**Esame scritto di Analisi 3 del 14 febbraio 2006**

**1.** Si determinino tutte le soluzioni dell'equazione

$$y''(x) = y'(x) + 2y(x).$$

Determinare, se esistono, tutte le soluzioni dei problemi

$$(P1)\begin{cases} y''(x) = y'(x) + 2y(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \qquad (P2)\begin{cases} y''(x) = y'(x) + 2y(x) \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

**2.** Disegnare l'insieme

$$A = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le e^z, \quad 0 \le z \le 1\}.$$

Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando l'insieme

$$A' = \{(x, 0, z) \,:\, (x, z) \in A\}$$

attorno all'asse $z$.

**3.** Determinare, se esistono, la minima e la massima distanza dall'origine dei punti $(x, y)$ dell'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, xy - x - y + 2 = 0\}.$$

**4.** Studiare continuità e differenziabilità nell'origine della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin y^2}{x^2+y^2} & x^2 + y^2 \ne 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

(Possono essere utili le disuguaglianze: $|\sin\theta| \le |\theta|$ e $|\sin\theta| \le 1$ valide per ogni $\theta \in \mathbb{R}$.)

**5. (Maurizio Gallo al posto dell'esercizio 1.)** Si studi l'insieme di convergenza assoluta della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2-x)^n}{3^n\,(n+1)}.$$

Calcolare o approssimare a meno di 0.0001 la somma di tale serie per $x = 1$.