

## CAPITOLO 4

### Calcolo integrale per funzioni di più variabili reali

La definizione di integrale definito per funzioni di una variabile reale è motivato dal problema del calcolo delle aree: si desidera calcolare l'area della regione piana delimitata dal grafico della curva  $y = f(x)$  e dall'asse delle ascisse.

Per funzioni di due variabili reali il problema è quello di calcolare il volume del solido delimitato dal piano  $xy$ , dal grafico dell'equazione  $z = f(x, y)$  e da un cilindro retto di base assegnata  $B$ .

Le prime definizioni ricalcano la teoria dell'integrale di Riemann vista lo scorso anno: inizialmente ci occuperemo del caso in cui  $B$  è un rettangolo (o, nel caso  $n$ -dimensionale, un prodotto di intervalli), definiremo somme superiori e somme inferiori in maniera ovvia. Successivamente ci occuperemo dell'integrazione su domini più generali dei soli rettangoli: triangoli, cerchi, corone circolari,... e, nei casi di dimensione maggiore, cilindri, sfere,...

#### 1. Il calcolo di volumi

Trattiamo dapprima il caso di  $\mathbb{R}^2$ , in cui si calcolano volumi. Supponiamo che  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sia una funzione limitata e, per fissare le idee, non negativa. Sia  $R$  il rettangolo  $[a, b] \times [c, d]$  e supponiamo che  $R \subseteq \text{dom } f$ .

Calcoleremo il volume della regione  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$  per successive approssimazioni dall'alto e dal basso con somme di volumi di parallelepipedi.

Dividiamo il rettangolo  $R$  in sottorettangoli scegliendo:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_r = b \quad c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_s = d$$

e chiamiamo partizione  $\mathcal{P}$  l'insieme formato da  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_r\} \times \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_s\}$ . Siano inoltre  $R_{kj}$  il rettangolo  $[x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$  e

$$m_{kj} = \inf_{(x,y) \in R_{kj}} f(x, y) \quad M_{kj} = \sup_{(x,y) \in R_{kj}} f(x, y).$$

Definiamo la somma inferiore di Riemann della funzione  $f$  relativa alla partizione  $\mathcal{P}$  scelta

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^s m_{kj} \text{area}(R_{kj}) = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^s m_{kj} (x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Questa somma fornisce un'approssimazione dal basso del volume cercato.

Analogamente, la somma superiore di Riemann della funzione  $f$  relativa alla partizione  $\mathcal{P}$  è

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^s M_{kj} \text{area}(R_{kj}) = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^s M_{kj} (x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1})$$

e fornisce un'approssimazione dall'alto del volume cercato.

Ovviamente, se  $m$  e  $M$  sono rispettivamente l'estremo inferiore e l'estremo superiore della funzione sul rettangolo  $R$  si ha

$$m(b-a)(d-c) \leq s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}) \leq M(b-a)(d-c).$$

Inoltre, se  $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$  (ovvero la suddivisione  $\mathcal{P}$  è più fine di  $\mathcal{P}'$ ) si ha

$$s(f, \mathcal{P}') \leq s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}').$$

Definiamo l'integrale inferiore di  $f$  su  $R$  mediante

$$\int_R f = \sup \{s(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partizione di } R\}$$

e l'integrale superiore di  $f$  su  $R$  mediante

$$\int_R f = \inf \{S(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partizione di } R\}.$$

**DEFINIZIONE 4.1.** La funzione limitata  $f$  si dice integrabile (secondo Riemann) sul rettangolo  $[a, b] \times [c, d]$  se l'integrale superiore e l'integrale inferiore di  $f$  su  $R$  sono uguali. In tal caso si indica tale valore con uno dei simboli  $\int_R f$ ,  $\iint_R f$ ,  $\int_R f(x, y) dx dy$ ,  $\iint_R f(x, y) dx dy$  e talvolta si parla di "integrale doppio".

Una classe importante di funzioni integrabili sui rettangoli è la classe delle funzioni continue. Non dimostriamo questo fatto; intuitivamente pensiamo che una funzione continua presenta oscillazioni che si possono facilmente controllare su un rettangolo chiuso e limitato.

■ **ESEMPIO 4.1.** Sia  $\chi$  la funzione definita sul quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$  da

$$\chi(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in \mathbb{Q}^2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Questa è una funzione non integrabile, perché comunque si scelga una partizione del quadrato unitario risulta sempre

$$M_{kj} = 1 \quad m_{kj} = 0,$$

da cui  $\int_{[0,1] \times [0,1]} \chi = 0$  e  $\int_{[0,1] \times [0,1]} \chi = 1$ . ☺

La domanda che ci poniamo adesso è come si possano calcolare gli integrali doppi.

**TEOREMA 4.2** (di riduzione). *Sia  $f$  una funzione integrabile sul rettangolo  $R$ .*

a. *Se, per ogni  $y \in [c, d]$  esiste l'integrale  $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ , allora*

$$\iint_R f = \int_c^d F(y) dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

b. *Se, per ogni  $x \in [a, b]$  esiste l'integrale  $G(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ , allora*

$$\iint_R f = \int_a^b G(x) dx = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Interessante è l'interpretazione geometrica del Teorema di riduzione: si tratta di una sorta di “integrazione a fette”. Infatti, per  $\bar{y}$  fissato in  $[c, d]$ , l'integrale  $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  rappresenta l'area della regione che si ottiene intersecando il piano  $y = \bar{y}$  con la regione di cui si desidera calcolare il volume. Il volume si ottiene integrando tali aree tra  $c$  e  $d$ .

Si osservi che se  $f$  è continua allora tutte le ipotesi del teorema di riduzione sono soddisfatte e che quindi

$$\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx,$$

ovvero l'ordine di integrazione non conta.

■ **ESEMPIO 4.3.** Integrare la funzione  $f(x, y) = x^{-3} e^{y/x}$ , sul rettangolo  $R = [1, 2] \times [0, 1]$ .

Si tratta di una funzione continua su  $R$ , quindi integrabile e possiamo integrare prima rispetto a  $x$  e poi rispetto a  $y$ , oppure viceversa, indifferentemente. Vediamo cosa ci conviene: se desideriamo integrare prima rispetto a  $x$ , occorre calcolare  $\int_1^2 x^{-3} e^{y/x} dx$ ; se desideriamo integrare prima rispetto a  $y$ , occorre calcolare  $\int_0^1 x^{-3} e^{y/x} dy$ . Siccome il secondo integrale è più facile del primo, decidiamo di integrare prima rispetto a  $y$ . Con la sostituzione  $t = y/x$  si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{-3} e^{y/x} dy &= x^{-3} \int_0^1 e^{y/x} dy \\ &= x^{-3} \int_0^{1/x} e^t x dt \\ &= x^{-2} [e^t]_0^{1/x} = x^{-2} (e^{1/x} - 1). \end{aligned}$$

Quindi, eventualmente con la sostituzione  $t = 1/x$ ,

$$\begin{aligned} \int_R f &= \int_1^2 x^{-2} (e^{1/x} - 1) dx = \int_1^2 x^{-2} e^{1/x} dx - \int_1^2 x^{-2} dx \\ &= \int_{1/2}^1 e^t dt - \int_1^2 x^{-2} dx \\ &= [e^t]_{1/2}^1 - \left[ \frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^2 = e - \sqrt{e} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

☺

☞ ESEMPIO 4.4. La funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & y \in \mathbb{Q}, x = 1/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è integrabile sul quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$ , ma non “a fette”. Infatti, se scegliamo partizioni formate da rettangoli di altezza sempre più sottile, diventa trascurabile l’apporto dell’integrale superiore, cosa d’altra parte credibile dal momento che desidereremmo calcolare il volume di una sorta di parallelepipedo che ha una dimensione nulla.

Si noti che non esiste  $\int_0^1 f(\frac{1}{2}, y) dy$ , quindi non ha senso per ogni  $x$  fissato l’operazione di integrazione rispetto a  $y$ . ☺

Vogliamo ora integrare su regioni più generali, non solo sui rettangoli, ma anche su cerchi, corone circolari, ecc.

Sia  $\Omega$  una regione limitata del piano e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Per utilizzare la definizione di integrale appena vista, possiamo includere  $\Omega$  in un rettangolo  $R$  e estendere la funzione al rettangolo  $R$ , ponendola uguale a 0 al di fuori di  $\Omega$ . A livello di calcolo di volumi, nulla dovrebbe cambiare.

Data  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , definiamo  $\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R}$  ponendo

$$(4.1) \quad \tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in \Omega \\ 0 & (x, y) \in R \setminus \Omega. \end{cases}$$

DEFINIZIONE 4.2. Diciamo che  $f$  è integrabile in una regione limitata del piano  $\Omega$  secondo Riemann se  $\tilde{f}$  è integrabile in  $R$  e in tal caso poniamo

$$\int_{\Omega} f = \int_R \tilde{f}.$$

Osserviamo che la definizione è ben posta, ossia non dipende dal rettangolo  $R$  che adoperiamo per racchiudere l'insieme  $\Omega$ . Tuttavia non è molto maneggevole, perché  $\tilde{f}$  non sarà, in generale, continua e quindi capire se  $\tilde{f}$  sia integrabile non sarà immediato.

Introduciamo ora una classe di regioni  $\Omega$  su cui le funzioni continue sono integrabili.

**DEFINIZIONE 4.3.** Si dice dominio normale rispetto all'asse  $y$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  della forma

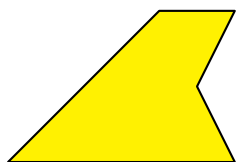
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

dove  $g_1$  e  $g_2$  sono funzioni continue sull'intervallo  $[a, b]$ .

Analogamente, si dice dominio normale rispetto all'asse  $x$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  della forma

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

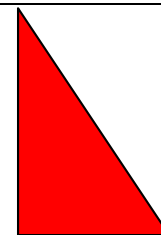
dove  $h_1$  e  $h_2$  sono funzioni continue sull'intervallo  $[c, d]$ .



Dominio normale  
rispetto all'asse  $x$



Dominio normale  
rispetto all'asse  $y$



Dominio normale  
rispetto a entrambi gli assi

**TEOREMA 4.5.** Sia  $\Omega$  un dominio normale rispetto a uno dei due assi e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora  $f$  è integrabile in  $\Omega$  e

$$\int_{\Omega} f = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \quad \text{se } \Omega \text{ è normale rispetto all'asse } y$$

$$\int_{\Omega} f = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \quad \text{se } \Omega \text{ è normale rispetto all'asse } x.$$

✎ **ESEMPIO 4.6.** Sia  $f(x, y) = xy^2$ . Calcolare  $\int_C f$  e  $\int_S f$  dove  $C$  è il cerchio  $x^2 + y^2 \leq 1$  e  $S$  il semicerchio  $C \cap \{x \geq 0\}$ .

Si tratta di una funzione integrabile sul cerchio, perché il cerchio è normale rispetto agli assi (ad esempio  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ ) e  $f$  è continua. Anche senza calcolare l'integrale, possiamo dire che vale 0, perché  $f$  è dispari rispetto a  $x$  e il dominio è simmetrico nella  $x$ .

La funzione  $f$  è anche integrabile sul semicerchio, perché il semicerchio è normale rispetto agli assi (ad esempio  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ ) e  $f$  è continua. Si ha, con la sostituzione  $t = 1 - x^2$ :

$$\begin{aligned} \int_S f &= \int_0^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xy^2 dy \right) dx \\ &= \int_0^1 x \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{2}{3} x (1-x^2)^{3/2} dx \\ &= -\frac{1}{3} \int_1^0 t^{3/2} dt = -\frac{1}{3} \left[ \frac{t^{3/2+1}}{3/2+1} \right]_1^0 = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

Notare che  $S$  è anche normale rispetto all'asse  $x$ , perché possiamo scrivere

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}.$$

Usando questa decomposizione si ha

$$\begin{aligned} \int_S f &= \int_{-1}^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy^2 dx \right) dy \\ &= \int_{-1}^1 y^2 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 y^2 (1-y^2) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (y^2 - y^4) dy = \frac{1}{2} \left[ \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{15}, \end{aligned}$$

ovvero lo stesso risultato, come dovevasi. ☺

▣ **ESEMPIO 4.7.** Sia  $f(x, y) = e^{-x^2}$ . Calcolare  $\int_T f$  dove  $T$  è il triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 2)$ .

Si tratta di una funzione continua su  $T$ , dominio normale rispetto sia all'asse  $x$ , sia rispetto all'asse  $y$ . Infatti abbiamo

$$\begin{aligned} T &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x\} \\ T &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2, \frac{y}{2} \leq x \leq 1\} \end{aligned}$$

Se consideriamo il dominio come normale rispetto all'asse  $y$  abbiamo

$$\int_T f = \int_0^1 \left( \int_0^{2x} e^{-x^2} dy \right) dx = \int_0^1 e^{-x^2} 2x dx = \left[ -e^{-x^2} \right]_0^1 = 1 - e^{-1};$$

se invece consideriamo il dominio come normale rispetto all'asse  $x$  abbiamo

$$\int_T f = \int_0^2 \left( \int_{y/2}^1 e^{-x^2} dx \right) dy = ???$$

In questo caso non sappiamo valutare, se non in maniera approssimata, l'integrale interno e quindi non possiamo portare a termine il conto facilmente (in realtà si può integrare per

parti, ma è più delicato:

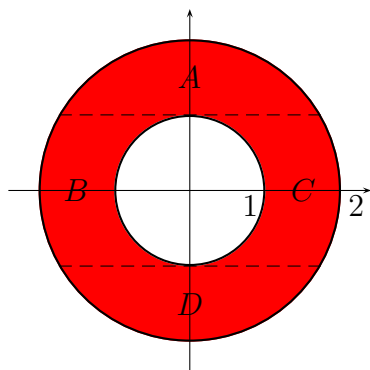
$$\begin{aligned} \int_T f &= \int_0^2 1 \left( \int_{y/2}^1 e^{-x^2} dx \right) dy = \int_0^2 1H(y) dy & H(y) &= \int_{y/2}^1 e^{-x^2} dx \\ &= [yH(y)]_0^2 - \int_0^2 y H'(y) dy \\ &= 2H(2) - \int_0^2 y H'(y) dy = \frac{1}{2} \int_0^2 y e^{-y^2/4} dy \end{aligned}$$

Infatti  $H(2) = \int_1^2 e^{-x^2} dx = 0$  e  $H'(y) = -\frac{1}{2} e^{-y^2/4}$ ; da cui

$$\int_T f = \frac{1}{2} \int_0^2 y e^{-y^2/4} dy = \int_0^1 e^{-s} ds = 1 - e^{-1},$$

come prima). ☺

Tutto quanto visto sinora vale anche se il dominio  $\Omega$  non è normale rispetto agli assi, ma si può scrivere come unione finita di domini normali rispetto agli assi, che si sovrappongono solo sui bordi, sfruttando l'additività dell'integrale.



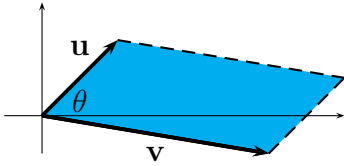
Ad esempio, un poligono può essere scritto come unione finita di domini normali rispetto agli assi. Oppure una corona circolare: non è normale rispetto a nessuno degli assi, tuttavia è unione di quattro domini normali, ad esempio come in figura rispetto all'asse  $x$ . Risulta

$$\int_{1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2} f(x, y) dx dy = \int_A f + \int_B f + \int_C f + \int_D f.$$

Notiamo anche che, in coordinate polari  $(r, \theta)$ , sarebbe molto facile descrivere la corona circolare: basterebbe richiedere  $1 \leq r \leq 2$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Potremmo quindi pensare di scrivere l'integrale sulla corona della funzione  $f(x, y)$  come  $\int_1^2 \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta dr$ . Questa formula però non è quella giusta. Come vedremo nella prossima sezione, manca un fattore di correzione nella misura delle aree.

## 2. Teorema di cambiamento di variabili

Per capire meglio a cosa è legato il fattore di correzione di cui poco sopra, ripassiamo le trasformazioni lineari.



Siano  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  due vettori linearmente indipendenti. Allora il parallelogramma  $P$  generato da  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  ha area  $\left| \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \right|$ .

Infatti, se  $\theta$  è l'angolo compreso tra  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ , allora

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

e l'area del parallelogramma è data da

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| |\sin \theta| &= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sqrt{1 - \left( \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right)^2} \\ &= \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2} = \sqrt{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2)^2} \\ &= \sqrt{u_1^2 v_1^2 + u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 - u_1^2 v_1^2 - u_2^2 v_2^2 - 2u_1 v_1 u_2 v_2} \\ &= \sqrt{(u_1 v_2 - u_2 v_1)^2} = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \right|. \end{aligned}$$

Chiamiamo  $U$  la matrice  $\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ , cosicché  $\text{area}(P) = |\det U|$ .

Applichiamo ora una trasformazione lineare, legata alla matrice invertibile  $L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ .

Il trasformato secondo la mappa  $L$  del parallelogramma  $P$  generato dai vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  è ancora un parallelogramma, che chiamiamo  $L(P)$  e è generato dai vettori  $L\mathbf{u}$  e  $L\mathbf{v}$ . Quindi l'area di  $L(P)$  è data da  $|\det(L\mathbf{u} \ L\mathbf{v})|$ . D'altra parte

$$\begin{aligned} \text{area}(L(P)) &= \left| \det \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 & a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 & a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{pmatrix} \right| = |\det(LU)| \\ &= |\det L| \text{area}(P). \end{aligned}$$

Quindi la trasformazione lineare associata alla matrice  $L$  dilata le aree di un fattore  $|\det L|$ .

Se consideriamo la trasformazione che si ottiene facendo seguire alla trasformazione lineare associata alla matrice  $L$  una traslazione, ancora otteniamo una trasformazione che dilata le aree di un fattore  $|\det L|$ , perché le traslazioni non variano le aree.

Esaminiamo ora il problema del cambiamento di variabile in un integrale.



Supponiamo innanzi tutto di considerare una trasformazione lineare invertibile, ovvero legata come prima alla matrice  $L$  di determinante non nullo,

$$\begin{cases} x = \varphi(s, t) = a_{11} s + a_{12} t \\ y = \psi(s, t) = a_{21} s + a_{22} t. \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

e approssimiamo l'integrale con una sua somma (ad esempio superiore). Se  $\Omega$  è contenuto nel rettangolo  $R$  e  $\tilde{f}$  è l'estensione di  $f$  a  $R$  come nella 4.1, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f &= \int_R \tilde{f} \simeq \sum_{k,j} \left( \sup_{(x,y) \in R_{kj}} \tilde{f}(x, y) \right) \text{area}(R_{kj}) \\ &= \sum_{k,j} \left( \sup_{(x,y) \in R_{kj}} \tilde{f} \circ L \circ L^{-1}(x, y) \right) \text{area}(R_{kj}) \\ &= \sum_{k,j} \left( \sup_{(s,t) \in L^{-1}R_{kj}} \tilde{f} \circ L(s, t) \right) \text{area}(R_{kj}) \end{aligned}$$

indichiamo con  $P_{kj} = L^{-1}R_{kj}$  il parallelogramma trasformato a partire da  $R_{kj}$ ; siccome  $L$  è lineare,  $\text{area}(P_{kj}) = |\det(L^{-1})| \text{area}(R_{kj}) = |\det L|^{-1} \text{area}(R_{kj})$  e si ottiene

$$\begin{aligned} &= \sum_{k,j} \left( \sup_{(s,t) \in P_{kj}} \tilde{f} \circ L(s, t) \right) |\det L| \text{area}(P_{kj}) \\ &\simeq \int_{L^{-1}(R)} \tilde{f} \circ L(s, t) |\det L| \, ds \, dt \\ &= \int_{L^{-1}(\Omega)} f \circ L(s, t) |\det L| \, ds \, dt. \end{aligned}$$

Consideriamo ora cambiamenti di variabili più generali, ovvero supponiamo che  $A$  sia un insieme aperto limitato e  $T : A \rightarrow T(A) \subseteq \mathbb{R}^2$  una mappa biunivoca (cioè iniettiva e suriettiva). La mappa  $T$  è una funzione a valori vettoriali  $T(s, t) = (\varphi(s, t), \psi(s, t))$  e la pensiamo come il cambiamento di variabile

$$(4.2) \quad \begin{cases} x = \varphi(s, t) \\ y = \psi(s, t). \end{cases}$$

Sia ora  $\Omega$  un sottoinsieme di  $T(A) \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e integrabile su  $\Omega$ . Desideriamo sapere come si trasforma l'integrale  $\int_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy$  operando il cambiamento di variabili  $T$  dato dalla formula (4.2).

Ci aspettiamo che diventi un integrale esteso alla regione  $T^{-1}(\Omega)$  della funzione  $g(s, t) = f(\varphi(s, t), \psi(s, t))$ .

Per capire come si trasforma l'elemento che "misura le aree" (cioè  $dx \, dy$ ), immaginiamo di fissare un punto  $(s_0, t_0)$  e un piccolo intorno di forma quadrata  $Q$  di questo punto e valutare

come si trasforma l'area di  $Q$ . Approssimiamo le funzioni  $\varphi$  e  $\psi$  con i loro sviluppi del primo ordine centrati in  $(s_0, t_0)$

$$\begin{aligned}\varphi(s, t) &\simeq \varphi(s_0, t_0) + \partial_1\varphi(s_0, t_0)(s - s_0) + \partial_2\varphi(s_0, t_0)(t - t_0) \\ \psi(s, t) &\simeq \psi(s_0, t_0) + \partial_1\psi(s_0, t_0)(s - s_0) + \partial_2\psi(s_0, t_0)(t - t_0).\end{aligned}$$

Il secondo membro dell'ultima formula è una trasformazione lineare  $L$  composta con traslazioni. In formule,  $L$  è associata alla matrice

$$J_T(s_0, t_0) = \begin{pmatrix} \partial_1\varphi(s_0, t_0) & \partial_2\varphi(s_0, t_0) \\ \partial_1\psi(s_0, t_0) & \partial_2\psi(s_0, t_0) \end{pmatrix},$$

che si chiama matrice jacobiana della trasformazione  $T$ , calcolata in  $(s_0, t_0)$ . Pertanto, per quanto visto sulle trasformazioni lineari,

$$dxdy \simeq \text{area}(T(Q)) \simeq \text{area}(L(Q)) = |\det(J_T(s_0, t_0))| \text{area}(Q) \simeq |\det(J_T(s, t))| dsdt.$$

Questo a parziale giustificazione del

**TEOREMA 4.8** (di cambiamento di variabili). *Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^2$  e  $T : A \rightarrow T(A) \subseteq \mathbb{R}^2$  una mappa biunivoca di classe  $C^1(A)$ , ovvero le funzioni  $\varphi$  e  $\psi$  abbiano derivate parziali continue in  $A$ . Sia inoltre  $\det J_T \neq 0$  in  $A$  e sia  $\Omega$  un dominio semplice rispetto a uno degli assi contenuto in  $T(A)$ . Allora se  $f$  è una funzione continua e integrabile in  $\Omega$ , vale*

$$\int_{\Omega} f(x, y) dxdy = \int_{T^{-1}(\Omega)} f(\varphi(s, t), \psi(s, t)) |\det(J_T(s, t))| dsdt.$$

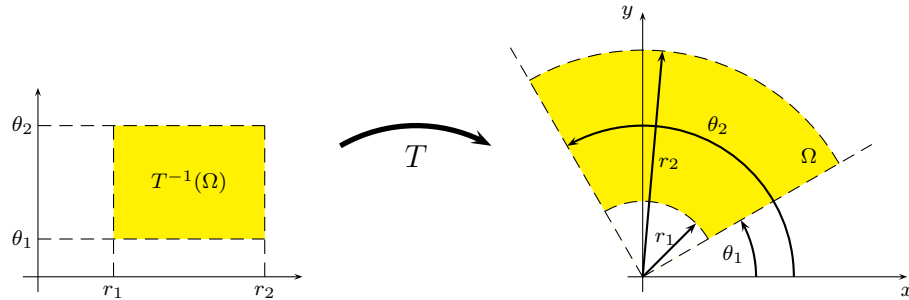
Un esempio molto importante di cambiamento di variabili è la mappa  $T(r, \theta)$  descritta dalle relazioni

$$\begin{cases} x = \varphi(r, \theta) = r \cos \theta \\ y = \psi(r, \theta) = r \sin \theta, \end{cases}$$

con  $A = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ , ovvero il passaggio a coordinate polari. In tal caso,  $\det(J_T) = r$ . Quindi

$$(4.3) \quad \int_{\Omega} f(x, y) dxdy = \int_{T^{-1}(\Omega)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta,$$

tutte le volte che  $\Omega$  è un sottoinsieme di  $T(A) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ .



Notiamo anche che avremmo potuto definire la stessa trasformazione  $T(r, \theta)$  e considerare come aperto  $A$  l'insieme  $A' = (0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$ . In questo caso, la formula (4.3) sarebbe stata valida per  $\Omega$  sottoinsieme di  $T(A) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$ . In realtà nella formula (4.3) l'insieme  $\Omega$  può essere un qualsiasi sottoinsieme limitato e unione finita di domini normali rispetto a uno degli assi. Infatti possiamo scrivere  $\int_{\Omega} f$  come somma  $\int_{\Omega'} f + \int_{\Omega''} f$ , dove  $\Omega'$  è l'intersezione di  $\Omega$  con l'asse delle ascisse:  $\Omega' = \Omega \cap \{(x, 0) : x \geq 0\}$  e  $\Omega'' = \Omega \setminus \Omega'$ . D'altra parte  $\int_{\Omega'} f = 0$ , perché rappresenta il volume di un cilindro con base di area nulla.

- ESEMPIO 4.9. Calcolare il volume di un cono circolare retto di base un cerchio di raggio 2 e altezza 3. Possiamo pensare al cono come alla differenza tra il cilindro

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 3, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

che ha volume  $12\pi$  e il sottoinsieme

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$

Calcoliamo il volume di  $S$ . Si ha

$$\begin{aligned} \text{vol}(S) &= \int_{\{x^2+y^2 \leq 4\}} \frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy = \frac{3}{2} \int_{\{0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta < 2\pi\}} r \, r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^2 r^2 \, dr \int_0^{2\pi} d\theta = 8\pi. \end{aligned}$$

Quindi il volume del cono risulta  $12\pi - 8\pi = 4\pi$ . ☺

- ESEMPIO 4.10. Calcolare  $\int_{\mathcal{T}} e^{\frac{y-x}{x+y}} \, dx \, dy$ , dove  $\mathcal{T}$  è il parallelogramma delimitato dagli assi e dalle rette  $x + y = 1$ ,  $x + y = 2$ . Possiamo scrivere

$$\mathcal{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, \max(1-x, 0) \leq y \leq 2-x\},$$

ma gli integrali da calcolare sarebbero difficili. La funzione suggerisce le sostituzioni  $s = y - x$ ,  $t = x + y$ . Questa trasformazione è lineare e biunivoca, perché associata alla matrice  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Il parallelogramma  $\mathcal{T}$  diventa la regione  $\mathcal{S} = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq t \leq 2, -t \leq s \leq t\}$ .

Quindi, poiché  $|\det J| = \left| \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}$ , si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{T}} e^{\frac{y-x}{x+y}} dx dy &= \int_{\mathcal{S}} e^{\frac{s}{t}} \frac{1}{2} ds dt = \frac{1}{2} \int_1^2 \left( \int_{-t}^t e^{\frac{s}{t}} ds \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 (et - e^{-1}t) dt = \frac{3}{4} \left( e - \frac{1}{e} \right). \end{aligned}$$

☺

■ ESEMPIO 4.11. Gli integrali doppi si possono utilizzare per calcolare aree: l'area di una certa regione  $\Omega$  del piano, unione finita di domini normali rispetto agli assi, non è altro che  $\int_{\Omega} 1 dx dy$ .

Calcoliamo, ad esempio, l'area dell'ellisse  $\mathcal{E}$  di equazione  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ , con  $a, b > 0$ . Si ha

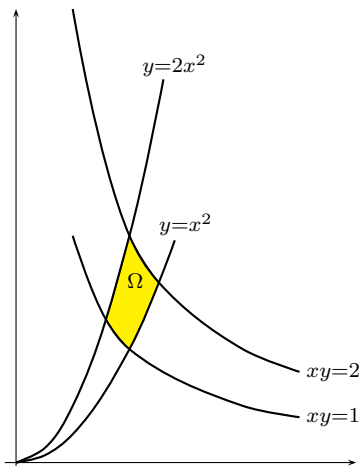
$$\text{area}(\mathcal{E}) = \int_{\mathcal{E}} 1 dx dy.$$

Con la sostituzione  $s = x/a$ ,  $t = y/b$ , dato che  $|\det J| = \left| \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right| = ab$ , otteniamo

$$\begin{aligned} &= \int_{s^2+t^2 \leq 1} 1 ab ds dt \\ &= \pi ab. \end{aligned}$$

Potevamo anche calcolare l'ultimo integrale passando in coordinate polari  $\int_{s^2+t^2 \leq 1} 1 ds dt = \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) r dr = \pi$ , ma perché fare tanta fatica, quando si tratta semplicemente dell'area del cerchio di raggio 1. ☺

■ ESEMPIO 4.12. Calcolare  $\int_{\Omega} xy^2 dx dy$ , dove  $\Omega$  è la regione di piano compresa tra i grafici delle funzioni  $1/x$ ,  $2/x$ ,  $x^2$ ,  $2x^2$ , come disegnato in figura.



Convieni una trasformazione che rettifichi le curve in figura: consideriamo pertanto il cambiamento di variabili

$$s = \frac{x^2}{y} \quad t = xy.$$

Tale trasformazione risulta biunivoca, con inversa data da

$$x = \sqrt[3]{st} \quad y = \sqrt[3]{\frac{t^2}{s}}.$$

Inoltre

$$\det J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{t}{s^2}} & \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{s}{t^2}} \\ -\frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{t^2}{s^4}} & \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{st}} \end{pmatrix} = \frac{1}{3s}.$$

Allora, notando che  $\frac{1}{2} \leq s = \frac{x^2}{y} \leq 1$  e  $1 \leq t = xy \leq 2$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} xy^2 dx dy &= \int_{\left[\frac{1}{2}, 1\right] \times [1, 2]} t^{5/3} s^{-1/3} \frac{1}{3s} ds dt \\ &= \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 s^{-4/3} ds \int_1^2 t^{5/3} dt \\ &= \frac{3}{8} \left( \sqrt[3]{2} - 1 \right) \left( 4\sqrt[3]{4} - 1 \right). \end{aligned}$$

©

**2.1. Complementi sulle funzioni a valori vettoriali.** Nella parte precedente del corso non abbiamo mai focalizzato l'attenzione sulle funzioni a valori vettoriali: nel calcolo dei limiti abbiamo semplicemente detto che, siccome possiamo effettuare i conti sulle singole componenti, ci basta trattare le funzioni a valori reali; nel calcolo differenziale la nostra attenzione si è rivolta a problemi di massimo e di minimo, quindi abbiamo considerato solo funzioni a valori reali (solo per queste ha senso porsi il problema di trovare un valore massimo/minimo). Tuttavia la nozione di differenziabilità (nel senso dell'approssimazione con una funzione lineare) ha senso anche per funzioni a valori vettoriali.

**DEFINIZIONE 4.4.** Si dice che  $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è differenziabile (o derivabile Frechét) nel punto  $\mathbf{x}_0$  interno al dominio di  $\mathbf{F}$  se esiste una matrice  $\mathbf{D}$  di tipo  $m \times n$  e una funzione  $\boldsymbol{\Omega} = (\omega_1, \dots, \omega_m)$  definita in un intorno  $U_0$  di  $\mathbf{x}_0$  in  $\mathbb{R}^n$  a valori in  $\mathbb{R}^m$  tali che

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{D}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in U_0$$

con  $\lim_{\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{0}} \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

Ricordiamo che i vettori che consideriamo sono vettori colonna. In particolare notiamo che il prodotto della matrice  $\mathbf{D} = (d_{ij})$  con il vettore  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  è un prodotto righe per colonne, ovvero

$$\mathbf{D}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{01} \\ x_2 - x_{02} \\ \vdots \\ x_n - x_{0n} \end{pmatrix}.$$

La matrice  $\mathbf{D}$  dipende sia da  $\mathbf{F}$  sia da  $\mathbf{x}_0$  e si chiama matrice Jacobiana di  $\mathbf{F}$  in  $\mathbf{x}_0$ ; nelle formule si indica con il simbolo  $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)$ .

Si può dimostrare facilmente che se le funzioni  $f_1, \dots, f_m$  sono differenziabili in  $\mathbf{x}_0$ , allora anche  $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_m)$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  e che la matrice Jacobiana di  $\mathbf{F}$  ha come righe

$\nabla f_j(\mathbf{x}_0)$ , ossia

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\mathbf{x}_0) \\ \nabla f_2(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(\mathbf{x}_0) & \partial_2 f_1(\mathbf{x}_0) & \cdots & \partial_n f_1(\mathbf{x}_0) \\ \partial_1 f_2(\mathbf{x}_0) & \partial_2 f_2(\mathbf{x}_0) & \cdots & \partial_n f_2(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(\mathbf{x}_0) & \partial_2 f_m(\mathbf{x}_0) & \cdots & \partial_n f_m(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

(e viceversa, se  $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_m)$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  allora tutte le funzioni  $f_1, \dots, f_m$  sono differenziabili in  $\mathbf{x}_0$ ).

In particolare, se  $n = m = 1$  allora la matrice Jacobiana si riduce alla derivata di  $f$  in  $x_0$ .

Se  $\mathbf{F}$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ , la formula

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \Omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in U_0$$

con  $\lim_{\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{0}} \Omega(\mathbf{t}) = \Omega(\mathbf{0}) = 0$ , fornisce lo sviluppo di Taylor di  $\mathbf{F}$  centrato in  $\mathbf{x}_0$  di ordine 1.

Diamo ora una versione più generale del teorema della funzione composta: supponiamo che  $\mathbf{G} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\mathbf{F} : B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  tali che  $\mathbf{G}(A) \subseteq B$ , in modo da poter considerare la funzione composta  $\mathbf{F} \circ \mathbf{G} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

**TEOREMA 4.13** (della funzione composta). *Sia  $\mathbf{x}_0$  un punto interno a  $A$  e sia  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{G}(\mathbf{x}_0)$  un punto interno a  $B$ . Se  $\mathbf{G}$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{F}$  è differenziabile in  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{G}(\mathbf{x}_0)$ , allora  $\mathbf{F} \circ \mathbf{G}$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  e*

$$J_{\mathbf{F} \circ \mathbf{G}}(\mathbf{x}_0) = J_{\mathbf{F}}(\mathbf{y}_0) J_{\mathbf{G}}(\mathbf{x}_0) = J_{\mathbf{F}}(\mathbf{G}(\mathbf{x}_0)) J_{\mathbf{G}}(\mathbf{x}_0).$$

Si intende che la matrice  $J_{\mathbf{F} \circ \mathbf{G}}(\mathbf{x}_0)$  (che è di tipo  $k \times n$ ) si ottiene facendo il prodotto righe per colonne della matrice  $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{y}_0)$  (che è di tipo  $k \times m$ ) per la matrice  $J_{\mathbf{G}}(\mathbf{x}_0)$  (che è di tipo  $m \times n$ ).

Nel paragrafo precedente abbiamo considerato in particolare i cambi di variabile in  $\mathbb{R}^2$ , ossia funzioni a valori vettoriali in cui  $n = m$  biunivoche. In questo caso la matrice Jacobiana, come abbiamo visto, è quadrata.

**2.2. Invertibilità e matrice Jacobiana.** Nel caso di una variabile, per sapere se una funzione regolare  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  è biunivoca, ci basta controllare che abbia derivata non nulla in ogni punto di  $(a, b)$ . Questo corrisponde a dire che in ogni punto l'approssimante lineare di  $f$  è una mappa invertibile.

Nel caso di più variabili, dire che l'approssimante lineare (in un punto) di  $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una mappa invertibile vuol dire che la matrice Jacobiana di  $\mathbf{F}$  in quel punto ha determinante non nullo. Infatti, nel punto  $\mathbf{x}_0$  l'approssimazione lineare è

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Proviamo a invertirla, ovvero, dato  $\mathbf{y}$  in  $\mathbf{F}(A)$  cerchiamo  $\mathbf{x}$  tale che

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{y}.$$

Deve risultare  $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{y} - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ . Questo è un sistema lineare, che ammette sempre soluzione se e solo se  $\det J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0) \neq 0$ .

Tuttavia, se  $n > 1$ , non è detto che una funzione  $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{F}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$  con determinante Jacobiano non nullo in ogni punto di  $A$  sia biunivoca. Ad esempio

$$\mathbf{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad \mathbf{F}(\rho, \theta) = (e^\rho \cos \theta, e^\rho \sin \theta)$$

ha determinante Jacobiano  $\det J_{\mathbf{F}}(\rho, \theta) = e^\rho$  sempre non nullo, ma  $\mathbf{F}$  non è iniettiva ( $\mathbf{F}(\rho, \theta) = \mathbf{F}(\rho, \theta + 2\pi)$ ).

Si può dimostrare che se  $\det J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0) \neq 0$ , allora  $\mathbf{F}$  è “localmente” invertibile in  $\mathbf{x}_0$ , ossia esiste un intorno  $U$  di  $\mathbf{x}_0$  tale che  $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbf{F}(U)$  sia biunivoca.

Ricordiamo che il viceversa di queste affermazioni non è vero: ossia non è detto che se  $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{F}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$  è biunivoca, allora il suo determinante Jacobiano è non nullo in ogni punto di  $A$  (neanche per  $n = 1$ , ad esempio  $x \mapsto x^3$  su  $A = \mathbb{R}$  è biunivoca ma ha derivata nulla in  $x = 0$ ).

■ ESEMPIO 4.14. Sappiamo che  $\int_{x^2+y^2 \leq 1} 1 \, dx \, dy = \pi$ . Immaginiamo di voler calcolare questo integrale effettuando il cambio di variabili

$$\mathbf{T} \begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv \end{cases} \quad \text{con matrice Jacobiana} \quad J_{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ -2v & 2u \end{pmatrix}$$

Il trasformato del cerchio diventa  $(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 \leq 1$  cioè  $(u^2 + v^2)^2 \leq 1$ , ancora il cerchio unitario. Pertanto

$$\pi = \int_{x^2+y^2 \leq 1} 1 \, dx \, dy = \int_{u^2+v^2 \leq 1} 4(u^2 + v^2) \, du \, dv = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 4r^2 r \, dr \, d\theta = 2\pi.$$

Dove è l'errore? ☺

### 3. Integrali impropri (con $n = 2$ )

Trattiamo inizialmente e più diffusamente il caso in cui il dominio di integrazione  $\Omega$  non è limitato e  $f$  è una funzione continua e **non negativa**.

Segue il caso in cui il dominio di integrazione  $\Omega$  è limitato,  $f$  è non negativa, ma non è limitata.

**3.1. Funzioni continue su domini non limitati.** Sia quindi  $\Omega$  un insieme unione finita di domini normali rispetto a uno degli assi, ma non limitato. Indichiamo con  $B_R(0)$  il cerchio centrato nell'origine di raggio  $R$ , ossia

$$B_R(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Allora  $\Omega \cap B_R(0)$  è un insieme limitato e unione finita di domini normali rispetto agli assi. Sia  $f$  una funzione non negativa che sia continua in  $\Omega$  (o anche solamente integrabile in  $\Omega \cap B_R(0)$  per ogni  $R > 0$ ).

DEFINIZIONE 4.5. Diremo che  $f$  è integrabile in senso improprio in  $\Omega$  se esiste finito il

$$(4.4) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Omega \cap B_R(0)} f(x, y) dx dy.$$

In tal caso poniamo

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Omega \cap B_R(0)} f(x, y) dx dy.$$

Osserviamo che avremmo potuto anche “tagliare  $\Omega$ ” con una famiglia di sottoinsiemi che non necessariamente siano cerchi. Ad esempio, avremmo potuto considerare una famiglia composta da quadrati sempre più grandi, ponendo

$$Q_R(0) = \{(x, y) : |x| \leq R, |y| \leq R\}$$

e usando i quadrati  $Q_R(0)$  al posto dei cerchi  $B_R(0)$ .

Ebbene, avremmo ottenuto lo stesso risultato, ovvero: esiste finito il limite della formula (4.4) se e solo se esiste finito  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Omega \cap Q_R(0)} f dx dy$  e sono uguali. Questo succede perché le famiglie dei cerchi e dei quadrati sono “confrontabili”, ossia ogni quadrato è contenuto in un cerchio di raggio opportuno e, viceversa, ogni cerchio è contenuto in un quadrato di ampiezza opportuna.

☞ **ESEMPIO 4.15.** Per quali  $\alpha > 0$  risulta integrabile in senso improprio sulla corona circolare  $\Omega = \{x^2 + y^2 > 1\}$  la funzione  $f_{\alpha}(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}}$ ? La funzione  $f_{\alpha}$  è continua in  $\Omega$ , unione di due domini normali rispetto agli assi. Passando in coordinate polari otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \cap B_R(0)} f_{\alpha}(x, y) dx dy &= \int_{1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} dx dy \\ &= \int_{[1, R] \times [0, 2\pi)} \frac{1}{r^{\alpha}} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^R r^{1-\alpha} dr \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} 2\pi \left[ \frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right]_1^R & \alpha \neq 2 \\ 2\pi [\log r]_1^R & \alpha = 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{2\pi}{2-\alpha} (R^{2-\alpha} - 1) & \alpha \neq 2 \\ 2\pi \log R & \alpha = 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Quindi: se  $0 < \alpha \leq 2$ , allora  $\int_{\Omega \cap B_R(0)} f_\alpha(x, y) dx dy \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} +\infty$ , ovvero  $f_\alpha$  non risulta integrabile in  $\Omega$ .

Se invece  $\alpha > 2$ , allora  $\int_{\Omega \cap B_R(0)} f_\alpha(x, y) dx dy \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{\alpha-2}$ , quindi  $f_\alpha$  è integrabile in  $\Omega$  e

$$\int_{\Omega} f_\alpha(x, y) dx dy = \frac{2\pi}{\alpha-2}.$$

☺

Se  $f$  non fosse non negativa, scriviamo  $f^+ = \max(f, 0)$  e  $f^- = -\min(f, 0)$ . Diremo che  $f = f^+ - f^-$  è integrabile in senso improprio su  $\Omega$  se  $f^\pm$  lo sono e poniamo

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\Omega} f^+(x, y) dx dy - \int_{\Omega} f^-(x, y) dx dy.$$

C'è un facile criterio per stabilire se una funzione sia integrabile, analogo al criterio del confronto asintotico visto l'anno scorso per integrali impropri di una variabile.

**TEOREMA 4.16 (del confronto).** *Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua nella corona  $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$ .*

i) *Supponiamo che esistano  $\alpha > 2$  e  $C \geq 0$  tali che*

$$|f(x, y)| \leq C \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} \quad \forall (x, y) \in \Omega,$$

*allora  $f$  è integrabile in  $\Omega$ .*

ii) *Se esistono  $\alpha \leq 2$  e  $C > 0$  tali che*

$$f(x, y) \geq C \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} \quad \forall (x, y) \in \Omega,$$

*allora  $f$  non è integrabile in  $\Omega$ .*

☞ **ESEMPIO 4.17.** (Importante) Calcolare  $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy$ . Siccome la funzione  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/2}$  soddisfa banalmente le ipotesi del Teorema 4.16, allora  $f$  è integrabile in  $\mathbb{R}^2$ , che è un dominio normale rispetto agli assi. Cerchiamo di calcolare questo integrale. Innanzi

tutto, abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R(0)} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy$$

e, passando in coordinate polari, otteniamo

$$\begin{aligned} &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[0,R] \times [0,2\pi]} e^{-r^2/2} r dr d\theta \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \left( \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\theta \right) dr \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R 2\pi e^{-r^2} r dr \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Allo stesso risultato dobbiamo pervenire adoperando la famiglia dei quadrati  $Q_R(0)$ .

$$\begin{aligned} 2\pi &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{Q_R(0)} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \left( \int_{-R}^R e^{-x^2/2} e^{-y^2/2} dx \right) dy \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \int_{-R}^R e^{-x^2/2} dx \right) \left( \int_{-R}^R e^{-y^2/2} dy \right) \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \int_{-R}^R e^{-x^2/2} dx \right)^2 \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

Questo conto porta a una formula molto importante per i probablisti:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

☺

Il prossimo esempio mostra come il Teorema 4.16 del confronto, parte ii) non funzioni qualora l'insieme non sia una corona (o almeno un settore di una corona).

▣ **ESEMPIO 4.18.** Sia  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, 0 < y < e^{-x}\}$ . Verificare che  $f(x, y) = 1$  è integrabile in  $\Omega$  (sebbene non sia neanche infinitesima). Calcoliamo questo integrale, utilizzando la famiglia dei quadrati. Innanzi tutto, abbiamo

$$\int_{\Omega} 1 dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{Q_R(0) \cap \Omega} 1 dx dy$$

siccome, per  $R$  grande,  $Q_R(0) \cap \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < R, 0 < y < e^{-x}\}$ , otteniamo

$$\begin{aligned} &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \int_0^{e^{-x}} dy dx \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{-x} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} (1 - e^{-R}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

☺

**3.2. Funzioni non limitate superiormente: singolarità isolate.** Supponiamo che  $\Omega$  sia una regione limitata,  $f$  sia non negativa e non risulti limitata in  $\Omega$ , ma sia continua al di fuori di un insieme di misura bidimensionale nulla (come un insieme finito di punti, oppure un segmento).

Indichiamo con  $B_R(x_0, y_0)$  il cerchio centrato in un punto  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  di raggio  $R$  e con  $Q_R(x_0, y_0)$  il quadrato centrato in  $(x_0, y_0)$  di semilato  $R$ , ossia

$$\begin{aligned} B_R(x_0, y_0) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2\} \\ Q_R(x_0, y_0) &= \{(x, y) : |x - x_0| \leq R, |y - y_0| \leq R\}. \end{aligned}$$

Il caso più facile è quello in cui  $f$  presenta una singolarità isolata in  $(x_0, y_0)$ . In questo caso diremo che  $f$  è integrabile in  $\Omega$  quando esiste finito

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus B_R(x_0, y_0)} f(x, y) dx dy.$$

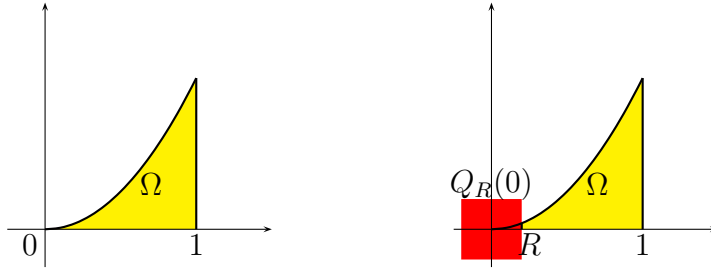
In tal caso poniamo

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{R \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus B_R(x_0, y_0)} f(x, y) dx dy.$$

Equivalentemente,

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{R \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus Q_R(x_0, y_0)} f(x, y) dx dy.$$

☛ **ESEMPIO 4.19.** Dire se  $f(x, y) = \frac{1}{(x+y)^2}$  è integrabile in senso improprio sull'insieme  $\Omega = \{(x, y) : x \in (0, 1], 0 < y < x^2\}$ .



La funzione  $f$  è continua in  $\Omega$ , ma presenta nell'origine una singolarità. Si ha  $\Omega \setminus Q_R(0) = \{(x, y) : x \in (R, 1], 0 < y < x^2\}$  e valutiamo

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega \setminus Q_R(0)} f(x, y) \, dx \, dy &= \int_R^1 \int_0^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2} \, dy \, dx \\
 &= \int_R^1 \left. -\frac{1}{(x+y)} \right|_0^{x^2} \, dx \\
 &= \int_R^1 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+x^2} \right) \, dx \\
 &= \int_R^1 \frac{1}{x+1} \, dx \\
 &= \log 2 - \log(1+R) \xrightarrow{R \rightarrow 0} \log 2.
 \end{aligned}$$

Quindi  $f$  è integrabile in senso improprio in  $\Omega$  e  $\int_{\Omega} f = \log 2$ .  $\odot$

■ ESEMPIO 4.20. Dire se  $f(x, y) = \frac{1}{xy}$  è integrabile in senso improprio sull'insieme  $\Omega = \{(x, y) : x \in (0, 1), x^2 < y < x\}$ . La funzione  $f$  è continua in  $\Omega$ , ma presenta nell'origine una singolarità. Si ha  $\Omega \setminus Q_R(0) = \{(x, y) : x \in (R, 1), x^2 < y < x\}$  e valutiamo

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega \setminus Q_R(0)} f(x, y) \, dx \, dy &= \int_R^1 \int_{x^2}^x \frac{1}{xy} \, dy \, dx \\
 &= \int_R^1 \frac{1}{x} \log y \Big|_{x^2}^x \, dx \\
 &= \int_R^1 -\frac{\log x}{x} \, dx \\
 &= - \int_{\log R}^0 t \, dt \\
 &= \frac{\log^2(R)}{2} \xrightarrow{R \rightarrow 0} +\infty.
 \end{aligned}$$

Quindi  $f$  non è integrabile in senso improprio in  $\Omega$ .  $\odot$

■ ESEMPIO 4.21. Per quali  $\alpha > 0$  risulta integrabile in senso improprio sulla corona circolare  $\Omega = \{0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$  la funzione  $f_{\alpha}(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}}$ ? La funzione  $f_{\alpha}$  è continua in  $\Omega$ ,

unione di due domini normali rispetto agli assi, ma non è superiormente limitata perché ha una singolarità isolata nell'origine. Passando in coordinate polari otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus B_R(0)} f_\alpha(x, y) dx dy &= \int_{[R,1] \times [0,2\pi)} \frac{1}{r^\alpha} r dr d\theta = 2\pi \int_R^1 r^{1-\alpha} dr \\ &= \begin{cases} 2\pi \left[ \frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right]_R^1 & \alpha \neq 2 \\ 2\pi [\log r]_R^1 & \alpha = 2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2\pi}{2-\alpha} (1 - R^{2-\alpha}) & \alpha \neq 2 \\ -2\pi \log R & \alpha = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi: se  $0 < \alpha < 2$ , allora  $\int_{\Omega \setminus B_R(0)} f_\alpha(x, y) dx dy \xrightarrow{R \rightarrow 0} \frac{2\pi}{2-\alpha}$ , quindi  $f_\alpha$  è integrabile in  $\Omega$  e

$$\int_{\Omega} f_\alpha(x, y) dx dy = \frac{2\pi}{2-\alpha}.$$

Se invece  $\alpha \geq 2$ , allora  $\int_{\Omega \cap B_R(0)} f_\alpha(x, y) dx dy \xrightarrow{R \rightarrow 0} +\infty$ , ovvero  $f_\alpha$  non risulta integrabile nella corona  $\Omega$ . ☺

Come nel caso precedente ricaviamo il seguente criterio.

**TEOREMA 4.22 (del confronto).** *Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua nella corona  $\Omega = \{(x, y) : 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < 1\}$ .*

i) *Supponiamo che esistano  $\alpha < 2$  e  $C \geq 0$  tali che*

$$|f(x, y)| \leq C \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} \quad \forall (x, y) \in \Omega,$$

*allora  $f$  è integrabile in senso improprio in  $\Omega$ .*

ii) *Se esistono  $\alpha \geq 2$  e  $C > 0$  tali che*

$$f(x, y) \geq C \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} \quad \forall (x, y) \in \Omega,$$

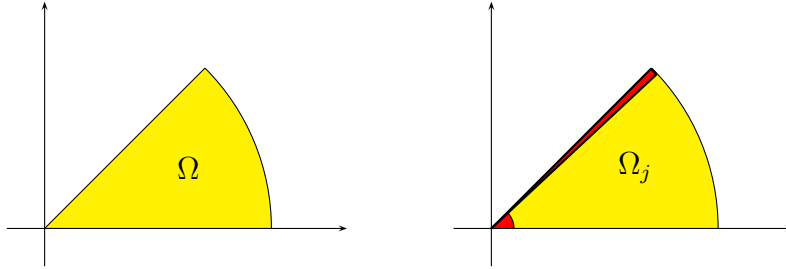
*allora  $f$  non è integrabile in  $\Omega$ .*

**3.3. Funzioni non limitate superiormente: singolarità non isolate.** Più complicato è il caso in cui la singolarità non sia isolata, eventualmente su  $\Omega$  non limitato (è il caso ad esempio della funzione  $f(x, y) = \frac{1}{y-x^2}$  in  $\Omega = \{(x, y) : |x| \leq y\}$ ).

In questo caso si ricorre a una successione crescente di sottoinsiemi  $\Omega_j$  di  $\Omega$  tali che  $f$  sia integrabile su ogni  $\Omega_j$  e  $\Omega = \cup_{j=1}^{+\infty} \Omega_j$  (a meno di un insieme di misura nulla) e si valuta  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_j} f$ . Qualora questo limite esista, si può dimostrare che non dipende dalla scelta della successione  $\Omega_j$  e si pone, qualora sia finito,

$$\int_{\Omega} f = \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_j} f.$$

▣ ESEMPIO 4.23. Dire se  $f(x, y) = \frac{1}{x-y}$  è integrabile in  $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, 0 < y < x\}$ .



La funzione  $f$  non è limitata, perché presenta una singolarità sui punti del tipo  $y = x$ . Scegliamo

$$\Omega_j = \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta) : \frac{1}{j} < r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{4} - \frac{1}{j} \right\}$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_j} f &= \int_{1/j}^1 \int_0^{\pi/4 - 1/j} \frac{1}{r(\cos \theta - \sin \theta)} d\theta r dr \\ &= \left(1 - \frac{1}{j}\right) \left( \int_0^{\pi/4 - 1/j} \frac{\sqrt{2}}{\sin(\pi/4 - \theta)} d\theta \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{j}\right) \left( \int_{\pi/4}^{1/j} -\frac{\sqrt{2}}{\sin(u)} du \right) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} +\infty, \end{aligned}$$

perché  $u \mapsto 1/\sin u$  è un infinito di ordine 1 in 0.

Quindi  $f$  non è integrabile in senso improprio in  $\Omega$ . ☺

Se  $f$  non è non negativa, si ragiona come prima sulla sua parte positiva e sulla parte negativa.

#### 4. Integrali $n$ -dimensionali

La teoria sviluppata nelle sezioni precedenti nel caso  $n = 2$  si può estendere al caso di dimensioni maggiori. La definizione di integrale sui rettangoli viene sostituita dall'integrazione sugli  $n$ -intervalli, ovvero insiemi del tipo  $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ . In particolare, nel caso  $n = 3$ , si considerano i parallelepipedi. In maniera del tutto analoga si definiscono somme superiori, inferiori e quindi si dà senso all'integrale  $n$ -dimensionale.

Vale ancora un analogo del Teorema 4.2 di riduzione, che ci permette di scrivere un integrale su un rettangolo come iterazione di due integrali 1-dimensionali. In dimensione maggiore esistono vari modi di ordinare e raggruppare le variabili. Ad esempio, se  $n = 3$ , potremmo voler fissare  $(x, y)$  e integrare prima lungo un filo  $a_3 \leq z \leq b_3$ , oppure possiamo fissare  $z$  e integrare prima su uno strato bidimensionale  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ . Inoltre si potrebbe anche

cambiare l'ordine della variabili, ad esempio tenendo fisse  $(x, z)$  e integrando su un filo  $a_2 \leq y \leq b_2$ .

In ogni caso, il Teorema di riduzione per integrali  $n$ -dimensionali afferma che se  $f$  è una funzione continua su un  $n$ -intervallo  $I$ , allora è possibile scrivere l'integrale di  $f$  su  $I$  riducendolo al prodotto di un integrale  $k$ -dimensionale per un integrale  $n - k$  dimensionale, prendendo le variabili in qualsiasi ordine, ad esempio

$$\int_I f = \int_{[a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k]} \left( \int_{[a_{k+1}, b_{k+1}] \times \dots \times [a_n, b_n]} f(x_1, \dots, x_n) dx_{k+1} \dots dx_n \right) dx_1 \dots dx_k.$$

Ci soffermeremo maggiormente sul caso  $n = 3$ . In questo caso si parla talvolta di integrali tripli e ad esempio

$$\begin{aligned} \int_I f &= \iint_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} \left( \int_{[a_3, b_3]} f(x, y, z) dz \right) dx dy \\ &= \iint_{[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]} \left( \int_{[a_1, b_1]} f(x, y, z) dx \right) dy dz \\ &= \int_{[a_2, b_2]} \left( \iint_{[a_1, b_1] \times [a_3, b_3]} f(x, y, z) dx dz \right) dy. \end{aligned}$$

Le prime due formule sono esempi di integrazioni per fili; l'ultima è un'integrazione per strati.

☞ ESEMPIO 4.24. Calcolare  $\int_{[0,1] \times [2,3] \times [-1,1]} f$  dove  $f(x, y, z) = x + y + z$ . Si ha

$$\begin{aligned} \int_{[0,1] \times [2,3] \times [-1,1]} (x + y + z) dx dy dz &= \int_{[0,1] \times [2,3]} \left( \int_{-1}^1 (x + y + z) dz \right) dy dx \\ &= \int_{[0,1] \times [2,3]} (2x + 2y) dx dy \\ &= \int_0^1 \left( \int_2^3 (2x + 2y) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 (2x + 5) dx = 6. \end{aligned}$$

☺

Potremo integrare su domini anche più generali dei 3-intervalli. Ad esempio, per  $n = 3$ , risultano domini normali rispetto all'asse  $z$  quei sottoinsiemi della forma

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y), (x, y) \in \Omega\}$$

con  $\Omega$  unione finita di domini 2-dimensionali e normali rispetto all'asse  $x$  o all'asse  $y$  e  $g_1, g_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni continue.

In modo analogo si definiscono i domini normali rispetto all'asse  $x$  o all'asse  $y$ .

Risultano integrabili le funzioni continue su tutti gli insiemi più conosciuti della geometria: cilindri, poliedri, ... In particolare, questo fatto ci permette di calcolare volumi di questi insiemi  $E$  calcolando  $\iiint_E 1$ .

Ci sono analoghi del Teorema 4.5 per il calcolo di integrali su domini normali rispetto a uno degli assi e del Teorema 4.8 di cambiamento di variabili. In un dominio normale rispetto all'asse  $z$  possiamo integrare per fili:

**TEOREMA 4.25.** *Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua su un dominio  $E$  normale rispetto all'asse  $z$ . Allora*

$$\iiint_E f = \int_{\Omega} \left( \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

- **ESEMPIO 4.26.** Calcolare il volume del solido  $E$  ottenuto tagliando il cilindro di raggio 1 dato da  $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1\}$  con i piani  $z = 0$  e  $z + y = 2$ . Il solido  $E$  è un dominio normale rispetto all'asse  $z$ , infatti, se poniamo  $B_1(0) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , abbiamo

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2 - y, (x, y) \in B_1(0)\}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \text{volume}(E) &= \int_E 1 dx dy dz = \int_{B_1(0)} \left( \int_0^{2-y} 1 dz \right) dx dy \\ &= \int_{B_1(0)} (2 - y) dx dy \\ &= \int_{B_1(0)} 2 dx dy = 2\pi. \end{aligned}$$

☺

- **ESEMPIO 4.27.** Calcolare il volume del solido  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 3 - 2y\}$ , ovvero del solido che si ottiene tagliando il paraboloide  $z = x^2 + y^2$  con il piano  $z = 3 - 2y$ .

Il primo problema è descrivere meglio l'insieme come normale rispetto all'asse  $z$ : occorre calcolare la proiezione sul piano  $z = 0$ . Dovrà risultare  $x^2 + y^2 \leq 3 - 2y$ , quindi  $x^2 + (y+1)^2 \leq 4$  e

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 3 - 2y, (x, y) \in B_2(0, -1)\}.$$

Quindi, passando in coordinate polari centrate in  $(-1, 0)$ ,

$$\begin{aligned} \text{vol}(E) &= \iiint_E 1 dx dy dz = \iint_{B_2(0,-1)} \int_{x^2+y^2}^{3-2y} dz dx dy \\ &= \iint_{B_2(0,-1)} (4 - x^2 - (y+1)^2) dx dy = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4 - r^2) r d\theta dr \\ &= \pi \int_4^0 -t dt = 8\pi. \end{aligned}$$





☞ ESEMPIO 4.28. Si calcoli il volume dell'intersezione di due cilindri di uguale raggio che si tagliano ortogonalmente, ovvero, a meno di una rotazione, calcoliamo il volume di  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2, x^2 + z^2 \leq r^2\}$ .

Possiamo procedere per strati. Infatti, tagliando il solido a  $x$  costante otteniamo il quadrato  $Q_x$  di lato  $2\sqrt{r^2 - x^2}$  e quindi

$$\begin{aligned} \text{vol}(E) &= \iiint_E 1 \, dx \, dy \, dz = \int_{-r}^r \text{area}(Q_x) \, dx \\ &= \int_{-r}^r 4(r^2 - x^2) \, dx = 16r^3/3. \end{aligned}$$



Un cambiamento di variabili è una mappa  $T$  biunivoca definita da  $T(s_1, \dots, s_n) = (x_1, \dots, x_n)$  con

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(s_1, \dots, s_n) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(s_1, \dots, s_n) \end{cases}$$

Ad esso si associa la matrice jacobiana

$$J_T = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi_1 & \partial_2 \varphi_1 & \dots & \partial_n \varphi_1 \\ \partial_1 \varphi_2 & \partial_2 \varphi_2 & \dots & \partial_n \varphi_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 \varphi_n & \partial_2 \varphi_n & \dots & \partial_n \varphi_n \end{pmatrix}.$$

Anche in questo caso il suo determinante è il fattore di dilatazione infinitesima richiesto per il

**TEOREMA 4.29** (di cambiamento di variabili). *Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $T : A \rightarrow T(A) \subseteq \mathbb{R}^n$  una mappa biunivoca di classe  $C^1(A)$ , ovvero le componenti  $\varphi_j$  abbiano derivate parziali continue in  $A$ . Sia inoltre  $\det J_T \neq 0$  in  $A$  e sia  $\Omega$  un dominio semplice rispetto a uno degli assi contenuto in  $T(A)$ . Allora se  $f$  è una funzione continua e integrabile in  $\Omega$ , vale*

$$\int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \cdots dx_n = \int_{T^{-1}(\Omega)} f \circ T(s_1, \dots, s_n) |\det(J_T(s_1, \dots, s_n))| \, ds_1 \cdots ds_n.$$

Nel caso  $n = 3$  sono particolarmente utilizzati i cambiamenti di coordinate seguenti.

**4.1. Coordinate cilindriche in  $\mathbb{R}^3$ .** Questo sistema di coordinate mantiene la coordinata cartesiana  $z$  inalterata e introduce coordinate polari nel piano  $xy$ . In formule, si tratta

della trasformazione  $T(r, \theta, z) : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  data da

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

per cui

$$|\det J| = \left| \begin{pmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x & \partial_z x \\ \partial_r y & \partial_\theta y & \partial_z y \\ \partial_r z & \partial_\theta z & \partial_z z \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = r.$$

In questo caso  $A = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$  e  $T(A) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$ . Come nel caso delle coordinate polari nel piano, stiamo escludendo un insieme cui competerebbe comunque un volume nullo. Pertanto se  $\Omega$  è un dominio in  $\mathbb{R}^3$  (e non occorre che  $\Omega \subset T(A)$ ) si ha

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{T^{-1}(\Omega)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

Le coordinate cilindriche sono utili quando il dominio di integrazione presenta una simmetria rispetto all'asse  $z$ , oppure quando il dominio di integrazione è delimitato da superfici del tipo  $z = \text{costante}$  (cioè un piano parallelo al piano  $xy$ ), oppure  $\theta = \text{costante}$  (cioè un semipiano perpendicolare al piano  $xy$  generato nel piano dai punti con argomento  $\theta$ ), oppure da  $r = \text{costante}$  (cioè da un cilindro infinito di raggio  $r$ ).

- ESEMPIO 4.30. Calcolare il volume di un toro  $\mathbb{T}$ , ovvero di un solido ottenuto mediante rotazione attorno all'asse  $z$  di un cerchio del piano  $xz$  non contenente l'origine e con centro sull'asse  $x$ . Supponiamo che il cerchio sia  $\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + z^2 \leq 1\}$ . I piani  $z = \text{costante}$ , variabile tra  $-1$  e  $1$ , intersecano il toro in corone circolari di raggio interno  $2 - \sqrt{1-z^2}$  e raggio esterno  $2 + \sqrt{1-z^2}$ .

Possiamo scrivere il toro generato da questo cerchio in coordinate cilindriche

$$T^{-1}(\mathbb{T}) = \left\{ (r, \theta, z) : -1 \leq z \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi, 2 - \sqrt{1-z^2} \leq r \leq 2 + \sqrt{1-z^2} \right\}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \text{volume}(\mathbb{T}) &= \int_{\mathbb{T}} 1 dx dy dz = \int_{T^{-1}(\mathbb{T})} 1 r dr d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 dz \int_{2-\sqrt{1-z^2}}^{2+\sqrt{1-z^2}} r dr = 2\pi \int_{-1}^1 \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{2-\sqrt{1-z^2}}^{2+\sqrt{1-z^2}} \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 2\sqrt{1-z^2} dz = 8\pi \int_0^1 \sqrt{1-z^2} dz = 2\pi \end{aligned}$$

Infatti l'ultimo integrale è l'area di un quarto del cerchio unitario. ☺

- ESEMPIO 4.31. Si calcoli il volume della regione  $E$  interna alla sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$  e sopra al paraboloido  $z = x^2 + y^2$ .

Adoperando coordinate cilindriche, possiamo descrivere l'insieme

$$T^{-1}(E) = \{(r, \theta, z) : 0 \leq \theta < 2\pi, z^2 \leq 6 - r^2, r^2 \leq z\}.$$

Le ultime due disequazioni implicano che  $z \geq 0$  e che  $r^4 \leq 6 - r^2$ , quindi  $(r^2 + 3)(r^2 - 2) \leq 0$ , ovvero  $r < \sqrt{2}$ . Quindi il volume richiesto è

$$\begin{aligned} \iint_E 1 dx dy dz &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} dz r dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (\sqrt{6-r^2} - r^2) r dr \\ &= \pi \left( - \int_6^4 (\sqrt{u} du - 2 \int_0^{\sqrt{2}} r^3 dr) \right) \\ &= \pi \left( \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_4^6 - 2 \right) \\ &= \pi(4\sqrt{6} - 22/3) = 2\pi(2\sqrt{6} - 11/3). \end{aligned}$$

☺

**4.2. Volume di un solido di rotazione.** Sia data la funzione  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  non negativa e continua. Con solido di rotazione attorno all'asse  $z$  intendiamo il solido  $S$  generato dalla rotazione attorno all'asse  $z$  del trapezoide compreso tra l'asse  $z \in [a, b]$  e il grafico della funzione  $x = \varphi(z)$ .

Possiamo procedere in due modi. Per strati, a  $z$  fissato, l'intersezione tra il piano a quota  $z$  e il solido è un cerchio  $C_z$  di raggio  $\varphi(z)$ . Pertanto il volume è

$$\text{vol}(S) = \int_a^b \text{area}(C_z) dz = \int_a^b \pi [\varphi(z)]^2 dz.$$

Oppure descriviamo  $S$  in coordinate cilindriche

$$T^{-1}(S) = \{(r, \theta, z) : z \in [a, b], \theta \in [0, 2\pi), 0 < r \leq \varphi(z)\}$$

da cui, come prima,

$$\text{vol}(S) = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{\varphi(z)} r dr d\theta dz = \int_a^b \pi [\varphi(z)]^2 dz.$$

■ **ESEMPIO 4.32.** Si calcoli il volume del solido  $S$  generato dalla rotazione del trapezoide  $\{(x, 0, z) : 0 \leq x \leq e^{-z} : z \in [0, 2]\}$  attorno all'asse  $z$ . Si calcoli inoltre  $\int_S |y| dx dy dz$ .

Si ha

$$\text{vol}(S) = \int_0^2 \pi e^{-2z} dz = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-4}).$$

Usando la descrizione di  $S$  in coordinate cilindriche

$$\begin{aligned} \int_S |y| dx dy dz &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{e^{-z}} r^2 |\sin \theta| dr d\theta dz \\ &= 2 \int_0^2 \int_0^{e^{-z}} r^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta dr dz = 4 \int_0^2 \int_0^{e^{-z}} r^2 dr dz \\ &= 4 \int_0^2 e^{-3z} / 3 dz = \frac{4}{9}(1 - e^{-6}). \end{aligned}$$

☺

**4.3. Coordinate sferiche in  $\mathbb{R}^3$ .** In questo sistema di coordinate a ogni punto  $P = (x, y, z)$  di  $\mathbb{R}^3$  corrisponde una terna  $(r, \theta, \phi) \in [0, +\infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi)$  tramite la legge

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

La coordinata  $r$  rappresenta la distanza dall'origine del punto  $P = (x, y, z)$ , quindi le superfici corrispondenti a  $r = \text{costante}$  sono le sfere centrate nell'origine. La coordinata  $\phi$  rappresenta l'angolo formato dal vettore  $(x, y, 0)$  con l'asse  $x$ . Le superfici corrispondenti a  $\phi = \text{costante}$  sono semipiani ortogonali al piano  $xy$  e l'intersezione tra la sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  e  $\phi = \text{costante}$  sono i meridiani della sfera; in questo senso,  $\phi$  è la longitudine. La coordinata  $\theta$  invece rappresenta l'angolo che il vettore  $(x, y, z)$  forma con l'asse  $z$ . Le superfici corrispondenti a  $\theta = \text{costante}$  sono coni con punta nell'origine e l'intersezione tra la sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  e  $\theta = \text{costante}$  sono i paralleli della sfera; in questo senso,  $\theta$  è la latitudine e varia tra 0 al polo nord e  $\pi$  al polo sud.

Calcoliamo ora il determinante della matrice jacobiana di questa trasformazione.

$$|\det J| = \left| \begin{pmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x & \partial_\phi x \\ \partial_r y & \partial_\theta y & \partial_\phi y \\ \partial_r z & \partial_\theta z & \partial_\phi z \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \right| = r^2 \sin \theta.$$

Scegliendo  $A = (0, +\infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ , si ha  $T(A) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$ . Di nuovo, l'insieme che escludiamo in questa trasformazione ha volume nullo, quindi possiamo dire che se  $\Omega$  è un dominio in  $\mathbb{R}^3$  (e non occorre che sia contenuto in  $T(A)$ ) si ha

$$\int_\Omega f(x, y, z) dx dy dz = \int_{T^{-1}(\Omega)} f(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi.$$

☛ **ESEMPIO 4.33.** Calcolare la massa di una semisfera (solida) di raggio 3, sapendo che la densità è due volte la distanza dall'origine (massa=densità per volume).

Possiamo pensare che la semisfera sia

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0\}$$

e che la densità sia regolata dalla funzione  $f(x, y, z) = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Allora la massa è

$$\int_S 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$$

In coordinate sferiche tale integrale diventa

$$\int_{\{0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}} 2r r^2 \sin \theta = 2 \int_0^3 r^3 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = 81\pi.$$

☺

▣ ESEMPIO 4.34. Si calcoli il volume di un “cono gelato”, ovvero dell’insieme

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$

In coordinate sferiche si ha

$$T^{-1}(E) = \{(r, \theta, \phi) : r \leq 1, \phi \in [0, 2\pi), \theta \leq \pi/4\}$$

quindi

$$\text{vol}(E) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr = 2\pi/3(1 - \sqrt{2}/2).$$

☺

▣ ESEMPIO 4.35. Si calcoli  $\int_T \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2} dx dy dz$  dove  $T$  è la differenza tra la sfera  $S_2$  di raggio 2 e centro  $(0, 0, 2)$  e la sfera  $S_1$  di raggio 1 e centro  $(0, 0, 1)$ .

Si possono usare coordinate sferiche (ma anche cilindriche). Utilizzando quelle sferiche, le sfere sono descritte da

$$T^{-1}(S_2) = T^{-1} \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4\} = \{(r, \theta, \phi) : r^2 - 4r \cos \theta \leq 0\}$$

$$T^{-1}(S_1) = T^{-1} \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1\} = \{(r, \theta, \phi) : r^2 - 2r \cos \theta \leq 0\}$$

Quindi

$$T^{-1}(S_2 \setminus S_1) = \{(r, \theta, \phi) : 2 \cos \theta < r \leq 4 \cos \theta\}$$

da cui necessariamente  $\theta \in [0, \pi/2]$  e

$$\begin{aligned} \int_T \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2} dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \int_{2 \cos \theta}^{4 \cos \theta} \frac{1}{1+r^2} r^2 \sin \theta dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 \int_{2u}^{4u} \left(1 - \frac{1}{1+r^2}\right) dr du \\ &= 2\pi \int_0^1 (2u - \arctan(4u) + \arctan(2u)) du \\ &= 2\pi \left(1 - \arctan(4) + \frac{\log(17)}{8} + \arctan(2) - \frac{\log(5)}{4}\right). \end{aligned}$$

☺

**4.4. Coordinate sferiche in  $\mathbb{R}^n$ .** In  $\mathbb{R}^n$  il passaggio a coordinate polari è definito da

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta_1 \\ x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \cos \phi \\ x_n = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \sin \phi \end{cases} \quad r \in [0, +\infty), \theta_j \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi).$$

Si può dimostrare che il determinante jacobiano di questa trasformazione è

$$\det(J_T) = r^{n-1} (\sin \theta_1)^{n-2} (\sin \theta_2)^{n-3} \cdots \sin \theta_{n-2}.$$

In particolare, se  $f$  è una funzione che dipende solo dalla distanza dall'origine, cioè  $f(\mathbf{x}) = f_0(\|\mathbf{x}\|)$ , allora

$$\int_{\|\mathbf{x}\| < R} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \omega_n \int_0^R f_0(r) r^{n-1} dr,$$

dove  $\omega_n$  è un numero che dipende solo dalla dimensione dello spazio e rappresenta l'area della sfera di raggio 1 in  $\mathbb{R}^n$  (ad esempio, per  $n = 2$ , si ottiene la lunghezza della circonferenza:  $\omega_2 = 2\pi$ ; per  $n = 3$  si ottiene l'usuale area della sfera  $\omega_3 = 4\pi$ ; in ogni caso, si intende l'area della superficie della sfera  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}$  come oggetto  $(n - 1)$ -dimensionale).

**4.5. Integrazione impropria in  $\mathbb{R}^n$ .** Analogamente a quanto visto per  $n = 2$ , possiamo definire l'integrale improprio di una funzione continua  $f$  anche nel caso in cui il dominio di integrazione non è limitato e  $f$  è una funzione continua e non negativa. Le definizioni sono le stesse viste nella sezione 3 qualora si considerino funzioni definite su  $\mathbb{R}^n$  e i cerchi o i quadrati vengano sostituiti con i loro analoghi  $n$ -dimensionali. Indicheremo ancora con  $B_R(0)$  la “palla” di  $\mathbb{R}^n$  centrata nell'origine

$$B_R(0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| < R\}$$

e con  $Q_R(0)$  l'ipercubo centrato nell'origine

$$Q_R(0) = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_j| < R \quad \forall j = 1, \dots, n\}.$$

■ **ESEMPIO 4.36.** Per quali  $\alpha > 0$  risulta integrabile in senso improprio sulla corona circolare  $\Omega = \{\|\mathbf{x}\| > 1\}$  la funzione  $f_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^\alpha}$ ? La funzione  $f_\alpha$  è continua in  $\Omega$ . Passando in

coordinate polari otteniamo

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega \cap B_R(0)} f_\alpha(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_{1 \leq \|\mathbf{x}\| \leq R} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^\alpha} \, d\mathbf{x} = \omega_n \int_1^R \frac{1}{r^\alpha} r^{n-1} \, dr \\
 &= \omega_n \int_1^R r^{n-1-\alpha} \, dr \\
 &= \begin{cases} \omega_n \left[ \frac{r^{n-\alpha}}{n-\alpha} \right]_1^R & \alpha \neq n \\ \omega_n [\log r]_1^R & \alpha = n \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{\omega_n}{n-\alpha} (R^{n-\alpha} - 1) & \alpha \neq n \\ \omega_n \log R & \alpha = n. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Quindi: se  $0 < \alpha \leq n$ , allora  $\int_{\Omega \cap B_R(0)} f_\alpha(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} +\infty$ , ovvero  $f_\alpha$  non risulta integrabile in  $\Omega$ .

Se invece  $\alpha > n$ , allora  $\int_{\Omega \cap B_R(0)} f_\alpha(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \frac{\omega_n}{\alpha - n}$ , quindi  $f_\alpha$  è integrabile in  $\Omega$  e

$$\int_{\Omega} f_\alpha = \frac{\omega_n}{\alpha - n}.$$

☺

Il criterio per stabilire se una funzione sia integrabile diventa

**TEOREMA 4.37 (del confronto).** *Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua nella corona  $\Omega = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| > 1\}$ .*

i) *Supponiamo che esistano  $\alpha > n$  e  $C \geq 0$  tali che*

$$|f(\mathbf{x})| \leq C \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^\alpha} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

*allora  $f$  è integrabile in  $\Omega$ .*

ii) *Se  $f$  è non negativa ed esistono  $\alpha \leq n$  e  $C > 0$  tali che*

$$f(\mathbf{x}) \geq C \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^\alpha} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

*allora  $f$  non è integrabile in  $\Omega$ .*

### 5. La funzione Gamma di Eulero

L'integrale improprio  $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$  risulta convergente per ogni  $t > 0$ . Pertanto è ben definita e con dominio  $(0, +\infty)$  la funzione

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx,$$

che è detta funzione Gamma.

In Analisi, molte sono le proprietà interessanti della funzione Gamma. Innanzi tutto, calcoliamo alcuni valori di questa funzione. È immediato controllare che  $\Gamma(1) = 1$ . Un altro valore importante si ottiene per  $t = \frac{1}{2}$ . Infatti, con la sostituzione  $y = (2x)^{1/2}$  si ottiene  $dy = (2x)^{-1/2} dx$  e quindi

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx \\ &= \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{2} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} dy \\ &= \sqrt{2} \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} = \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo visto che

$$(4.5) \quad \Gamma(1) = 1 \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

La proprietà fondamentale della funzione Gamma è la formula

$$(4.6) \quad \Gamma(t+1) = t\Gamma(t) \quad \forall t > 0,$$

di facile verifica.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Con una integrazione per parti si ottiene

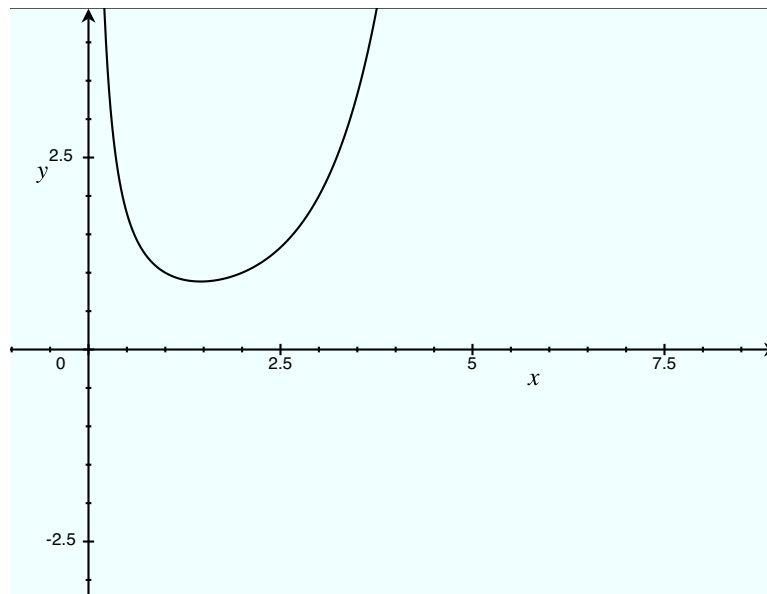
$$\begin{aligned} \Gamma(t+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^t dx \\ &= [-e^{-x} x^t]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} t x^{t-1} dx \\ &= t \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx = t\Gamma(t). \end{aligned}$$



Altri valori particolari si ricavano mediante le formule (4.6) e (4.5): per ogni  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) \\ &= \dots = n(n-1)\cdots 1\Gamma(1) \\ &= n! \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(n - \frac{1}{2} + 1\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - 1 + \frac{1}{2}\right) \\ &= \dots = \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)\dots\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)\dots\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

La funzione Gamma (**gamma** per MATLAB) ha grafico



e tende a  $+\infty$  a  $+\infty$ . Si può dimostrare che tende a  $+\infty$  per  $t \rightarrow +\infty$  come  $t^t \sqrt{t} e^{-t}$ : è il contenuto del

TEOREMA 4.38 (Formula di Stirling). *Si ha*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(t+1)}{t^t \sqrt{2\pi t} e^{-t}} = 1.$$

*In particolare*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n \sqrt{2\pi n} e^{-n}} = 1.$$

**5.1. Area e volume delle sfere in  $\mathbb{R}^n$ .** L'idea per calcolare l'area della sfera in  $\mathbb{R}^n$  è quella di calcolare

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\mathbf{x}\|^2/2} d\mathbf{x}$$

in due modi diversi.

Innanzitutto, l'integrale improprio è convergente e

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\mathbf{x}\|^2/2} d\mathbf{x} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{Q_R(0)} e^{-\|\mathbf{x}\|^2/2} d\mathbf{x} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R(0)} e^{-\|\mathbf{x}\|^2/2} d\mathbf{x}.$$

Ricordando che  $\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ , si ha

$$\begin{aligned} \int_{Q_R(0)} e^{-\|\mathbf{x}\|^2/2} d\mathbf{x} &= \int_{-R}^R e^{-x_1^2/2} dx_1 \int_{-R}^R e^{-x_2^2/2} dx_2 \cdots \int_{-R}^R e^{-x_n^2/2} dx_n \\ &= \left( \int_{-R}^R e^{-x^2/2} dx \right)^n \\ &\xrightarrow{R \rightarrow +\infty} (\sqrt{2\pi})^n. \end{aligned}$$

L'altro modo che abbiamo per calcolare l'integrale è quello di vederlo come limite degli integrali sulle palle e passare in coordinate polari:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\mathbf{x}\|^2/2} d\mathbf{x} &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R(0)} e^{-\|\mathbf{x}\|^2/2} d\mathbf{x} \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \omega_n \int_0^R e^{-r^2/2} r^{n-1} dr \\ &= \omega_n \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{-s} (2s)^{\frac{n}{2}-1} ds \\ &= 2^{\frac{n}{2}-1} \omega_n \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{\frac{n}{2}-1} ds \\ &= 2^{\frac{n}{2}-1} \omega_n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right). \end{aligned}$$

Il risultato deve essere lo stesso; questo vuol dire che

$$(\sqrt{2\pi})^n = 2^{\frac{n}{2}-1} \omega_n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

quindi

$$\omega_n = \frac{2(\pi)^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Se  $n$  è pari, allora  $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2} - 1\right)!$  Se invece  $n$  è dispari, allora  $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{n-1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{n}{2} - 1\right) \left(\frac{n}{2} - 2\right) \cdots \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$ . Quindi la sfera di  $\mathbb{R}^n$  con  $n = 2k$

$$\omega_{2k} = \frac{2(\pi)^k}{k!}$$

mentre in dimensione dispari  $n = 2k + 1$

$$\omega_{2k+1} = \frac{2^k (\pi)^k}{(2k-1)!!}$$

dove  $(2k-1)!! = (2k-1)(2k-3)\cdots 1$ .

Infine, il volume della sfera piena  $B_R(0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq R\}$  vale

$$\begin{aligned} \text{vol}(B_R(0)) &= \omega_n \int_0^R r^{n-1} dr \\ &= \omega_n \frac{R^n}{n}. \end{aligned}$$

## 6. Esercizi

1) Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{[0,2] \times [0,1]} (x+y) dx dy \quad \int_{\{x^2+y^2 \leq 1, y \geq 0\}} (x^3 + xy^2) dx dy \quad \int_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} \frac{\arctg y}{x^2 + y^4 + 2} dx dy$$

$$\int_{\Omega} xy dx dy \quad \text{dove il bordo di } \Omega \text{ è formato da } y = x^2, x = y^2$$

$$\int_{\Omega} \frac{x}{y} e^y dx dy \quad \text{dove } \Omega = \{0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\} \quad (\text{attenzione, è improprio})$$

$$\int_{\Omega} \log x dx dy \quad \text{dove il bordo di } \Omega \text{ è formato da } x > 0, y > 0, 2x + 2y = 5, xy = 1$$

$$\int_{\Omega} (x+y) dx dy \quad \text{dove } \Omega \text{ è il quadrilatero di vertici } (2, 2), (1, -1), (-2, -2), (-1, 1)$$

$$\int_T \frac{x^2}{1+xy} dx dy \quad \text{dove } T \text{ è il triangolo di vertici } (0, 0), (1, 1), (1, 0)$$

$$\int_{\Omega} xy dx dy \quad \text{dove } \Omega = \{x \geq 0, y \geq 0, x^2 + 4y^2 \leq 4\}$$

$$\int_{\Omega} (x-1)y dx dy \quad \text{dove } \Omega = \{y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2x, x^2 + y^2 + 3 \geq 4x\}$$

$$\int_{\Omega} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} dx dy \quad \text{dove } \Omega = \{x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$$

2) Adoperando le sostituzioni indicate, oppure passando in coordinate polari, calcolare

$$\int_C xy \, dx \, dy \quad \text{dove } C \text{ è il quarto della corona circolare di raggi 1 e 2 nel primo quadrante}$$

$$\int_S \sqrt{4 - x^2 - y^2} \, dx \, dy \quad \text{dove } S = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$\int_{\{|x|+|y|\leq 1\}} e^{x+y} \, dx \, dy \quad (\text{elaborato})$$

$$\int_P (x^2 + y^2) \, dx \, dy \quad \text{dove } P \text{ è il parallelogramma delimitato da } \begin{cases} x + y = 1, & x + y = 2, \\ 3x + 4y = 5, & 3x + 4y = 6 \end{cases}$$

(porre  $s = x + y$ ,  $t = 3x + 4y$ )

$$\int_D \frac{x^2 y}{1 + xy} \, dx \, dy \quad \text{dove } D \text{ è il triangolo di vertici } (0, 0), (1, 0), (0, 1)$$

(può essere utile porre  $x = s(1 + t)$ ,  $y = s(1 - t)$ )

3) Calcolare l'area della regione piana racchiusa dalla curva  $\gamma(t) = (2 \cos^3 t, 3 \sin^3 t)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ .

4) Calcolare  $\int_D x^2 \, dx \, dy$  dove  $D$  è la regione piana definita dalle disequazioni

$$y \leq -x^2 + \frac{1}{2}x + 3, \quad y \geq -x^2 - x, \quad y \geq -x^2 + 2x.$$

5) Disegnare l'insieme

$$A = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq e^z, \quad 0 \leq z \leq 1\}.$$

Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando l'insieme

$$A' = \{(x, 0, z) : (x, z) \in A\}$$

attorno all'asse  $z$ .

6) Calcolare il volume del solido di rotazione attorno all'asse  $z$  generato da

$$\{(y, z), z \geq y^2, z \leq \frac{1}{y}, z \leq 1 + 2y, y \geq 0\}.$$

7) Calcolare  $\int_{\Omega} f$  dove

$$f(x, y, z) = e^{x^2} \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, -1 \leq z \leq 4\}$$

$$f(x, y, z) = 1 \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2|y| + |z| \leq 1 - x^2\}$$

$$f(x, y, z) = x \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, -x^2 \leq z \leq 2 - x - y\}$$