

Analisi 3 — SMID

31.10.2006

1. Determinare e rappresentare nel piano complesso i seguenti sottoinsiemi

$$\begin{array}{ll} \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < 2\operatorname{Im} z\} & \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}(iz)| < 2\operatorname{Im}(iz)\} \\ \{z \in \mathbb{C} : \bar{z}^3 = |z|^2\} & \{z \in \mathbb{C} : z^4 = 81i\} \end{array}$$

2. Determinare le soluzioni dei problemi

$$\begin{array}{ll} \begin{cases} y'(x) = 2x(y^2(x) - y(x) - 2) \\ y(0) = -1 \end{cases} & \begin{cases} y'(x) = 2x(y^2(x) - y(x) - 2) \\ y(0) = 5, \end{cases} \end{array}$$

specificandone il dominio. Approssimare con il metodo di Eulero sull'intervallo $[0, \frac{1}{4}]$ con passo 0.05 la soluzione tale che $y(0) = 5$.

3. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) + \alpha y(x) = 0.$$

Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste una soluzione non identicamente nulla verificante i dati $y(0) = y(1) = 0$.

4. Un allevatore di conigli possiede inizialmente 100 capi. Il tasso di crescita annuale dei conigli è del 35%. Inoltre il piano di investimenti dell'allevatore prevede che il primo anno 10 conigli vengano venduti ad altri allevatori, il secondo anno 20, il terzo anno 30, e così via. È un'attività duratura?
5. Per $(x, y) \neq 0$, siano

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \quad g(x, y) = \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Dire se f e/o g si possono estendere a funzioni continue su \mathbb{R}^2 . Dire se esistono (e in caso affermativo, calcolare)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} f(x, y) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} g(x, y) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}.$$