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\xi + k)^2} \\ &= \frac{1}{6\pi^2} \sin^4(\pi \xi) \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\frac{1}{\sin^2(\pi \xi)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sin^2 \pi(\xi + k)}{\pi^2(\xi + k)^2} \right) \\ &= \frac{1}{6\pi^2} \sin^4(\pi \xi) \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\frac{1}{\sin^2(\pi \xi)} \right) \\ &= \frac{1}{3} (\sin^2(\pi \xi) + 3 \cos^2(\pi \xi)) = 1 - \frac{2}{3} \sin^2(\pi \xi), \end{aligned}$$

dove la penultima uguaglianza deriva dal fatto che le traslate intere di $1_{[-1/2, 1/2]}$ generano un sistema ortonormale.

Scegliamo quindi γ tale che

$$\hat{\gamma}(\xi) = \frac{\hat{\varphi}(\xi)}{\sigma_\varphi(\xi)} = e^{-2\pi i \xi} \operatorname{sinc}^2(\pi \xi) \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2(\pi \xi)\right)^{-1/2}$$

Ne ricaviamo che il filtro passa-basso è

$$m_0(\xi) = e^{-2\pi i \xi} \cos^2(\pi \xi) \left(\frac{1 - \frac{2}{3} \sin^2(\pi \xi)}{1 - \frac{2}{3} \sin^2(2\pi \xi)} \right)^{1/2}$$

e una wavelet associata (detta di Franklin) è

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{\pi i \xi} \overline{m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)} \hat{\gamma}\left(\frac{\xi}{2}\right) = -e^{\pi i \xi} \frac{\sin^4(\pi \xi/2)}{(\pi \xi/2)^2} \left(\frac{1 - \frac{2}{3} \cos^2(\pi \xi/2)}{(1 - \frac{2}{3} \sin^2(\pi \xi))(1 - \frac{2}{3} \sin^2(\pi \xi/2))} \right)^{1/2}.$$

Si può dimostrare che ψ decade esponenzialmente.

7.2. Splines di ordine più alto e Battle–Lemarie’ wavelet. Diciamo che una funzione è C^{-1} se è continua a tratti e l’insieme dei punti di discontinuità non ha punti di accumulazione.

Per ogni $m \geq 1$, una spline di ordine m con nodi in \mathbb{Z} è una funzione di classe $C^{m-2}(\mathbb{R})$ che ristretta a ogni intervallo del tipo $[k, k+1)$ coincida con un polinomio di grado al più $m-1$.

Ad esempio, una spline di ordine 1 è una funzione costante su $[k, k+1)$. Una spline di ordine 2 è una funzione continua che su ogni $[k, k+1)$ è lineare.

Possiamo considerare anche splines con nodi in $2^j \mathbb{Z}$, j fissato.

Si può dimostrare che gli spazi V_j formano una MRA dove V_j è lo spazio delle splines di ordine m fissato con nodi in $2^{-j} \mathbb{Z}$ che stanno anche in L^2 . In questo caso la funzione di scala è $\varphi(x) = *^m 1_{[0,1]}$ (convoluzione fatta m volte della funzione caratteristica dell’intervallo $[0, 1]$). È a supporto compatto e le sue traslate formano una base di Riesz di V_0 . Se però ortonormalizziamo perdiamo la proprietà del supporto compatto. Da qui l’interesse verso le basi di Riesz.

7.3. Daubechies wavelet. Verso la fine degli anni 80, I. Daubechies ha trovato wavelet a supporto compatto e con regolarità preassegnata. Questo risultato ha dato un forte impulso allo sviluppo della teoria delle wavelet, che in quegli anni sono state particolarmente adoperate per quasi ogni problema.

Si noti che dall’olomorfia della trasformata di una funzione C_c^∞ e dal seguente risultato discende che non esistono wavelet ortonormali C_c^∞ , quindi il risultato della Daubechies non può essere migliorato.

TEOREMA 3.34. *Se una wavelet ortonormale ψ è in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, allora per ogni $m = 0, 1, \dots$*

$$\int_{\mathbb{R}} x^m \psi(x) dx = 0$$

quindi $\hat{\psi}^{(m)}(0) = 0$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $a = 2^{-j_0} k_0 \in \mathbb{R}$ sia tale che $\psi(a) \neq 0$ con $j_0, k_0 \in \mathbb{Z}$. Un tale a esiste, perché ψ è continua e non nulla. D'altra parte $\langle \psi_{0,0}, \psi_{j,k} \rangle = 0$ se $(j, k) \neq (0, 0)$. Prendiamo in particolare $k = 2^{j-j_0} k_0$ con $j > 0$ e $j > j_0$. Allora $\langle \psi_{0,0}, \psi_{j,k} \rangle = 0$ si scrive anche

$$\begin{aligned} 0 &= 2^j \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)} \psi(2^j(x-a)) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(a+2^{-j}y)} \psi(y) dy \end{aligned}$$

e facendo tendere $j \rightarrow +\infty$ per convergenza dominata si ottiene $\overline{\psi(a)} \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0$. Siccome $\psi(a) \neq 0$, la tesi è vera per $m = 0$.

Prima di continuare la dimostrazione per induzione su m , per maggior chiarezza, sviluppiamo in dettaglio il passaggio a $m = 1$. Se poniamo $\theta(x) = \int_{-\infty}^x \psi(y) dy$, allora θ è ancora di Schwartz e, integrando per parti,

$$\int_{\mathbb{R}} x \psi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} \theta(x) dx.$$

Se integriamo per parti la relazione $\langle \psi_{0,0}, \psi_{j,k} \rangle = 0$ otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi'(x)} \theta(2^j(x-a)) dx = 0$$

da cui

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi'(a+2^{-j}y)} \theta(y) dy = 0.$$

Scegliendo a in modo che $\psi'(a) \neq 0$ e diadico come prima otteniamo per convergenza dominata quando $j \rightarrow \infty$ che $\int_{\mathbb{R}} \theta(x) dx = 0$, ovvero $\int_{\mathbb{R}} x \psi(x) dx = 0$.

Lo stesso ragionamento si applica per induzione, supponendo la tesi vera per $m = 0, \dots, r-1$ e volendo provare la tesi per $m = r$. Possiamo porre $\theta_1 = \theta$ e $\theta'_s = \theta_{s-1}$ per $s > 1$. (ovvero ψ viene integrata s volte). Tutte queste funzioni sono di Schwartz e la condizione di r -esimo momento nullo è equivalente alla

$$\int_{\mathbb{R}} \theta_r(x) dx = 0$$

integrando per parti.

Siccome ψ non è un polinomio e è regolare esiste un diadico a con $\psi^{(r)}(a) \neq 0$. Dalla relazione di ortogonalità solita integrando per parti e cambiando variabile si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi^{(r)}(a+2^{-j}y)} \theta_r(y) dy = 0.$$

Usiamo come prima convergenza dominata. \square

COROLLARIO 3.35. *Non esistono wavelet ortonormali $C_c^\infty(\mathbb{R})$.*

DIMOSTRAZIONE. Se ψ fosse una wavelet ortonormale $C_c^\infty(\mathbb{R})$, allora $\|\psi\|_2 = 1$ e la sua trasformata $\hat{\psi}$ sarebbe una funzione intera. D'altra parte, per il Teorema 3.34,

$$\hat{\psi}^{(m)}(0) = 0 \quad \forall m = 0, 1, \dots$$

ovvero $\hat{\psi}$ si annullerebbe di ordine infinito nell'origine. Ma allora $\hat{\psi} = 0$, quindi $\|\psi\|_2 = 0$. \square

8. Cenno al caso di dimensione maggiore

Un metodo standard per costruire una base ortonormale su $L^2(\mathbb{R}^2)$ a partire da una su $L^2(\mathbb{R})$ è usare il prodotto tensore: per esercizio mostrare che se $\{e_j : j \in \mathbb{Z}\}$ è una base ortonormale di $L^2(\mathbb{R})$, allora $\{e_j \otimes e_{j'} : j, j' \in \mathbb{Z}\}$ è una base ortonormale di $L^2(\mathbb{R}^2)$, dove

$$e_j \otimes e_{j'}(x, y) = e_j(x) e_{j'}(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Quindi se ψ è una wavelet unidimensionale associata a una MRA, poniamo

$$\psi_{j,j',k,k'}(x, y) = \psi_{j,k}(x) \psi_{j',k'}(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

La famiglia $\{\psi_{j,j',k,k'} : j, j', k, k' \in \mathbb{Z}\}$ è una base ortonormale di $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Tuttavia procedendo in questo modo perdiamo la struttura della MRA, perché i parametri di scala j, j' possono variare indipendentemente.

Se V e V' sono due sottospazi chiusi di $L^2(\mathbb{R})$, indichiamo con $V \otimes V'$ il sottospazio chiuso di $L^2(\mathbb{R}^2)$ generato dalle combinazioni lineari finite di elementi del tipo $f \otimes g$ con f in V e g in V' .

Per mantenere la struttura di MRA, l'idea è usare il prodotto tensore alla scala V_j . Ovvero, a j fissato la famiglia $\{\varphi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ è una base di V_j , ne consideriamo il prodotto tensore $\{\varphi_{j,k} \otimes \varphi_{j,k'} : k, k' \in \mathbb{Z}\}$ e poniamo $\mathcal{V}_j = \overline{\text{sp}\{\varphi_{j,k,j,k'} : k, k' \in \mathbb{Z}\}} = V_j \otimes V_j$.

Si può dimostrare che gli spazi \mathcal{V}_j formano una MRA di $L^2(\mathbb{R}^2)$ con funzione di scala $\varphi \otimes \varphi$ (rispetto a traslazioni di coppie di interi).

Passiamo ai complementi ortogonali. Il complemento ortogonale di \mathcal{V}_0 in \mathcal{V}_1 è uno spazio che chiamiamo \mathcal{W}_0 e è fatto dalla somma diretta di tre spazi del tipo prodotto tensore, ovvero

$$\mathcal{W}_0 = (W_0 \otimes V_0) \oplus (V_0 \otimes W_0) \oplus (W_0 \otimes W_0)$$

In un certo senso, avremo bisogno di tre wavelet la verticale, la orizzontale e la diagonale per descrivere lo spazio dei dettagli \mathcal{W}_0 :

$$\psi^h(x, y) = \psi(x) \varphi(y)$$

$$\psi^v(x, y) = \varphi(x) \psi(y)$$

$$\psi^d(x, y) = \psi(x) \psi(y)$$

(il nome dipende dal fatto che nel sottospazio $W_0 \otimes V_0$, ad esempio, ci sono i dettagli orizzontali).



FIGURA 3.32. Immagine originale

Nella figura 3.32 vediamo l'immagine originale. Calcoliamone la decomposizione di livello 1, usando la Haar wavelet.

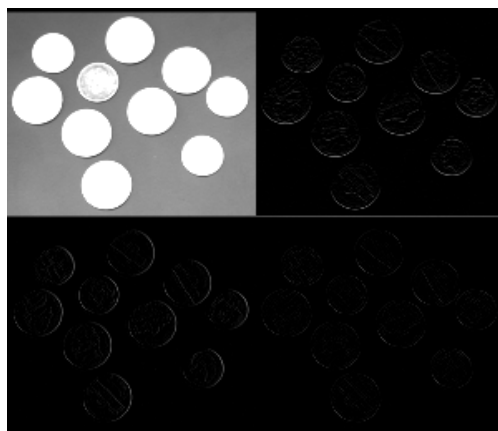


FIGURA 3.33. Decomposizione di livello 1

Nella figura 3.33 troviamo la decomposizione livello 1: nell'angolo in alto a sinistra abbiamo la stessa immagine, un po' sfocata, in alto a destra i dettagli orizzontali, in basso a sinistra i dettagli verticali e in basso a destra i diagonali. Iteriamo la decomposizione: quella di

livello 2 è in figura 3.34, in cui il quadrato dell'approssimazione di livello 1 viene soppiantato dall'approssimazione di livello 2 e i suoi dettagli. Si noti come i dettagli siano matrici sparse, ovvero contenenti molti zeri. Da qui il risparmio nella codifica di una immagine tramite le wavelet.

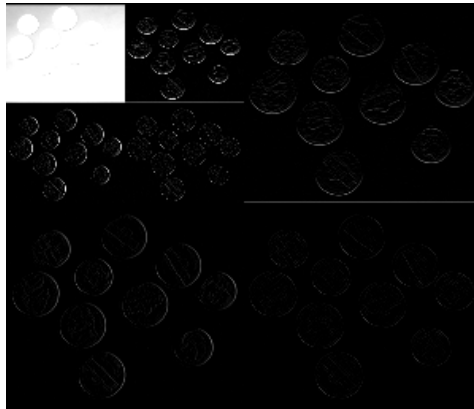


FIGURA 3.34. Decomposizione di livello 2

Con le stesse tecniche viste nel caso unidimensionale e valide anche per la compressione (scelta di una soglia e eliminazione dei dettagli al di sotto di una certa soglia) si può eliminare il rumore da una immagine.



FIGURA 3.35. Rimozione del rumore da una immagine

9. Esercizi

3.9.1. Provare che se ψ è in L^2 , a valori reali e $(1 + |x|)\psi \in L^1$ e $\hat{\psi}(0) = 0$, allora ψ è una wavelet ammissibile (notare che $|\hat{\psi}(\xi)| \leq C|\xi|$ e che $|\hat{\psi}|$ è pari).

3.9.2. Sia $\{x_k : k \in \mathbb{Z}\}$ una base di Riesz per lo spazio di Hilbert \mathcal{H} . Supponiamo che $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k x_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha'_k x_k$, con (α_k) e (α'_k) in $\ell^2(\mathbb{Z})$. Verificare che $(\alpha_k) = (\alpha'_k)$, ovvero la scrittura di x tramite base di Riesz è unica.

3.9.3. In uno spazio di dimensione finita ogni base algebrica è una base di Riesz.

3.9.4. Mostrare che se $\{e_j : j \in \mathbb{Z}\}$ è una base ortonormale di $L^2(\mathbb{R})$, allora il sistema $\{e_j \otimes e_{j'} : j, j' \in \mathbb{Z}\}$ è una base ortonormale di $L^2(\mathbb{R}^2)$, dove

$$e_j \otimes e_{j'}(x, y) = e_j(x) e_{j'}(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Elenco delle Figure

Una immagine in bianco e nero	11
L'effetto di mean e gaussian filter	12
Altri modi di usare il gaussian filter	14
Un segnale unidimensionale: comportamento del filtro LoG	15
Il cappello messicano bidimensionale	15
Effetto del filtro LoG su una immagine	16
Percezione di colori e livelli di grigio	45
Il coefficiente DC	46
Il coefficiente DC e un altro coefficiente	47
Il coefficiente DC e un altro coefficiente 2	47
Il coefficiente DC e altri coefficienti	48
Un'immagine reale e la sua trasformata.	48
Inversione senza la fase	49
Un filtro passa-basso.	50
Un'immagine con forte contorno.	50
Filtri passa-basso e passa-alto	51
Riconoscimento caratteri	52
Frangere di diffrazione	61
Il grafico della chirp quadratica	95
Il valore assoluto della trasformata della chirp quadratica	95
Trasformata di Gabor della chirp quadratica 1	96
Trasformata di Gabor della chirp quadratica 2	96
Trasformata di Gabor della chirp quadratica 3	97
La somma delle note $g_{2,4}$ e $g_{4,6}$	97
La somma delle note $g_{2,4}$ e $g_{3,6}$	98
La finestra e la sua trasformata.	99
Gaussian e Mexican Hat wavelets	100
Morlet wavelet	100
Dilatazioni e traslazioni della Gaussian wavelet	102

Coseno e MexHat	106
Scalogramma (Haar) della funzione coseno	106
Scalogramma (MexHat) della funzione coseno	107
MexHat di un segnale con frequenza 30Hz	107
Tabella Pseudofrequenze MexHat	108
Tabella pseudofrequenze per Morlet	108
Morlet di un segnale con frequenza 100Hz	109
La trasformata wavelet (Morlet) di un segnale con due frequenze	110
CWT di due frequenze in sequenza	111
La trasformata wavelet (gaussian) di una discontinuità a salto	112
Rettangoli di Heisenberg per la CWT	113
Un segnale con due frequenze e due impulsi	113
Trasformate di Gabor di note e impulsi	114
Trasformate di Gabor di note e impulsi con finestra più piccola	114
Trasformata wavelet continua di note e impulsi.	114
Trasformata wavelet e regolarità	117
Shannon wavelet	135
Meyer Wavelet	138
La compressione di un segnale discreto	151
Rimozione del rumore	152
Immagine originale	158
Decomposizione di livello 1	158
Decomposizione di livello 2	159
Rimozione del rumore da una immagine	159

Riferimenti bibliografici

- [1] P.S. Addison. *The Illustrated Wavelet Transform Handbook*. Taylor and Francis, New York, 2002.
- [2] R. Bracewell. *The Fourier Transform and its Applications*. McGraw-Hill, Singapore, 2000.
- [3] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, Philadelphia, 1992.
- [4] G.B. Folland. *Fourier analysis and its applications*. CEA, Milano, 2003.
- [5] K. Gröchenig. *Foundations of Time-Frequency Analysis*. Birkhäuser, Boston, 2001.
- [6] E. Hernández and G. Weiss. *A First Course on Wavelets*. CRC Press, Boca Raton, 1996.
- [7] G. Kaiser. *A Friendly Guide to Wavelets*. Birkhäuser, Boston, 1994.
- [8] T.W. Körner. *Exercises for Fourier Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [9] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, San Diego, 1999.
- [10] P.M. Soardi. *Appunti sulle Ondine*. Pitagora Editrice, Bologna, 1998.
- [11] E.M. Stein and R. Shakarchi. *Fourier Analysis: An Introduction*. Princeton University Press, Princeton, 2003.
- [12] E.M. Stein and G. Weiss. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton University Press, Princeton, 1972.