CAPITOLO 1

I numeri complessi

È noto che l'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni reali. Costruiamo un ampliamento dell'insieme dei numeri reali in modo che anche questa equazione possa avere soluzione.

Introduciamo i, talvolta chiamato unità immaginaria, come un nuovo numero. Desidereremmo che fosse tale che

$$i^2 + 1 = 0,$$

rispetto alle operazioni di somma e prodotto che estendano quelle dei numeri reali.

Definizione 1.1. Un numero complesso è un'espressione della forma

$$a + ib$$

dove a e b sono numeri reali e i è l'unità immaginaria. Si denota con $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi.

Quindi

$$\mathbb{C} = \{a + ib \,:\, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Due numeri complessi $a_1 + ib_1$ e $a_2 + ib_2$ sono uguali se e solo se $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$. Pertanto, se z è un numero complesso, allora $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ univocamente determinati; a è detto parte reale di z e b parte immaginaria. In formule:

$$z = a + ib \qquad a = \mathrm{Re}(z) \qquad b = \mathrm{Im}(z).$$

Possiamo pensare a $\mathbb{R}$ come al sottoinsieme di $\mathbb{C}$ costituito dai numeri complessi con parte immaginaria nulla. I numeri del tipo ib con $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si dicono immaginari puri.

☞**Esempio 1.1.** Sono numeri complessi $3 + i2$ (3 è la parte reale e 2 è la parte immaginaria), $0 + i\pi = i\pi$ (0 è la parte reale e π è la parte immaginaria), $e + i0 = e$ (e è la parte reale e 0 è la parte immaginaria). ☺

Estendiamo le regole di somma e prodotto di numeri reali in maniera naturale ai numeri complessi.

Somma: Siano $a_1 + ib_1$ e $a_2 + ib_2$ due numeri complessi. Definiamo

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$$

Prodotto: Siano $a_1 + ib_1$ e $a_2 + ib_2$ due numeri complessi. Definiamo

$$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1).$$

Si noti che, se $b \in \mathbb{R}$, allora $ib = bi$ e nel seguito scriveremo quindi indifferentemente ib e bi. Ad esempio $2i$ oppure $i2$ sono lo stesso numero complesso.

☞**Esempio 1.2.** Siano $z = 1 + 8i$ e $w = -9 + 3i$. Allora

$$z + w = (1 + 8i) + (-9 + 3i) = (1 - 9) + i(8 + 3) = -8 + 11i$$
$$z \cdot w = (1 + 8i) \cdot (-9 + 3i) = -9 + 3i - 72i + 24i^2 = -9 + 3i - 72i - 24 = -33 - 69i$$

Inoltre possiamo verificare che $(0 + i)(0 + i) = i^2 = -1$. ☺

Valgono le proprietà di somma e prodotto analoghe a quelle dei numeri reali:

1. **Proprietà della somma:**
   1.1 (proprietà associativa): per ogni $z, w, v \in \mathbb{C}$ vale $(z + w) + u = z + (w + u)$;
   1.2 (proprietà commutativa): per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ vale $z + w = w + z$;
   1.3 (esistenza elemento neutro): esiste un elemento, che indichiamo con 0 tale che per ogni $z \in \mathbb{C}$ vale $z + 0 = z$;
   1.4 (esistenza opposto): per ogni $z \in \mathbb{C}$ esiste un elemento, che indichiamo con $-z$ tale che $z + (-z) = 0$.
2. **Proprietà del prodotto:**
   2.1 (proprietà associativa): per ogni $z, w, v \in \mathbb{C}$ vale $(z \cdot w) \cdot v = z \cdot (w \cdot v)$;
   2.2 (proprietà commutativa): per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ vale $z \cdot w = w \cdot z$;
   2.3 (esistenza elemento neutro): esiste un elemento, che indichiamo con 1 tale che per ogni $z \in \mathbb{C}$ vale $z \cdot 1 = z$;
   2.4 (esistenza inverso): per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ esiste un elemento, che indichiamo con $\frac{1}{z}$ tale che $z \cdot \frac{1}{z} = 1$.
3. **Proprietà della somma e del prodotto:**
   (proprietà distributiva): per ogni $z, w, v \in \mathbb{C}$ vale $(z + w) \cdot v = z \cdot v + w \cdot v$.

La verifica delle proprietà 1.1, 1.2, 2.1, 2.2 e 3 è abbastanza semplice. A titolo di esempio, controlliamo la 1.2: siano z, w due numeri complessi della forma $z = a + ib$ e $w = a' + ib'$ con a, a', b, b' reali. Allora per la definizione della somma di due numeri complessi e per la proprietà commutativa della somma dei numeri reali,

$$\begin{aligned} z + w &= (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b') \\ &= (a' + a) + i(b' + b) = (a' + ib') + (a + ib) \\ &= w + z. \end{aligned}$$

Per la 1.3, si osservi innanzi tutto che se 0 e $0'$ sono due elementi neutri per la somma, allora sono uguali, perché $0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$. Quindi si noti che l'elemento neutro per la somma è $0 = 0 + i0$. Infatti, per ogni $z = a + ib$ si ha

$$\begin{aligned} z + 0 &= (a + ib) + (0 + i0) = (a + 0) + i(b + 0) \\ &= a + ib = z. \end{aligned}$$

Analogamente, per la 2.3 , si noti che l'elemento neutro per il prodotto è $1 + i0$.

Per la 1.4, si noti che l'opposto di $a + ib$ è $-(a + ib) = -a - ib$.

L'unica proprietà meno banale è la 2.4: determineremo ora l'inverso di z, numero complesso non nullo. Premettiamo due definizioni.

Definizione 1.2. Sia $z = a + ib$ un numero complesso. Si definisce il numero complesso coniugato di z come il numero $a - ib$. Il numero complesso coniugato di z si indica con $\bar{z}$.

Proprietà. Sia $z = a + ib$ un numero complesso. Allora:
1) La parte reale e la parte immaginaria soddisfano

$$\mathrm{Re}(z) = \tfrac{z+\bar{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}(z) = \tfrac{z-\bar{z}}{2i};$$

2) z è reale se e solo se $b = 0$ se e solo se $z = \bar{z}$;
3) z è immaginario puro se e solo se $a = 0$ e $b \neq 0$ se e solo se $z = -\bar{z}$ e $z \neq 0$;
4) $\bar{\bar{z}} = z$;
5) $z \cdot \bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2 = a^2 + b^2$;
6) se $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, allora

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

Definizione 1.3. Sia $z = a + ib$ un numero complesso. Si definisce il modulo di z come il numero (reale e nonnegativo) $\sqrt{a^2 + b^2}$. Il modulo di z si indica con $|z|$.

Proprietà. Sia $z = a + ib$ un numero complesso. Allora:
1) $|z| = |\bar{z}|$;
2) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$;
3) $z = 0$ se e solo se $|z| = 0$;
4) se $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, allora

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \qquad\qquad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

A questo punto verifichiamo che vale la proprietà 2.4: l'inverso di $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ è $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. Infatti, $z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z \cdot \bar{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1$.

☞**Esempio 1.3.** Scrivere in forma cartesiana $\frac{5+9i}{2-i}$. Si ha

$$\frac{5 + 9i}{2 - i} = (5 + 9i) \cdot \frac{1}{2 - i} = (5 + 9i) \cdot \frac{2 + i}{|2 - i|^2} = \frac{(5 + 9i) \cdot (2 + i)}{4 + 1} = \frac{1 + 23i}{5} = \frac{1}{5} + i\frac{23}{5}.$$

☺

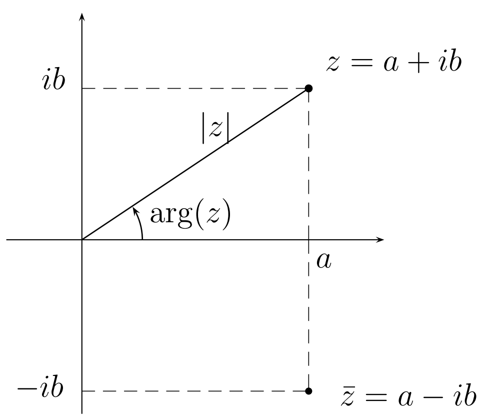
Talvolta si dice impropriamente che $i = \sqrt{-1}$; impropriamente, perché bisogna essere attenti a come si maneggiano le radici dei numeri complessi:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = i^2 = -1????$$

Vedremo maggiori dettagli in seguito.

1. Rappresentazione geometrica dei numeri complessi

Un numero complesso $z = a + ib$ si può identificare con la coppia (a, b) di numeri reali. È quindi naturale rappresentare il numero complesso $z = a + ib$ nel piano con il punto corrispondente alle coordinate (a, b). Il piano identificato con i numeri complessi è chiamato piano di Argand–Gauss.



Scrivere $z = a + ib$ è dare la forma "cartesiana" di z, ovvero scrivere z in coordinate cartesiane. Si noti che $\bar{z}$ è simmetrico di z rispetto all'asse delle ascisse e $|z|$ rappresenta la distanza di z dall'origine.

Definizione 1.4. Sia $z \in \mathbb{C}$. Un angolo θ per cui

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

è detto argomento di z (si denota anche $\arg(z)$) e la rappresentazione precedente si dice rappresentazione polare.

Se $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ l'argomento di z è determinato a meno di multipli di 2π. Il valore di θ in $(-\pi, \pi]$ è detto valor principale dell'argomento. Un'altra scelta di uso frequente è lasciar variare θ in $[0, 2\pi)$.

Nella rappresentazione polare il numero complesso 0 è caratterizzato dall'avere $|z| = 0$ e argomento arbitrario.

☞**Esempio 1.4.** Scrivere in forma polare $1 + i\sqrt{3}$. Si ha $|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$. Bisogna poi determinare θ in modo che $1 + i\sqrt{3} = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$, ovvero

$$\begin{cases} 1 = 2\cos\theta \\ \sqrt{3} = 2\sin\theta \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \cos\theta = 1/2 \\ \sin\theta = \sqrt{3}/2 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \theta = \pi/3 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

L'argomento principale è $\pi/3$ ed è quello che solitamente si adopera. Una forma polare di $1+i\sqrt{3}$ è quindi $2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$. ☺

Le coordinate polari sono "comode" nel valutare il prodotto di numeri complessi. È semplice verificare che se $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ e $w=|w|(\cos\phi+i\sin\phi)$, allora

$$z\cdot w=|z|\,|w|\,\big(\cos(\theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi)\big); \tag{1.1}$$

basta usare pazientemente le formule di addizione di seno e coseno.

Definizione 1.5. Sia $z=a+ib$ un numero complesso, con $a,b\in\mathbb{R}$. Si definisce e^z ponendo

$$e^z=e^{a+ib}=e^a\big(\cos b+i\sin b\big).$$

Si noti che questo estende la definizione della funzione esponenziale ai numeri complessi. Inoltre è semplice verificare che

$$e^{z+w}=e^z\,e^w\qquad\forall z,w\in\mathbb{C}.$$

Usando questa definizione, possiamo rappresentare il numero complesso z in una nuova forma, detta forma esponenziale: se z è un numero complesso e θ è un suo argomento, allora

$$z=|z|\,e^{i\theta}.$$

La formula del prodotto descritta in (1.1) diventa semplicemente:

$$z\cdot w=|z|e^{i\theta}\cdot|w|e^{i\phi}=|z||w|\,e^{i(\theta+\phi)}$$

e (magia!) le formule di addizione di seno e coseno seguono facilmente dalla regola di moltiplicazione di $e^{i\theta}$ e $e^{i\phi}$.

☞**Esempio 1.5.** Per calcolare $(1+i)^7$ in forma cartesiana, abbiamo sostanzialmente due possibilità: una è quella di usare lo sviluppo del binomio di Newton e affrontare una marea di calcoli. L'altra è usare la forma polare oppure quella esponenziale di $1+i$ e notare che

$$\begin{aligned}(1+i)^7&=(\sqrt{2}\,e^{i\pi/4})^7=(\sqrt{2})^7\,e^{7i\pi/4}\\&=(\sqrt{2})^7\,(\cos(7\pi/4)+i\sin(7\pi/4))=(\sqrt{2})^7\,(\sqrt{2}/2-i\sqrt{2}/2)\\&=8-8i.\end{aligned}$$

☺

Proprietà. Sia $z\in\mathbb{C}$. Valgono le seguenti proprietà:

(1) $|e^z|=e^{\mathrm{Re}(z)}$, in particolare $e^z\neq0$ per ogni $z\in\mathbb{C}$;
(2) $\mathrm{Im}(z)$ è un argomento di e^z;
(3) $\overline{e^z}=e^{\bar z}$.

2. Il Teorema fondamentale dell'algebra

Un polinomio a coefficienti in $\mathbb{C}$ di grado n è un'espressione della forma

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n,$$

dove i coefficienti a_j sono in $\mathbb{C}$ per ogni $j = 0, \ldots, n$ e $a_n \neq 0$.

Teorema 1.6 (Teorema fondamentale dell'algebra)**.** *Ogni polinomio di grado maggiore o uguale a uno a coefficienti complessi ha almeno uno zero in* $\mathbb{C}$.

Quindi ogni polinomio di grado n ha esattamente n zeri complessi (contati con la loro molteplicità). Osserviamo inoltre che se P è un polinomio a coefficienti reali, allora $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$. Quindi se z_0 è uno zero del polinomio P, allora anche $\bar{z}_0$ lo è. Ne deduciamo che un polinomio a coefficienti reali di grado dispari deve avere almeno uno zero reale (cosa che già avevamo notato l'anno scorso a partire dal Teorema degli zeri).

Come trovare radici di polinomi? Ad esempio, si determinino gli zeri di $z^3 - z + iz$. Uno zero è senz'altro 0. Gli altri si trovano ponendo $z^2 - 1 + i = 0$, ovvero $z^2 = 1 - i$. Ci troviamo col problema di determinare radici quadrate di un numero complesso.

3. Radici ennesime di un numero complesso

Sia n un numero naturale, diverso da $0, 1$. Se z è un numero complesso, una sua radice n-esima w è un numero complesso w tale che $w^n = z$.

Se θ è un argomento di z e ϕ è un argomento di w la relazione $w^n = z$ diventa

$$|w|^n \, e^{in\phi} = |z| \, e^{i\theta}.$$

Uguagliando i moduli, ricaviamo subito che se $z = 0$, allora $w = 0$. Se poi $z \neq 0$, allora $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ (radice nel senso reale). Inoltre gli argomenti dovranno essere uguali, a meno di multipli di 2π. Quindi $n\phi = \theta + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Abbiamo quindi ottenuto che una radice n-esima di z è necessariamente del tipo

$$w = \sqrt[n]{|z|} \, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

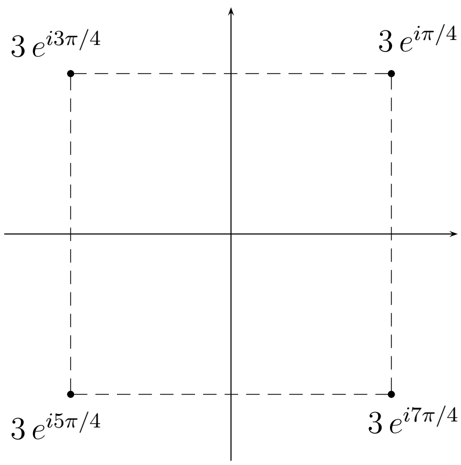
Viceversa, un numero complesso della forma precedente è una radice n-esima di z.

In sintesi:

$$w \in \left\{ \sqrt[n]{|z|} \, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \; : \; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

e non è difficile convincersi che l'insieme precedente consiste di n numeri complessi distinti, che si ottengono ponendo $k = 0, \ldots, n-1$. Questi numeri sono vertici di un poligono regolare di n lati.

☞**Esempio 1.7.** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione $z^4 = -81$.



Si scrive -81 in forma esponenziale, ovvero

$$-81 = 81\,e^{\pi i}$$

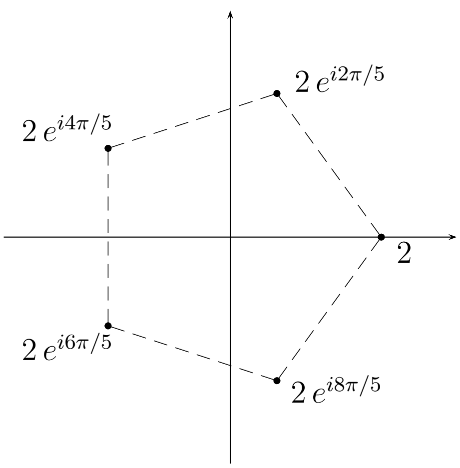
e si calcola $\sqrt[4]{81} = 3$. Pertanto le radici quarte di -81 sono della forma $3\,e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}} \ : \ k \in \mathbb{Z}$, ovvero sono

$$3\,e^{i\pi/4}, \qquad 3\,e^{i3\pi/4}, \qquad 3\,e^{i5\pi/4}, \qquad 3\,e^{i7\pi/4}.$$

Esse si dispongono ai vertici di un quadrato, come indicato in figura.

☺

☞**Esempio 1.8.** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione $z^5 = 32$.



Si scrive 32 in forma esponenziale, ovvero $32 = 32\,e^{i0}$ e si calcola $\sqrt[5]{32} = 2$. Le radici quinte di 32 sono della forma $2\,e^{i\frac{0+2k\pi}{5}} \ : \ k \in \mathbb{Z}$, ovvero sono

$$2, \qquad 2\,e^{i2\pi/5}, \qquad 2\,e^{i4\pi/5}, \qquad 2\,e^{i6\pi/5}, \qquad 2\,e^{i8\pi/5}.$$

Esse si dispongono ai vertici di un pentagono regolare, come indicato in figura. ☺

☞**Esempio 1.9.** Si possono risolvere anche altri tipi di equazioni. Ad esempio, cerchiamo i numeri complessi z tali che

$$a) \quad z^2 + i\,\mathrm{Im}(z) + 2\bar{z} = 0 \qquad b) \quad z^3 - |z| = 0 \qquad c) \quad (\bar{z})^4 = i\,|z|$$

Per l'equazione a), si scriva $z = a + ib$ con a, b reali e si noti che

$$\begin{aligned} 0 &= z^2 + i\,\mathrm{Im}(z) + 2\bar{z} = (a+ib)^2 + ib + 2(a - ib) \\ &= a^2 - b^2 + 2a + i\,(2ab - b). \end{aligned}$$

Siccome un numero complesso è 0 se e solo se sia la sua parte reale sia la sua parte immaginaria sono nulle, abbiamo

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 2a = 0 \\ 2ab - b = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} a^2 - b^2 + 2a = 0 \\ (2a-1)b = 0 \end{cases}$$

Nella seconda equazione abbiamo due possibilità: $b = 0$ (che sostituita nella prima equazione dà $a^2 + 2a = 0$, quindi $a = 0$ oppure $a = -2$) oppure $a = 1/2$ (che sostituita nella prima equazione dà $-b^2+5/4=0$, quindi $b=\sqrt{5}/2$ oppure $b=-\sqrt{5}/2$). Concludendo, le soluzioni della prima equazione sono:

$$0, \quad -2, \quad 1/2+i\sqrt{5}/2, \quad 1/2-i\sqrt{5}/2.$$

Per le equazioni b) e c) conviene adoperare le coordinate esponenziali. Se $z=r\,e^{i\theta}$ allora

$$0=z^3-|z|=r^3\,e^{3i\theta}-r=r(r^2\,e^{3i\theta}-1).$$

Quindi o accade che $r=0$ (e questo vuol dire che $z=0$) oppure $r^2\,e^{3i\theta}-1=0$, cioè $r^2\,e^{3i\theta}=1$. Quindi, se $r\neq 0$, si deduce che $r=1$ e $3\theta=2k\pi$, al variare di k in $\mathbb{Z}$. Le soluzioni di b) sono:

$$0, \quad 1, \quad e^{i2/3\pi}, \quad e^{i4/3\pi}.$$

Infine nella c) $\bar{z}=r\,e^{-i\theta}$, quindi

$$0=r^4\,e^{-4i\theta}-i\,r=r(r^3\,e^{-4i\theta}-i),$$

da cui, o accade che $r=0$ o accade che $r^3\,e^{-4i\theta}-1=0$. Il che vuol dire che o $z=0$ oppure $r^3\,e^{-4i\theta}=i=e^{i\pi/2}$, ovvero $r=1$ e $-4\theta=\pi/2+2k\pi$, al variare di k in $\mathbb{Z}$. Le soluzioni di c) sono allora:

$$0, \quad e^{-i\pi/8}, \quad e^{i3\pi/8}, \quad e^{i7\pi/8}, \quad e^{i11\pi/8}.$$

☺

4. Alcuni comandi `Maple`

(1) Il comando `complex` vi "rende" un numero complesso. Ad esempio,
`complex(2)=2I` `complex(2,3)=2+3I`

(2) I comandi `Re`, `Im`, `conjugate` vi permettono di trovare parte reale, immaginaria e il complesso coniugato. Ad esempio
`Re(2+3*I)=2` `Im(2+3*I)=3` `conjugate(2+3*I)=2-3I`

(3) Il comando `abs` vi fa trovare il modulo del numero complesso. Ad esempio
`abs(-2)=2` `abs(3-4*I)=5`

(4) Il comando `argument` vi fa trovare l'argomento in $(-\pi,\pi]$. Ad esempio
`argument(-2)=`π `argument(-1+I)=`$\frac{3}{4}\pi$

(5) Il comando `polar` converte in coordinate polari.
`polar(3+4*I)`=polar(5,arctan(4/3))
Nel risultato, 5 è il modulo e arctan(4/3) l'argomento. Lo stesso si ottiene con il comando `convert(z,polar)`.
Tenete presente che potete scrivere il numero complesso $r\,e^{ia}$ in coordinate esponenziali scrivendo `polar(r,a)`. Ad esempio il risultato di

```
polar(2,5)*polar(3,-1):simplify(%);
```

è polar(6, 4).

(6) Il comando che userete di più è `solve`. Ad esempio

```
solve(x^2+x+1,x);
```

vi permette di trovare le soluzioni dell'equazione $x^2+x+1=0$. La risposta di `Maple` è

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,I\,\sqrt{3},\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,I\,\sqrt{3}$$

Per memorizzare in una sequenza le soluzioni di una equazione e ottenerle poi in forma polare potete scrivere

```
a:=[solve(z^3+8*I,z)]; b:=seq(polar(a[i]),i=1..3);
```

La risposta di `Maple` è

$$-I+\sqrt{3},\ -I-\sqrt{3},\ 2\,I$$

$$\mathrm{polar}(2,-\tfrac{1}{6}\pi),\mathrm{polar}(2,-\tfrac{5}{6}\pi),\mathrm{polar}(2,\tfrac{1}{2}\pi)$$

.

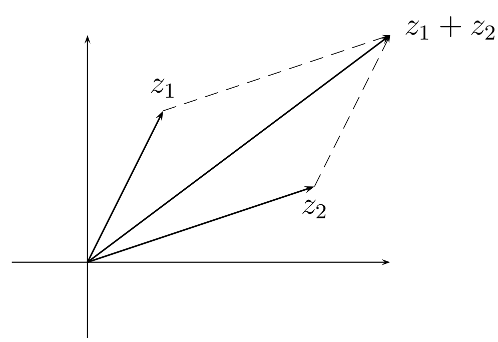
5. Esercizi

1) Calcolare

$$\bar{5};\qquad \overline{2+8i};\qquad \overline{2\,e^{-i\pi/6}};\qquad 2+3i-(4-5i);\qquad 2+3i-\overline{4-5i};\qquad 2-i+6\,e^{i\pi/2};$$

$$\frac{1-7i}{-i};\qquad \frac{2+i}{4+3i};\qquad (-\sqrt{3}+i)^6;\qquad \mathrm{Re}((4-i)(5+2i));\qquad |7-24i|;\qquad |2\,e^{-i\pi/6}|.$$

2) Siano $z_1 = 1+2i$ e $z_2 = 3+i$. Calcolare z_1+z_2. Rappresentare nel piano complesso i numeri z_1, z_2 e z_1+z_2.



3) Siano z_1 e z_2 due numeri complessi. Dare una interpretazione geometrica della somma di z_1 e z_2 e dedurne che $|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

4) Rappresentare nel piano complesso gli insiemi

$$\{z\in\mathbb{C}\,:\,\arg z = \pi/3\}\qquad \{z\in\mathbb{C}\,:\,|z-i|=3\}\qquad \{z\in\mathbb{C}\,:\,\mathrm{Im}(z)=1\}$$

$$\{z\in\mathbb{C}\,:\,|z|=3\}\qquad \{z\in\mathbb{C}\,:\,\mathrm{Re}(z)=e\}\qquad \{z\in\mathbb{C}\,:\,\bar{z}=z\}$$

$$\{z\in\mathbb{C}\,:\,1<|z|\le 2\}\qquad \{z\in\mathbb{C}\,:\,0\le \mathrm{Re}(z)\le 1\}\qquad \{z\in\mathbb{C}\,:\,\arg z\in(\pi/3,\pi/2)\}\,.$$

5) Per quali z complessi non nulli vale $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$?

6) Verificare che per ogni n in $\mathbb{N}$ e $\theta \in \mathbb{R}$ vale

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Dedurne le formule di duplicazione e triplicazione di un angolo.

7) Trovare l'insieme delle soluzioni (e rappresentarlo nel piano complesso) delle equazioni

$$z^3 = -8i \qquad z^8 = -1 \qquad z^2 - 2\mathrm{Re}(z(1+i)) - i = 0$$

$$z^4 + 1 - i\sqrt{3} = 0 \qquad z = |z|^2 \qquad z^3 - \bar{z}^2 = 0.$$