

Corso di Laurea in  
Statistica Matematica e trattamento Informatico dei Dati

*Analisi Matematica 3*  
*appunti*

Francesca Astengo

Università di Genova, A.A. 2011/2012



## Indice

Capitolo 1. Serie numeriche	1
1. Brevi richiami sulle successioni	1
2. Le serie numeriche	2
3. Serie a termini non negativi	8
4. Approssimazioni	14
4.1. Approssimazione dal criterio integrale	14
4.2. Approssimazione dal criterio del rapporto/radice	16
5. Serie assolutamente convergenti	17
6. Serie di Leibniz	18
7. Esercizi	21
Capitolo 2. Serie di funzioni	23
1. Tipi di convergenza	23
1.1. Convergenza puntuale	23
1.2. Convergenza uniforme	24
2. Serie di potenze	29
2.1. Raggio di convergenza	31
2.2. Continuità della somma di una serie di potenze	33
2.3. Derivabilità e integrazione per serie di potenze	34
2.4. Esempi	35
3. Serie di Taylor	36
3.1. Convergenza di una serie di Taylor	37
4. Esercizi	40
Capitolo 3. Calcolo differenziale per funzioni di più variabili reali	43
1. Limiti e continuità	47
1.1. Intorni e punti di accumulazione	47
1.2. Definizione di limite	49
1.3. Calcolo di limiti	49
2. Continuità	58
3. Derivabilità e differenziabilità	61
3.1. Derivate direzionali	61
3.2. Piani in $\mathbb{R}^3$ – iperpiani in $\mathbb{R}^{n+1}$	62
3.3. Differenziabilità	63
3.4. Derivazione della funzione composta	68
4. Derivate di ordine successivo	69
5. Ricerca di massimi e minimi, relativi e assoluti, punti sella	71
6. Estremi vincolati	78
7. Esercizi	84

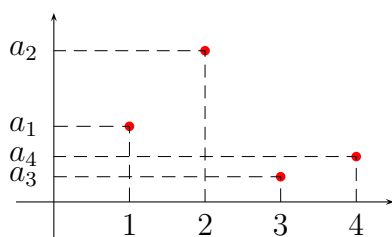
8. Complementi su gradiente e curve di livello, $n = 2$	87
Capitolo 4. Calcolo integrale per funzioni di più variabili reali	91
1. Il calcolo di volumi	91
2. Teorema di cambiamento di variabili	97
2.1. Complementi sulle funzioni a valori vettoriali	103
2.2. Invertibilità e matrice Jacobiana	104
3. Integrali impropri (con $n = 2$ )	105
3.1. Domini non limitati	106
3.2. Funzioni non limitate superiormente	109
4. Integrali $n$ -dimensionali	112
4.1. Coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$	115
4.2. Volume di un solido di rotazione	117
4.3. Coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$	118
4.4. Coordinate sferiche in $\mathbb{R}^n$	120
4.5. Integrazione impropria in $\mathbb{R}^n$	120
5. La funzione Gamma di Eulero	122
5.1. Area e volume delle sfere in $\mathbb{R}^n$	124
6. Esercizi	125
<b>Argomenti di anni passati</b>	127
Appendice A. I numeri complessi	129
1. Rappresentazione geometrica dei numeri complessi	132
2. Il Teorema fondamentale dell'algebra	133
3. Radici ennesime di un numero complesso	134
4. Alcuni comandi <b>Maple</b>	136
5. Esercizi	137
Appendice B. Equazioni differenziali e alle differenze	139
1. Equazioni differenziali	140
2. Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili	142
3. Equazioni differenziali lineari del primo ordine	146
4. Il problema di Cauchy	149
5. Il metodo di Eulero	152
6. Equazioni differenziali del secondo ordine, lineari, omogenee, a coefficienti costanti	154
7. Alcuni comandi <b>Maple</b>	157
8. Equazioni alle differenze	158
8.1. Generalità	158
8.2. Equazioni alle differenze lineari a coefficienti costanti di ordine 1	161
8.3. Equazioni alle differenze lineari a coefficienti costanti di ordine 2	163
9. Esercizi	169
Equazioni differenziali	169
Equazioni alle differenze	171
Riferimenti bibliografici	173

## CAPITOLO 1

### Serie numeriche

#### 1. Brevi richiami sulle successioni

Ricordiamo che una successione reale è una funzione definita da  $\mathbb{N}$ , eventualmente privato di un numero finito di elementi, a  $\mathbb{R}$ .



Solitamente si indica una successione con la “lista” dei suoi valori:  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Il valore  $a_n$  si chiama  $n$ -esimo termine della successione.

Graficamente possiamo rappresentare una successione come in figura.

Una successione importante in probabilità è la successione geometrica di parametro  $p$ , con  $0 < p < 1$ . In formule, è la successione i cui termini sono  $p^n$  con  $n \geq 1$ . Pensate di lanciare ripetutamente una moneta e che la probabilità che esca “testa” in un singolo lancio sia  $p$ . Ovviamente il risultato di un lancio non influenza il successivo. Il termine  $p^n$  rappresenta la probabilità di avere esattamente  $n$  volte “testa” in  $n$  lanci consecutivi.

Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione e sia  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  una successione di numeri naturali strettamente crescente. Indichiamo con  $n_k = \varphi(k)$ . Allora la successione  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  si chiama *successione estratta* o *sottosuccessione* della successione data.

In pratica, questo significa scegliere, senza variarne l’ordine, infiniti termini della successione di partenza, immagazzinandoli in una nuova “lista”. Ad esempio, immaginiamo di scegliere per primo il termine  $a_2$  e immagazziniamo questo valore come primo termine ponendo  $b_1 = a_2$ . Ora operiamo una seconda scelta; sono a nostra disposizione tutti i termini a partire da  $a_3$ ; scegliamo ad esempio  $a_{10}$  e poniamo  $b_2 = a_{10}$ . Ora operiamo una terza scelta; sono a nostra disposizione tutti i termini a partire da  $a_{11}$ ; scegliamo ad esempio  $a_{20}$  e poniamo  $b_3 = a_{20}$ . E così via. La successione estratta è la  $b_1, b_2, b_3, \dots$

**ESEMPIO 1.1.** Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la successione definita da  $a_n = \cos(n\pi/4)$ . Come “lista” di elementi la successione è  $1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dots$

Sia  $n_k = 2k$ . Allora l’estratta, cosiddetta di posto pari è la successione  $1, 0, -1, 0, 1, 0, \dots$

Se invece  $n_k = 2k + 1$  stiamo considerando la cosiddetta estratta di posto dispari, ovvero la successione:  $\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \dots$

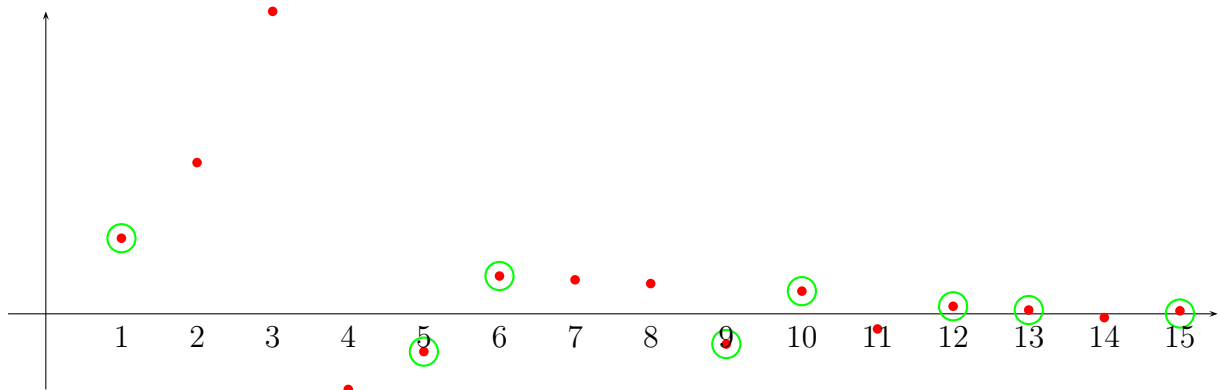
Supponiamo ora che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell.$$

Ovviamente selezionando infiniti termini dalla successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , purché si rispetti l'ordine, non si varia il carattere della successione, ossia anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = \ell.$$

In figura, immaginiamo di scegliere dalla successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (che converge a 0) i termini circolettati di verde.



Anche i termini circolettati di verde tendono a zero.

Può invece succedere che una successione non abbia limite, mentre una sua estratta lo abbia. Una successione che non ha limite è  $a_n = \cos(n\pi/4)$  definita nell'esempio 1.1. Considerate  $n_k = 2 + 4k$ . È facile controllare che  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  è la successione costantemente nulla, quindi convergente (a 0).

In sintesi: se  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione che ha limite  $\ell$  (finito o infinito) allora il limite di una sua qualsiasi estratta è ancora uguale a  $\ell$ .

## 2. Le serie numeriche

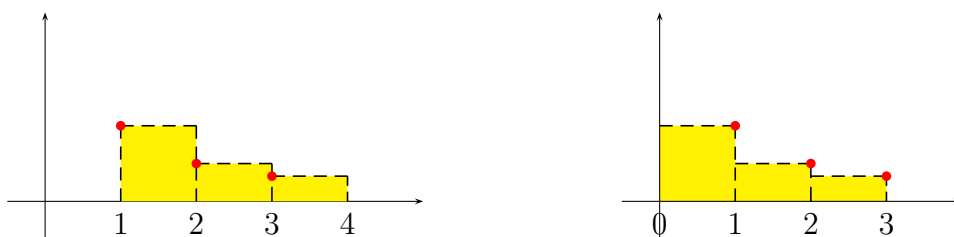
Per comodità, solitamente in quanto segue le successioni saranno definite su  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ , ossia a partire da 1.

Data una successione  $(a_n)_{n \geq 1}$ , possiamo formare un'altra successione, che indicheremo solitamente con  $(s_n)_{n \geq 1}$ , delle **somme parziali** o delle **ridotte**, dove

$$s_1 = a_1 \qquad s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \cdots + a_n.$$

Il termine  $s_n$ , in cui sommiamo i primi  $n$  termini della successione  $(a_n)$ , si chiama ridotta di ordine  $n$ .

Graficamente, possiamo pensare alla ridotta di ordine  $n$ , ad esempio 3, come all'area della regione disegnata nella figura a sinistra (o equivalentemente in quella a destra): è la somma di tre rettangoli, tutti di base 1 e altezze rispettivamente  $a_1, a_2, a_3$ . Al solito, i pallini rossi indicano il grafico della successione.



Ora immaginiamo di voler sapere se continuando a sommare le aree di questi rettangoli otteniamo un poligono di area finita oppure no.

Un'altra motivazione allo studio delle somme infinite deriva dalla probabilità. Pensiamo di comprare ogni anno un biglietto della lotteria. Se la lotteria stampa e vende un milione di biglietti ogni anno, la probabilità che il nostro venga estratto è pari a  $p = 10^{-6}$  (supponendo che la lotteria sia onesta, ossia che tutti i biglietti abbiano la stessa probabilità di essere estratti). La probabilità di vincere esattamente la prima volta che acquistiamo il biglietto è ovviamente  $p$ ; di perdere il primo anno ma vincere il secondo anno è più piccola e precisamente  $(1-p)p$ ; al terzo anno è  $(1-p)^2 p$ ; e così via, la probabilità di prima vincita all' $n$ -esimo anno è  $(1-p)^{n-1} p$ . Quindi la probabilità che si vinca entro l' $n$ -esimo anno è la somma di tali probabilità. In formule,  $T$  è la variabile aleatoria che misura l'anno in cui si vince e abbiamo detto che

$$\mathbb{P}(T = n) = (1-p)^{n-1} p \qquad \mathbb{P}(T \leq n) = \sum_{k=1}^n (1-p)^{k-1} p.$$

Come è facile controllare, la probabilità di aver vinto entro l' $n$ -esimo anno aumenta. Supponendo di continuare impertentiti a tentare la sorte, ci chiediamo cosa può accadere quando  $n$  diventa molto grande.

Ci accorgeremo di un risultato sorprendente: sicuramente vinceremo. Il problema è il tempo medio di attesa per la vincita (ossia il valore atteso di  $T$ ) che è

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbb{P}(T = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n (1-p)^{n-1} p.$$

Scopriremo che è finito, ma pari a un milione di anni (il che dovrebbe bastare a sconsigliare dallo spendere i soldi del biglietto).

**DEFINIZIONE 1.1.** Sia data una successione reale  $(a_n)_{n \geq 1}$ . Una *serie* è una somma formale

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Si dice che questa serie è *convergente* e ha per somma  $s \in \mathbb{R}$  se la successione delle ridotte  $(s_n)$  converge a  $s$ . Se la successione delle ridotte diverge, anche la serie si dice *divergente*. Se la successione delle ridotte non ha limite, la serie si dice *indeterminata*.

Non tutte le successioni in generale “partono dall’indice 1”. Se abbiamo una successione che parte dall’indice  $p$ , con  $p \in \mathbb{N}$  della forma  $(a_n)_{n \geq p}$ , la serie  $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$  ha lo stesso significato di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n, \text{ dove } b_n = a_{p+n-1}.$$

**ESEMPIO 1.2. La serie geometrica** di ragione  $\frac{1}{2}$ : si consideri la successione definita da

$$a_n = \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La serie geometrica di ragione  $\frac{1}{2}$  è  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ . La successione delle ridotte è data da

$$(1.1) \quad s_1 = a_0 = 1 \quad s_2 = 1 + \frac{1}{2} \quad \dots \quad s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}.$$

Più in generale, dato  $x \in \mathbb{R}$ , possiamo considerare la serie geometrica di ragione  $x$ , data da  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}$ , dove, se  $x = 0$ , poniamo  $0^0 = 1$ .

È facile notare che, nel caso  $x = 1$ , la successione delle ridotte è  $s_n = n$ , pertanto divergente. Quindi la serie geometrica di ragione 1 diverge a  $+\infty$ .

Se invece  $x \neq 1$ , allora

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

Quindi, ricordando che se  $|x| < 1$  si ha  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$ , otteniamo che la serie geometrica di ragione  $x$ , con  $|x| < 1$ , è convergente e ha per somma  $\frac{1}{1-x}$ . Inoltre, se  $x > 1$ , allora si



ha  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ , quindi la serie geometrica di ragione  $x$ , con  $x > 1$ , è positivamente divergente. Se invece  $x \leq -1$ , la successione  $(x^n)$  non ha limite, quindi la serie geometrica di ragione  $x$ , con  $x \leq -1$ , è indeterminata. Riassumendo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{se } -1 < x < 1 \\ +\infty & \text{se } x \geq 1 \\ \text{indeterminata} & \text{se } x \leq -1. \end{cases}$$

**ESEMPIO 1.3. Le serie telescopiche.** Studiare la convergenza di  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ . Si noti che  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ . Quindi la ridotta di ordine  $n$  diventa

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Quindi la serie data è convergente e ha somma 1. Questo esempio è il prototipo di una classe di serie che si chiamano serie telescopiche.

Una serie che si possa scrivere come  $\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - b_{n+1})$ , dove  $(b_n)$  è una successione reale si dice telescopica. Per una tale serie la ridotta di ordine  $n$  risulta

$$\sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1},$$

perché tutti gli altri addendi si elidono. Quindi, se esiste finito  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \ell$ , la serie telescopica è convergente e ha somma  $b_1 - \ell$ .

**TEOREMA 1.4** (Condizione necessaria per la convergenza). *Sia  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  una serie convergente.*

*Allora*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\ell \in \mathbb{R}$  la somma della serie, ovvero, detta  $(s_n)$  la successione delle ridotte, si ha  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \ell$ . Ma allora

$$a_n = s_n - s_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell - \ell = 0.$$

□

Questo criterio ci aiuta a stabilire facilmente quando una serie non converge, come nel prossimo esempio. In quello successivo invece vediamo che ci possono essere serie non convergenti il cui termine generale è infinitesimo.

ESEMPIO 1.5. Dire se è convergente  $\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ . Siccome

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

la serie data non converge.

ESEMPIO 1.6. **La serie armonica:** si consideri la successione definita da

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

La serie armonica è  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ .

Notiamo che potrebbe essere una serie convergente, perché  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ . Tuttavia, questo potrebbe non essere sufficiente.

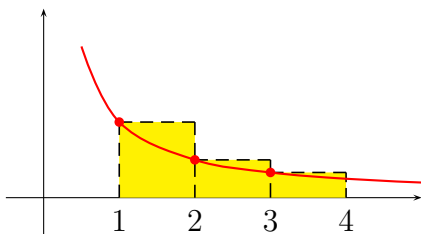
Mostriamo che la serie armonica diverge. La successione delle ridotte è data da

$$s_1 = a_1 = 1 \quad s_2 = 1 + \frac{1}{2} \quad \dots \quad s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

La successione delle ridotte è monotona crescente, quindi o diverge positivamente o converge.

Notiamo che  $a_n$  è la restrizione ai naturali della funzione reale  $f(x) = \frac{1}{x}$ , di cui sappiamo calcolare primitive e quindi integrali definiti.

Usiamo ora il criterio del confronto per i limiti, confrontando la ridotta di ordine  $n$  (area gialla) con un opportuno integrale definito di  $f$ , ragionando come in figura:



$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \log(n+1)$$

Ne segue che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \log(n+1) = +\infty,$$

ovvero la serie armonica diverge.

Il carattere di una serie (convergenza, divergenza, indeterminazione) rimane lo stesso se si alterano i termini corrispondenti a un numero finito di indici, perché le ridotte, da un certo ordine in poi, differiranno per una costante. Ad esempio, consideriamo la successione

$$b_n = 0 \text{ se } n = 0, 1, \dots, 10; \quad b_n = 1/2^n \text{ altrimenti.}$$

Essa differisce dalla successione geometrica di ragione  $1/2$  per i primi 11 termini. Chiamiamo  $(\sigma_n)$  la successione delle ridotte di  $(b_n)$  e  $(s_n)$  la successione delle ridotte della geometrica di ragione  $1/2$  come nella formula (1.1). Ovviamente,

$$\sigma_n = s_n - s_{11} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - s_{11} = 2 - \frac{1 - \frac{1}{2^{11}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2^{-10}.$$

e quindi  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$  ha lo stesso carattere di  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ . (Le somme delle due serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$  e  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$  invece sono diverse)

Data la serie (convergente o no)  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ , chiamiamo **resto**  $n$ -esimo la serie

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \quad \forall n \geq 0.$$

Questa serie coincide, tranne che per i primi  $n$  termini, con la serie data, quindi ha lo stesso carattere di  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ .

**PROPOSIZIONE 1.7.** *Se la serie numerica  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  è convergente, allora la successione  $(r_n)_n$  dei resti  $n$ -esimi è infinitesima.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $s \in \mathbb{R}$  la somma della serie numerica  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ . Siccome la successione delle ridotte  $(s_n)$  converge a  $s$ , si ha

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = s - s_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

□

Dalla linearità dell'operazione di limite si ricavano facilmente le seguenti proprietà:

- (1) se  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  sono serie convergenti e hanno somma  $s_a$  e  $s_b$  rispettivamente, allora anche  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$  è convergente e la sua somma è  $s_a + s_b$ ;

- (2) se  $c \in \mathbb{R}$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  è una serie convergente di somma  $s_a$ , allora  $\sum_{n=1}^{+\infty} c a_n$  è convergente e la sua somma è  $c s_a$ ;
- (3) se  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  sono serie positivamente divergenti, allora anche  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$  è positivamente divergente;
- (4) se  $c > 0$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  è una serie positivamente divergente, allora  $\sum_{n=1}^{+\infty} c a_n$  è positivamente divergente;
- (5) se  $c < 0$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  è una serie positivamente divergente, allora  $\sum_{n=1}^{+\infty} c a_n$  è negativamente divergente.

### 3. Serie a termini non negativi

Una serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  si dice a termini non negativi se  $a_n \geq 0$  per ogni  $n$ . Per una tale serie, la successione delle ridotte è sempre crescente, perché per ogni  $n \geq 1$

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1} \geq s_n.$$

Quindi, siccome una successione crescente ammette sempre limite (o diverge a  $+\infty$  oppure, se è superiormente limitata, converge all'estremo superiore  $\sup_n s_n$ ), le serie a termini non negativi **non possono essere indeterminate**.

Nel prossimo teorema mettiamo in relazione la convergenza dell'integrale improprio di una funzione  $f$  su  $[1, +\infty)$  con la convergenza della serie di termine generale  $f(n)$ ,  $n$  in  $\mathbb{N}$ .

**TEOREMA 1.8 (Criterio integrale).** *Sia  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione positiva e decrescente.*

*Allora:*

*i) la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$  è convergente se e solo se l'integrale improprio  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  è convergente;*

*ii) la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$  è divergente se e solo se l'integrale improprio  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  è divergente.*

**DIMOSTRAZIONE.** Siccome  $f$  è decrescente, per ogni  $k = 1, 2, \dots$  si ha

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \quad \forall x \in [k, k+1] \quad \Rightarrow \quad f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k).$$

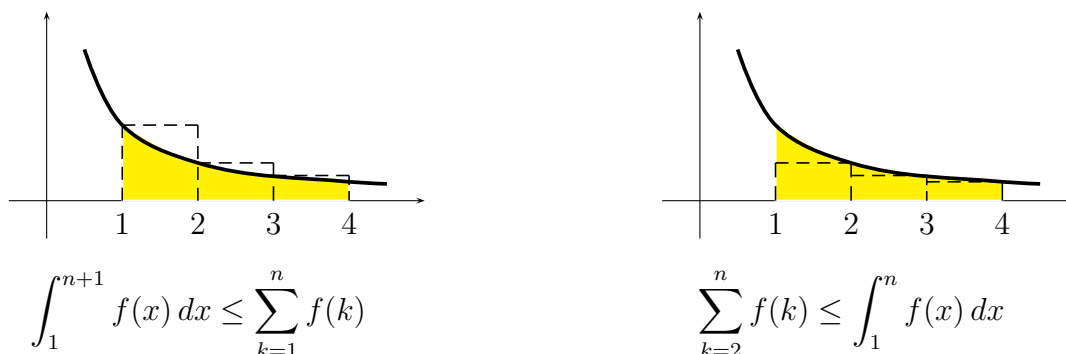
Ne ricaviamo che

$$\int_1^{n+1} f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k)$$

e che

$$\sum_{k=2}^n f(k) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx = \int_1^n f(x) dx.$$

Geometricamente la situazione è quella in figura:



Concludiamo ora con il criterio del confronto per i limiti. □

**ESEMPIO 1.9. La serie armonica generalizzata** è una serie del tipo  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ , dove  $\alpha$  è un numero reale positivo. Per ogni valore di  $\alpha$  è una serie a termini positivi e abbiamo già visto che per  $\alpha = 1$  la serie risulta divergente.

Con il criterio integrale è facile notare che la serie armonica generalizzata  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  è convergente se e solo se lo è l'integrale improprio  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$  e quindi, come abbiamo visto lo scorso anno se e solo se  $\alpha > 1$ .

Un altro criterio importante è il seguente.

**TEOREMA 1.10 (Criterio del confronto).** *Siano  $(a_n)_{n \geq 1}$  e  $(b_n)_{n \geq 1}$  due successioni tali che*

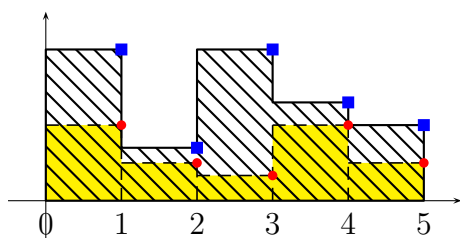
$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \geq 1.$$

*Allora:*

- i) *se la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  è convergente, allora anche la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  è convergente;*
- ii) *se la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  è divergente, allora anche la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  è divergente.*

**DIMOSTRAZIONE.** Nelle nostre ipotesi è facile e graficamente ovvio che valga la disuguaglianza

$$\sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k.$$



In figura, abbiamo indicato con un pallino rosso il grafico della successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e con un quadrato blu il grafico della successione  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Il confronto tra le somme delle aree dei rettangoli generati dalle due successioni fornisce la disequaglianza cercata: l'area della regione tratteggiata è banalmente maggiore o uguale all'area della regione gialla.

Nel caso i) basta controllare che la successione delle ridotte di  $(a_n)$  è superiormente limitata, il che segue facilmente da

$$\sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \quad \text{che è la somma (un numero finito) della serie.}$$

Nel caso ii) basta notare che

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n a_k}_{\rightarrow +\infty} \leq \sum_{k=1}^n b_k$$

quindi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n b_k = +\infty$ . □

**ESEMPIO 1.11.** La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+\sin n}{\sqrt{n}}$  è (positivamente) divergente, perché è a termini non negativi e inoltre ciascun termine si minora con il rispettivo termine della serie armonica, che è divergente:

$$\frac{1}{n} \leq \frac{2 + \sin n}{\sqrt{n}} \quad \forall n \geq 1 \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Questo criterio funziona anche se la maggiorazione è vera da un certo punto in poi, in particolare se le successioni  $(a_n)_{n \geq 1}$  e  $(b_n)_{n \geq 1}$  hanno lo stesso comportamento all'infinito. In particolare:

**COROLLARIO 1.12** (Criterio del confronto asintotico). *Siano  $(a_n)_{n \geq 1}$  e  $(b_n)_{n \geq 1}$  due successioni a termini non negativi e sia  $a_n = O(b_n)$  per  $n \rightarrow +\infty$ .*

- i) *Se la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  è convergente allora anche la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  è convergente.*
- ii) *Se la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  è divergente allora anche la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  è divergente.*

*In particolare se esiste finito e non nullo il  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$  il carattere delle due serie è lo stesso.*

ESEMPIO 1.13. La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \cos \frac{1}{n})$  è convergente. Infatti è a termini non negativi.

Inoltre la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  è convergente e vale

$$1 - \cos \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

ESEMPIO 1.14. La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$  è convergente. Infatti è a termini non negativi. Inoltre la serie

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  è convergente e vale

$$\frac{1}{n!} = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

**COROLLARIO 1.15** (Criterio dell'ordine di infinitesimo). *Sia  $(a_n)_{n \geq 1}$  una successione a termini non negativi e infinitesima di ordine  $\alpha > 0$ .*

- i) *Se  $\alpha > 1$  allora la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  è convergente;*
- ii) *Se  $0 < \alpha \leq 1$  allora la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  è divergente.*

ESEMPIO 1.16. Nel caso in cui  $a_n = o(1/n)$  però per ogni  $\alpha > 1$  si abbia  $n^{-\alpha} = o(a_n)$  questi criteri non dicono nulla. Le serie  $\sum \frac{1}{n \log n}$  e  $\sum \frac{1}{n \log^2 n}$  hanno entrambe queste proprietà, ma sono una divergente e l'altra convergente (come si può facilmente vedere usando il criterio integrale).

**TEOREMA 1.17** (Criterio del rapporto). *Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione a termini positivi tale che esista*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell.$$

- i) *Se  $\ell < 1$ , allora la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  è convergente e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ ;*
- ii) *se  $\ell > 1$ , allora la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  è divergente e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ .*

DIMOSTRAZIONE. Analizziamo il caso i). Sia  $\ell < m < 1$ . Da un certo  $N$  in poi si ha

$$\begin{aligned} a_{N+1} &< m a_N \\ a_{N+2} &< m a_{N+1} < m^2 a_N \\ a_{N+3} &< m a_{N+2} < m^3 a_N \\ &\vdots \\ a_{N+k} &< m^k a_N \quad \text{con } k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Ma allora da un certo punto in poi i termini sono dominati dai termini di una serie geometrica di ragione  $m < 1$ , quindi convergente. Allora per il criterio del confronto la serie di partenza è convergente e quindi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

Con analoghi ragionamenti si prova ii). Infatti, se  $\ell > M > 1$ . Da un certo  $N$  in poi si ha

$$\begin{aligned} a_{N+1} &> M a_N \\ a_{N+2} &> M a_{N+1} > M^2 a_N \\ a_{N+3} &> M a_{N+2} > M^3 a_N \\ &\vdots \\ a_{N+k} &> M^k a_N \quad \text{con } k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Ma allora da un certo punto in poi i termini sono minorati dai termini di una serie geometrica di ragione  $M > 1$ , quindi il termine generale è positivamente divergente e la serie di partenza è positivamente divergente.  $\square$

ESEMPIO 1.18. Nel caso in cui  $\ell = 1$ , il criterio del rapporto non permette di concludere nulla. Si considerino ad esempio le serie armoniche generalizzate con  $\alpha = 1$  e  $\alpha = 2$ . Una è divergente, l'altra è convergente, ma per entrambe il limite del rapporto è 1.

ESEMPIO 1.19. **La serie esponenziale.** Per quali  $x > 0$  è convergente la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ ? Vedremo in seguito che questa serie è convergente per ogni  $x$  in  $\mathbb{R}$  e la sua somma è  $e^x$ .

Sia  $a_n = \frac{x^n}{n!}$ ; allora  $a_n > 0$  e possiamo applicare il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{n+1} \longrightarrow 0 \quad \forall x > 0.$$

La serie esponenziale è convergente per ogni  $x > 0$ .

Osserviamo che in particolare per ogni  $x > 0$  vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Questo fatto è banale quando  $x \leq 1$ , ma per  $x > 1$  no; il limite precedente ci fa osservare che per  $n \rightarrow +\infty$  l'ordine di infinito di  $n!$  è maggiore di quello di  $x^n$ .



Il criterio del rapporto non si usa quando  $a_n$  è una funzione razionale di  $n$ , perché si otterrebbe  $\ell = 1$ . Può essere utile soprattutto quando ci sono i fattoriali.

ESEMPIO 1.20. Dire se converge  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ .

Si tratta di una serie a termini positivi. Proviamo col criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = (n+1) \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e} < 1.$$

Quindi la serie data è convergente. Questo dice anche che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ , ossia che l'ordine di infinito del fattoriale è minore di quello di  $n^n$ .

Analogo al criterio del rapporto è il

**TEOREMA 1.21** (Criterio della radice). *Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione a termini non negativi tale che esista*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell.$$

- i) *Se  $\ell < 1$ , allora la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  è convergente;*  
 ii) *se  $\ell > 1$ , allora la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  è divergente.*

ESEMPIO 1.22. Dire se è convergente  $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\log n}\right)^n$ . È una serie a termini non negativi; inoltre

$$\sqrt[n]{\left(\frac{1}{\log n}\right)^n} = \left(\frac{1}{\log n}\right) \rightarrow 0.$$

Allora la serie di partenza è convergente per il criterio della radice.

Si noti che se esiste  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ , allora anche  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$ . Infatti, se il limite del rapporto è  $\ell$ , fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Allora esiste  $N$  tale che per  $n = N + p$  con  $p = 0, 1, \dots$  vale

$$(\ell - \varepsilon)^p a_N < a_n < (\ell + \varepsilon)^p a_N.$$

Quindi sempre per  $n = N + p$  con  $p = 0, 1, \dots$  vale

$$((\ell - \varepsilon)^p a_N)^{1/n} < \sqrt[n]{a_n} < ((\ell + \varepsilon)^p a_N)^{1/n}.$$

Passando al limite per  $p \rightarrow +\infty$  nella precedente relazione otteniamo a sinistra  $\ell - \varepsilon$  e a destra  $\ell + \varepsilon$ . Ne segue che definitivamente

$$\ell - 2\varepsilon \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \ell + 2\varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di  $\varepsilon > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$ .

Anche qui nel caso  $\ell = 1$  non si può dire nulla (usare le serie armoniche generalizzate come nel criterio del rapporto).

## 4. Approssimazioni

In generale, calcolare la somma di una serie convergente è un problema abbastanza difficile, tranne in alcuni casi particolari (serie geometriche, telescopiche). È quindi utile saper approssimare la somma di una serie.

Vedremo due casi in cui è facile trovare l'approssimazione della somma: quello di serie che si possono trattare col criterio integrale e quello di serie che si possono trattare col criterio del rapporto.

**4.1. Approssimazione dal criterio integrale.** Supponiamo di voler approssimare  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ , dove  $a_n$  è della forma  $a_n = f(n)$  con  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione positiva, decrescente di integrale improprio  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  convergente (come nel criterio integrale). Allora la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$  è convergente. Desideriamo stimare la sua somma  $s$  a meno di un errore  $E$  (ad esempio  $E = 10^{-2}$ ).

Inizialmente possiamo pensare di troncare la somma a un certo indice  $N$ , da determinare, e trattare il resto  $N$ -esimo come errore. In formule:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \underbrace{\sum_{n=1}^N f(n)}_{\text{ridotta, } s_N \text{ che dà l'approssimazione}} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{+\infty} f(n)}_{\text{resto, che per } N \text{ opportuno deve essere } < E}.$$

Ricordando che, come nel criterio integrale,

$$\int_{N+1}^{+\infty} f(x) dx \leq s - s_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} f(n) \leq \int_N^{+\infty} f(x) dx,$$

abbiamo che

$$s_N + \int_{N+1}^{+\infty} f(x) dx \leq s \leq s_N + \int_N^{+\infty} f(x) dx.$$

Abbiamo così determinato un intervallo di ampiezza  $\int_N^{N+1} f(x) dx$  in cui si trova la somma  $s$  della serie. Se prendiamo il punto medio di questo intervallo, avremo una approssimazione  $s_N^*$  della somma della serie (migliore di quella che potrebbe darci  $s_N$ ).

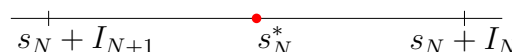
Riassumendo, se poniamo

$$s_N^* = s_N + \frac{1}{2}(I_{N+1} + I_N)$$

$$I_N = \int_N^{+\infty} f(x) dx$$

allora l'errore commesso è

$$|s - s_N^*| \leq \frac{1}{2}(I_N - I_{N+1}).$$



Occorre determinare  $N$  in modo che questo sia minore di  $E$  (ad es.  $10^{-2}$ ).

ESEMPIO 1.23. Approssimare a meno di  $10^{-4}$  la somma di  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

Usiamo il trucchetto precedente. Si ha  $I_N = \frac{1}{N}$  e la stima fornita da  $s_N^*$  dà un errore dell'ordine di  $\frac{1}{2}(I_N - I_{N+1}) = \frac{1}{2N(N+1)}$ . Abbiamo  $\frac{1}{2N(N+1)} < 10^{-4}$  ad esempio per  $N = 71$ . Con Maple possiamo scrivere una variazione dei comandi

```
> ridotta:=convert(sum(1/k^2,k=1..71),float);
> int_infinito:=n->1/n;
> approssimazione:=ridotta+0.5*(int_infinito(71)+int_infinito(72));
```

Il risultato che otteniamo è 1.6449, con quindi due cifre decimali esatte.

Notiamo che il metodo “ingenuo” di usare solo la stima dall'alto fornita dal criterio integrale ci avrebbe obbligati a molte iterazioni in più: siccome si tratta di una serie a termini positivi e convergente, possiamo approssimare (per difetto) la somma della serie con una opportuna ridotta di ordine  $N$ . Il problema è determinare  $N$  in modo che l'errore commesso sia più piccolo di  $10^{-4}$ . In formule:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \underbrace{\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}}_{\text{ridotta, che dà l'approssimazione}} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}_{\text{resto, che per } N \text{ opportuno deve essere } < 10^{-4}}.$$

Cerchiamo allora di determinare  $N$ , in modo che il resto sia minore di  $10^{-4}$ . La stima dall'alto del criterio integrale ci dice che

$$0 \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{N}.$$

Pertanto  $N$  dovrà essere scelto abbastanza grande, in modo che  $\frac{1}{N} < 10^{-4}$ , quindi almeno  $N = 10001$ .

**4.2. Approssimazione dal criterio del rapporto/radice.** Vediamo come approssimare la somma di serie positive la cui convergenza si può determinare con il criterio del rapporto o della radice o, più in generale, serie il cui termine generale  $a_n$  soddisfa, almeno definitivamente, una stima del tipo

$$0 \leq a_n \leq K r^n, \quad \text{con } K > 0, \quad 0 < r < 1.$$

Possiamo pensare di fissare un certo errore  $E$  o precisione della stima, troncando la serie a un certo indice  $N$ , da determinare, e trattare il resto come errore. In formule:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=1}^N a_n}_{\text{ridotta, } s_N \text{ che dà l'approssimazione}} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n}_{\text{resto, che per } N \text{ opportuno deve essere } < E}.$$

In questo caso il resto della serie può essere stimata tramite una serie geometrica. Più precisamente:

$$\begin{aligned} 0 \leq s - s_N &= \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} K r^n \\ &= K \sum_{n=N+1}^{+\infty} r^n = K r^{N+1} \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \\ &= \frac{K r^{N+1}}{1 - r}. \end{aligned}$$

Bisognerà quindi determinare  $N$  in modo che  $\frac{K r^{N+1}}{1-r}$  sia minore dell'errore richiesto.

**ESEMPIO 1.24.** Approssimare a meno di  $10^{-4}$  la somma di  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ . Come già anticipato, la somma di questa serie è  $e$ . Si ha per  $n \geq 2$

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Dobbiamo quindi determinare  $N$  in modo che

$$\frac{2 \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{2}} < 10^{-4}$$

e possiamo prendere  $N = 15$ .

La somma della serie richiesta è quindi approssimabile, a meno di  $10^{-4}$  con  $\sum_{n=0}^{15} \frac{1}{n!} = 1.7182$ .

Da notare è che la velocità con cui questa serie converge a  $e$  è molto interessante, soprattutto se paragonata con la velocità con cui la successione  $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  tende (crescendo) a  $e$ . Con lo stesso numero di iterazioni:  $b_{15} = 2.632878718$ , non ha nemmeno una cifra decimale esatta. La prima cifra decimale esatta fa capolino dopo 74 passi  $b_{74} = 2.700139679$ .

## 5. Serie assolutamente convergenti

Cosa possiamo dire se una serie ha termini di segno variabile? Ci sono alcune serie che sono facilmente trattabili e sono quelle assolutamente convergenti.

DEFINIZIONE 1.2. Una serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  si dice assolutamente convergente se è convergente la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ .

La loro importanza è dovuta in parte al seguente criterio e alle sue conseguenze.

TEOREMA 1.25. *Se una serie è assolutamente convergente, allora essa è convergente.*

DIMOSTRAZIONE. Si ha  $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ , quindi  $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$ . Poiché  $2|a_n|$  è termine generale di una serie convergente, allora per il criterio del confronto anche  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + |a_n|)$  è convergente, diciamo a  $\ell$ . Chiamiamo  $\ell'$  la somma di  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ . Si ha

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (a_k + |a_k|) - \sum_{k=1}^n |a_k| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell - \ell',$$

ovvero la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  è convergente. □

ESEMPIO 1.26. La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2}$  è convergente. Infatti essa è assolutamente convergente, perché  $|\frac{\sin n}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$  e la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  è convergente.

ESEMPIO 1.27. La serie esponenziale  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$  è assolutamente convergente per ogni  $x$  in  $\mathbb{R}$ . Infatti è banalmente convergente se  $x = 0$ . D'altra parte, usando il criterio del rapporto, è facile concludere che  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!}$  è convergente per ogni  $x$ .

Combinando il Teorema 1.25, il Corollario 1.15 e l'esempio 1.9 delle serie armoniche generalizzate otteniamo l'usatissimo

**TEOREMA 1.28** (Criterio dell'ordine di infinitesimo). *Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione infinitesima di ordine  $\alpha$ . Se  $\alpha > 1$ , allora la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  è assolutamente convergente.*

**ESEMPIO 1.29.** La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} (\log(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n})$  è assolutamente convergente, perché il termine generale  $\log(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n}$  è infinitesimo di ordine 2 per  $n \rightarrow +\infty$ .

Un esempio di serie convergente ma non assolutamente convergente è nella prossima sezione. Ovviamente non si tratta di una serie a termini non negativi.

Le serie assolutamente convergenti sono soprattutto “famosi” all'interno delle serie convergenti, perché la loro somma non varia quando permutiamo l'ordine degli addendi (anche infiniti addendi). Senza addentrarci maggiormente nell'argomento, qui precisiamo solo che riordinando in maniera opportuna i termini di una serie convergente ma non assolutamente convergente si può ottenere una nuova serie con somma diversa dalla serie di partenza. Anzi, comunque fissato  $\ell$  (reale o anche infinito) è possibile trovare un opportuno riordinamento che abbia  $\ell$  come somma (se  $\ell = \pm +\infty$  si intende che il riordinamento diverge positivamente o negativamente). E è anche possibile riordinare in modo da ottenere una serie indeterminata. Ciò comunque esula dagli scopi di questo corso.

## 6. Serie di Leibniz

Una serie di Leibniz o serie a segni alterni è una serie che si può scrivere nella forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad \text{con } a_n > 0 \quad \forall n$$

(oppure anche  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ ).

**TEOREMA 1.30.** *Sia  $(a_n)$  una successione non negativa, decrescente, infinitesima. Allora la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$  converge. Inoltre, se  $s$  è la somma della serie e  $(s_n)$  la successione delle ridotte, si ha*

$$\begin{aligned} 0 &\leq s - s_n \leq a_{n+1} \text{ se } n \text{ è pari} \\ -a_{n+1} &\leq s - s_n \leq 0 \text{ se } n \text{ è dispari} \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo i casi in cui abbiamo un numero dispari di addendi, ad esempio  $2m - 1$  e  $2m + 1$ . Si ha

$$s_{2m+1} = s_{2m-1} + (-1)^{2m-1} a_{2m} + (-1)^{2m} a_{2m+1} = s_{2m-1} - a_{2m} + a_{2m+1} \leq s_{2m-1},$$

perché, siccome la successione  $(a_n)$  è decrescente,  $a_{2m+1} - a_{2m} \leq 0$ . Questo vuol dire che la successione  $(s_{2m+1})$  è decrescente.

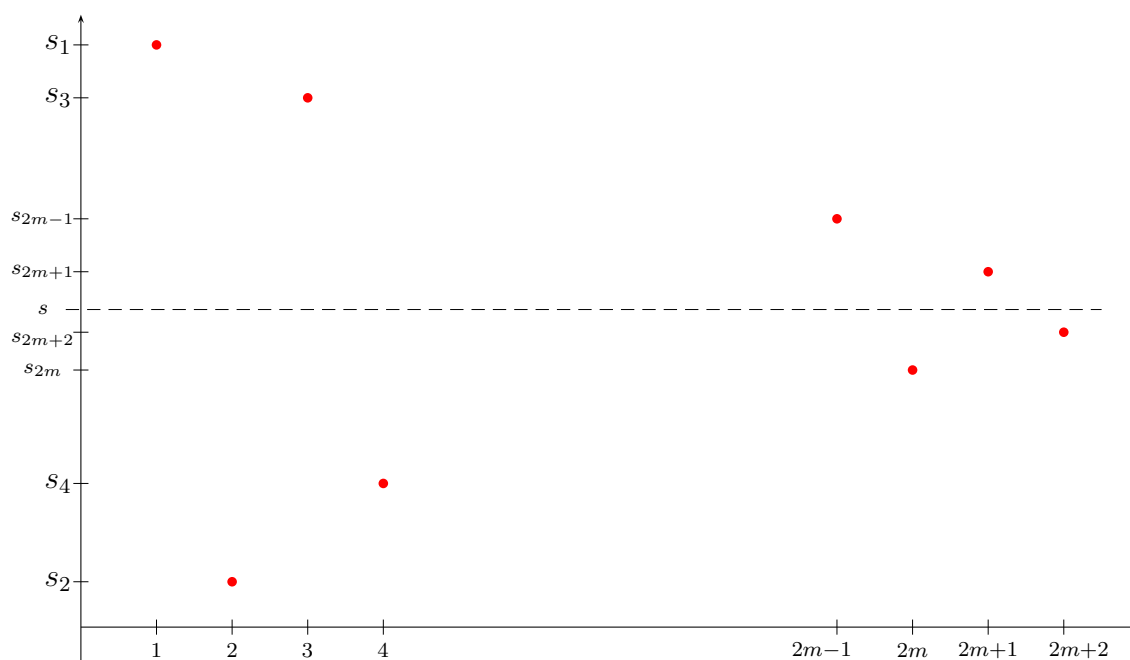
Analogamente, se consideriamo i casi in cui abbiamo un numero pari di addendi, ad esempio  $2m$  e  $2m + 2$ , si ha

$$s_{2m+2} = s_{2m} + a_{2m+1} - a_{2m+2} \geq s_{2m}.$$

Questo vuol dire che la successione  $(s_{2m})$  è crescente. Inoltre, siccome  $(a_n)$  è non negativa,

$$s_{2m} \leq s_{2m} + a_{2m+1} = s_{2m+1} \leq s_{2m-1} \leq \dots \leq s_1.$$

Nel disegno vediamo il grafico della successione  $(s_n)$  con le proprietà che abbiamo appena stabilito:



In particolare,  $(s_{2m})$  è crescente e limitata dall'alto da  $s_1$ , mentre  $(s_{2m+1})$  è decrescente e limitata dal basso da  $s_2$ ; comunque entrambe sono convergenti.

Sia  $s = \lim_{m \rightarrow +\infty} s_{2m}$ . Allora, siccome  $(a_n)$  è infinitesima, anche

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} s_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow +\infty} s_{2m} + a_{2m+1} = s.$$

Infine  $s_{2m} \leq s \leq s_{2m+1}$  per ogni  $m$  da cui

$$0 \leq s - s_{2m} \leq s_{2m+1} - s_{2m} = a_{2m+1}$$

$$0 \leq s_{2m+1} - s \leq s_{2m+1} - s_{2m+2} = a_{2m+2}.$$

Quindi per  $n$  pari oppure dispari

$$0 \leq |s - s_n| \leq a_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

ovvero  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s$ . □

ESEMPIO 1.31.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  è una serie convergente per il criterio appena visto. Si noti che non è assolutamente convergente e che il termine generale è un infinitesimo di ordine uno. Qualora si desideri determinarne la somma a meno di  $10^{-3}$ , è sufficiente ricordare che la ridotta di ordine  $n$  approssima la somma della serie a meno di  $\frac{1}{n+1}$ . Pertanto occorre prendere  $n = 1001$  e, a meno di  $10^{-3}$ , la somma della serie è  $-0,693$ . Tale approssimazione è per difetto.

La somma di questa serie si potrebbe calcolare con un po' di fatica e è  $-\log 2$ . Tuttavia la velocità di convergenza è molto lenta e questo non fornisce un buon metodo per approssimare  $-\log 2$ .

ESEMPIO 1.32. La proprietà di decrescenza della successione  $(a_n)$  è fondamentale. Si consideri ad esempio la serie a segni alterni

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

dove

$$a_n = \begin{cases} 1/k & \text{se } n = 2k \text{ è pari} \\ 1/k^2 & \text{se } n = 2k - 1 \text{ è dispari} \end{cases}$$

È facile vedere che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$  e che  $(a_n)$  non è decrescente.

Mostriamo che la serie non converge guardando le somme parziali di ordine pari.

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty,$$

perché la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  diverge e la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  converge.



## 7. Esercizi

1) Dire se sono convergenti le seguenti serie:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+5}{n^3-2n+3}; & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2n-1}; & \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \sin \frac{1}{n^2} \right|; & \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\log(\log n))^n}, \\ & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n e^n}; & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n - n}; & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+n!}{(1+n)!}; & \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log^3 n}; & \sum_{n=1}^{+\infty} \log \left( \frac{n}{n+1} \right); \\ & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^4}{n!}; & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}; & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}}; & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^n + 5}. \end{aligned}$$

2) Dire se le seguenti serie sono convergenti e eventualmente approssimarne la somma a meno di  $10^{-5}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}.$$

3) Dire se sono convergenti e eventualmente calcolare la somma di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3+2^n}{2^{n+2}}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}; \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log n}.$$

4) Per quali  $x$  in  $\mathbb{R}$  sono assolutamente convergenti o convergenti o divergenti le seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-5)^n}{n 3^n}; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 \left( \frac{x}{x+2} \right)^n; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^3}.$$



## CAPITOLO 2

### Serie di funzioni

Una serie di funzioni è un'espressione del tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \quad \text{oppure} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

dove le  $f_n$  sono funzioni di una variabile reale a valori reali e hanno un dominio comune  $I$ .

In questo corso ci occuperemo essenzialmente di un tipo di serie di funzioni: le serie di potenze (e le serie di Taylor).

#### 1. Tipi di convergenza

Osserviamo che se  $x$  è fissato in  $I$ , allora la successione  $(f_n(x))_n$  è una successione numerica. Possiamo quindi chiederci se, per  $x$  fissato in  $I$ , la serie numerica  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  è convergente.

Per tutte le  $x$  in  $I$  per cui la serie numerica  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  è convergente, si definisce una nuova funzione, la funzione somma.

**1.1. Convergenza puntuale.** Una prima definizione di convergenza è quindi la seguente.

**DEFINIZIONE 2.1.** Siano  $f_n$  funzioni reali di variabile reale con comune dominio  $I$ . Si dice che la serie di funzioni  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  converge *puntualmente* in un insieme  $D \subseteq I$  se per ogni  $x$  in  $D$  la serie numerica  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  è convergente. La funzione  $f$  definita da

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \quad \forall x \in D$$

è la *funzione somma*. L'insieme  $D$  si dice *insieme di convergenza puntuale* della serie di funzioni  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ .

**PROPRIETÀ.** Siccome la serie dei resti  $n$ -esimi ha lo stesso carattere della serie di partenza, la successione

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

è ben definita per ogni  $x$  in  $D$ , insieme di convergenza puntuale della serie di funzioni data. Inoltre per ogni  $x$  in  $D$  fissato,

$$r_n(x) = f(x) - s_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Dalla definizione di limite, questo vuol dire che comunque siano fissati  $x$  in  $D$  e  $\varepsilon > 0$  esiste un indice  $N$  (che può dipendere sia da  $x$  sia da  $\varepsilon$ ) tale che per ogni  $n \geq N$  si abbia  $|r_n(x)| < \varepsilon$ .

PROPRIETÀ. Dalla condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica (Teorema 1.4), ricaviamo che l'insieme di convergenza puntuale è contenuto nell'insieme dei punti  $x$  tali che  $(f_n(x))_n$  è infinitesima:

$$D \subseteq \{x \in I : \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0\}.$$

La nozione di convergenza puntuale è però poco interessante, perché non permette di trasferire proprietà delle funzioni  $f_n$  alla funzione somma. Ad esempio la somma di una serie di funzioni continue potrebbe non essere continua.

ESEMPIO 2.1. Consideriamo  $\sum_{n=0}^{\infty} (x^n - x^{n+1})$  — vi ricordo che  $0^0 = 1$  per convenzione.

In questo esempio, le funzioni  $f_n$  sono le funzioni definite su  $I = \mathbb{R}$  da

$$f_n(x) = x^n - x^{n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Per  $x$  fissato, abbiamo una serie telescopica, per cui

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (x^k - x^{k+1}) = x^0 - x^n = 1 - x^n \rightarrow \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & x = 1 \\ \text{non converge} & x \leq -1, \quad x > 1. \end{cases}$$

Quindi la funzione somma  $f$  è definita su  $D = (-1, 1]$  e

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & x = 1. \end{cases}$$

Nonostante tutte le funzioni  $f_n$  siano continue in  $D$ , la funzione  $f$  non è continua in  $D$ .

**1.2. Convergenza uniforme.** È quindi opportuno sostituire la nozione di convergenza puntuale con una più forte, la convergenza uniforme.

DEFINIZIONE 2.2. Siano  $f_n$  funzioni reali di variabile reale con comune dominio  $I$ . Supponiamo che la serie di funzioni  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  converga puntualmente in  $D \subseteq I$  alla funzione somma  $f$ . Si dice che la serie di funzioni  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  converge uniformemente in  $D' \subseteq D$  alla sua somma se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup\{|s_n(x) - f(x)| : x \in D'\} = 0$$

In simboli  $s_n = \sum_{k=1}^n f_k \xrightarrow[D']{=} f$ .

PROPRIETÀ. Possiamo riscrivere la condizione di uniforme convergenza facendo intervenire il resto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup\{|r_n(x)| : x \in D'\} = 0.$$

Dalla definizione di limite, questo vuol dire che comunque sia fissato  $\varepsilon > 0$  esiste un indice  $N$  (che può dipendere da  $\varepsilon$ ) tale che per ogni  $n \geq N$  si abbia  $|r_n(x)| < \varepsilon$  per ogni  $x$  in  $D'$ . Si ha quindi un'uniformità rispetto a  $x$  in  $D'$  per la scelta di tale indice  $N$ .

PROPOSIZIONE 2.2 (Continuità e convergenza uniforme). *Siano  $f_n$  funzioni continue in un punto  $x_0$  di  $I$  per ogni  $n$  e sia  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  uniformemente convergente in  $I$  a  $f$ . Allora  $f$  è continua in  $x_0$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\varepsilon > 0$  fissato. Siccome la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  converge uniformemente a  $f$  in  $I$ , si trova un indice  $N$  tale che

$$\sup\{|s_n(x) - f(x)| : x \in I\} < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Siccome la somma finita di funzioni continue è continua, esiste un intorno  $U$  di  $x_0$  tale che per ogni  $x$  in  $U \cap I$  si abbia

$$|s_N(x) - s_N(x_0)| < \varepsilon.$$

Ne ricaviamo quindi che per ogni  $x$  in  $U \cap I$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - s_N(x)| + |s_N(x) - s_N(x_0)| + |s_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq 2 \sup\{|s_n(x) - f(x)| : x \in I\} + |s_N(x) - s_N(x_0)| \\ &< 3\varepsilon. \end{aligned}$$

□

Una proprietà importante sullo scambio tra serie e integrale è l'oggetto della seguente proposizione, di cui vediamo solo l'enunciato.

**PROPOSIZIONE 2.3** (Integrazione per serie). *Siano  $f_n$  funzioni Riemann integrabili su un intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$  per ogni  $n$  e sia  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  uniformemente convergente in  $[a, b]$  alla somma  $f$ . Allora  $f$  è Riemann integrabile su  $[a, b]$  e*

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \left( \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t) \right) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b f_k(t) dt.$$

In particolare la Proposizione 2.3 ci permette di concludere che per ogni  $x, x_0$  in  $[a, b]$  si ha

$$\sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x f_k(t) dt \underset{x \in [a, b]}{\rightrightarrows} \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

In altre parole, detta  $F_n$  la primitiva di  $f_n$  che vale 0 in un punto  $x_0$  e  $F$  la primitiva di  $f$  che vale 0 nello stesso punto  $x_0$  si ha

$$\sum_{k=1}^n F_k \underset{[a, b]}{\rightrightarrows} F,$$

brevemente: la serie delle primitive (che si annullano nello stesso punto) è la primitiva (nulla nello stesso punto) della serie.

**PROPOSIZIONE 2.4** (Derivazione per serie). *Siano  $f_n$  funzioni di classe  $C^1$  su un intervallo  $I$  e sia  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  puntualmente convergente in  $I$  alla somma  $f$ . Supponiamo che  $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n$  sia uniformemente convergente in  $I$  a  $g$ . Allora  $f$  è di classe  $C^1$  in  $I$  e  $f' = g$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Notiamo che per ogni  $n$  e per ogni  $x, x_0$  in  $I$  per il Teorema fondamentale del calcolo integrale vale

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt,$$

quindi

$$\sum_{k=1}^n f_k(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x_0) + \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x f'_k(t) dt.$$

Siccome la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  converge puntualmente in  $I$  a  $f$ , si ha

$$\sum_{k=1}^n f_k(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x) \quad \forall x \in I$$

(e quindi anche  $x_0$ ). Siccome la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n$  è uniformemente convergente a  $g$  in  $I$ , per la Proposizione 2.3 di integrazione per serie vale

$$\sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x f'_k(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x \sum_{k=1}^{+\infty} f'_k(t) dt = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

Quindi

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt \quad \forall x \in I.$$

Per la Proposizione 2.2 la funzione  $g$  è continua. Quindi dal Teorema fondamentale del calcolo integrale deduciamo che  $f$  è derivabile e  $f' = g$ , ossia  $f$  è  $C^1$ .  $\square$

La Proposizione 2.4 afferma quindi che (per una serie di funzioni derivabili, puntualmente convergente, con serie delle derivate uniformemente convergente) si possono scambiare l'operazione di serie e quella di derivata:

$$f'(x) = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \right)'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x).$$

Purtroppo non è semplice stabilire la convergenza uniforme, specialmente se non conosciamo la funzione somma di una serie data.

Una condizione necessaria per la convergenza uniforme è la seguente (si confronti con il Teorema 1.4).

**TEOREMA 2.5** (Condizione necessaria per la convergenza uniforme). *Sia  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  una serie di funzioni convergente uniformemente in  $D$ . Allora*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup\{|f_n(x)| : x \in D\} = 0.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $f$  la funzione somma della serie, ovvero, detta  $(s_n)$  la successione delle ridotte, si ha  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup\{|s_n(x) - f(x)| : x \in D\} = 0$ . Ma allora

$$\begin{aligned} 0 \leq \sup\{|f_n(x)| : x \in D\} &= \sup\{|s_n(x) - s_{n-1}(x)| : x \in D\} \\ &\leq \sup\{|s_n(x) - f(x)| : x \in D\} + \sup\{|f(x) - s_{n-1}(x)| : x \in D\} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

$\square$

Un modo facile di controllare la convergenza uniforme è il cosiddetto “test di Weierstrass”. Il vantaggio è che permette di concludere positivamente sulla convergenza uniforme di una serie di funzioni senza conoscerne la somma.

**TEOREMA 2.6** (Test di Weierstrass). *Siano  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $|f_n(x)| \leq M_n$  per ogni  $x$  in  $I$  e la serie numerica  $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$  è convergente, allora la serie di funzioni  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  converge uniformemente in  $I$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Si ha

$$\begin{aligned} \sup\{|s_n(x) - f(x)| : x \in D\} &= \sup\{|r_n(x)| : x \in D\} \\ &\leq \sup\left\{\sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| : x \in D\right\} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k. \end{aligned}$$

Siccome  $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$  è convergente, per la Proposizione 1.7, il suo resto  $n$ -esimo tende a zero, quindi

$$0 \leq \sup\{|s_n(x) - f(x)| : x \in D\} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

□

**ESEMPIO 2.7.** La serie di funzioni  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$  è uniformemente convergente in  $[-1, 1]$ , perché

$$\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ è convergente.}$$

**ESEMPIO 2.8.** La serie esponenziale  $e^x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$  è puntualmente convergente in  $\mathbb{R}$ , non è uniformemente convergente in  $\mathbb{R}$ , ma lo è sui sottointervalli chiusi e limitati. Infatti

$$\sup\left\{\left|\frac{x^n}{n!}\right| : x \in [-A, A]\right\} \leq \frac{A^n}{n!} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \text{ è convergente,}$$

da cui  $\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{[-A, A]} e^x$ . (Vedremo in seguito che la somma è  $e^x$ .)

Non è uniformemente convergente in  $\mathbb{R}$  perché non è soddisfatta la condizione necessaria del Teorema 2.5:

$$\sup\{|f_n(x)| : x \in \mathbb{R}\} = \sup\left\{\frac{|x|^n}{n!} : x \in \mathbb{R}\right\} = +\infty.$$

**ESEMPIO 2.9.** Sia

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 x^2 + 1}.$$



Determiniamo il dominio di  $f$  e diciamo se  $f$  è continua.

Per  $x$  reale poniamo  $f_n(x) = \frac{1}{n^2x^2+1}$ . Quando  $x = 0$  il termine generale non è infinitesimo, perché  $f_n(0) = 1$  per ogni  $n$ . Quindi  $0$  non è nell'insieme di convergenza puntuale ovvero nel dominio di  $f$ .

Quando  $x \neq 0$  il termine generale  $f_n(x)$  è un infinitesimo di ordine 2, quindi la serie risulta essere assolutamente convergente. In particolare la serie di funzioni data è convergente puntualmente in  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , che è il dominio di  $f$ .

La serie non è uniformemente convergente su  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , perché non è soddisfatta la condizione necessaria del Teorema 2.5:

$$\sup\{|f_n(x)| : x \neq 0\} = \sup\left\{\frac{1}{n^2x^2+1} : x \neq 0\right\} = 1 \quad \forall n.$$

Tuttavia è uniformemente convergente in ogni sottoinsieme della forma  $(-\infty, -A] \cup [A, +\infty)$  per ogni  $A > 0$ . Infatti, possiamo usare il test di Weierstrass:

$$\sup\left\{\frac{1}{n^2x^2+1} : |x| \geq A\right\} = \frac{1}{n^2A^2+1} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2A^2+1} \text{ è convergente.}$$

Dalla Proposizione 2.2 deduciamo che  $f$  è continua in  $(-\infty, -A] \cup [A, +\infty)$  per ogni  $A > 0$ .

Se fissiamo un punto  $x_0$  nel dominio di  $f$ , cioè prendiamo  $x_0 \neq 0$ , allora  $x_0$  apparterrà a un opportuno intervallo della forma  $(-\infty, -A] \cup [A, +\infty)$  e quindi  $f$  risulta continua in  $x_0$ . Siccome  $f$  è continua in ogni punto del suo dominio,  $f$  è continua.

Ci sono fondamentalmente due ragioni per considerare le serie di funzioni: da una parte sono uno strumento per definire nuove funzioni e studiarne le proprietà, d'altra parte si può voler scrivere una funzione nota come sovrapposizione di funzioni più semplici, ad esempio, allo scopo di integrare o derivare per serie.

Nella prossima sezione ci occupiamo di un tipo particolare di serie di funzioni: le serie di potenze.

## 2. Serie di potenze

Una serie di potenze centrate nel numero reale  $x_0$  è una serie della forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

con  $a_n \in \mathbb{R}$ .

Si tratta di una serie di funzioni, in cui  $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$ . I numeri  $a_n$  si chiamano i coefficienti della serie di potenze,  $x_0$  si chiama centro della serie di potenze.

In particolare sono serie di potenze centrate in 0 le serie della forma

$$(2.1) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

A meno della traslazione  $t = x - x_0$ , ci possiamo ricondurre a avere una serie della forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

ovvero una serie centrata in 0.

Per semplicità quindi ci limitiamo a considerare il caso  $x_0 = 0$ .

Il risultato fondamentale per le serie di potenze riguarda la forma dell'insieme di convergenza assoluta. Possiamo subito notare che quando  $x = 0$  la serie (2.1) contiene solo un termine non nullo, il primo:  $a_0$  (ricordate la convenzione  $0^0 = 1$ ). Quindi la serie (2.1) è convergente nel suo centro e lì ha somma  $a_0$ .

**TEOREMA 2.10.** *Se la serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  converge nel punto  $x = p \neq 0$ , allora essa converge puntualmente assolutamente nei punti dell'intervallo  $(-|p|, |p|)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Per ipotesi la serie converge per  $x = p$ . Quindi il suo termine generale, per  $x = p$ , deve essere infinitesimo, in particolare sarà limitato da una costante  $M$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n p^n = 0 \quad \Rightarrow \quad |a_n p^n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Supponiamo ora che  $x$  sia un punto dell'intervallo  $(-|p|, |p|)$ . Allora  $q = |x|/|p| < 1$  e per ogni  $n$

$$0 \leq |a_n x^n| = |a_n p^n| \left| \frac{x}{p} \right|^n \leq M q^n.$$

Siccome la serie  $\sum q^n$  geometrica di parametro  $q < 1$  è convergente, per il criterio del confronto converge la serie  $\sum |a_n x^n|$ .  $\square$

Una conseguenza importante di questo teorema è che se la serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  non converge nel punto  $x = p'$ , allora non converge in tutti i punti  $x$  tali che  $|x| > |p'|$ . Infatti, se per assurdo convergesse in  $p''$ , con  $|p''| > |p'|$ , allora sarebbe convergente anche nei punti dell'intervallo  $I = (-|p''|, |p''|)$ . Siccome  $p'$  è in questo intervallo e in  $p'$  la serie non converge, abbiamo trovato un assurdo. Abbiamo così provato che

COROLLARIO 2.11. *Se la serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  non converge nel punto  $x = p' \neq 0$ , allora essa non converge in ogni punto al di fuori dell'intervallo  $[-|p'|, |p'|]$ .*

**2.1. Raggio di convergenza.** Da quanto visto deduciamo che l'insieme di convergenza puntuale della serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  centrata in 0 è un intervallo (simmetrico, se non ci occupiamo degli estremi) di centro 0. All'interno di tale intervallo si ha convergenza assoluta.

Analogamente, l'insieme di convergenza puntuale della serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$  centrata in  $x_0$  è un intervallo di centro  $x_0$  e all'interno di tale intervallo si ha convergenza assoluta.

Nei prossimi esempi osserviamo che l'intervallo di convergenza puntuale può ridursi al solo centro, può essere tutto  $\mathbb{R}$ , può essere limitato, chiuso o aperto (anche solo da un lato).

ESEMPIO 2.12. La serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$  converge solo per  $x = 0$ . Infatti per ogni  $x \neq 0$  il termine generale non è infinitesimo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n! |x|^n = +\infty.$$

ESEMPIO 2.13. La serie esponenziale  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$  converge per ogni  $x$  reale, quindi l'intervallo di convergenza è  $(-\infty, +\infty)$ .

ESEMPIO 2.14. La serie geometrica  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$  converge in  $(-1, 1)$ .

La serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$  converge in  $[-1, 1)$ .

La serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$  converge in  $(-1, 1]$ .

La serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$  converge in  $[-1, 1]$ .

La semiampiezza del più grande intervallo in cui la serie converge costituisce il raggio di convergenza. Precisamente:

DEFINIZIONE 2.3. Data una serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ , si dice raggio di convergenza il

$$\sup \left\{ |x| : \text{la serie } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ converge} \right\}.$$

Da quanto detto, ogni serie di potenze centrata in 0 si può inquadrare in uno dei tre casi seguenti.

- 1) La serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  converge solo per  $x = 0$  e quindi ha raggio di convergenza 0.
- 2) La serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  converge per ogni  $x$  in un intervallo della forma  $(-\rho, \rho)$ , con  $\rho > 0$ , e non converge se  $|x| > \rho$ . In questo caso  $\rho$  è il raggio di convergenza. Si noti che per  $|x| = \rho$  la serie può avere qualsiasi comportamento.
- 3) La serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  converge per ogni  $x$  reale; in questo caso il raggio di convergenza è  $+\infty$ .

Il problema è ora come determinare il raggio di convergenza della serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ . Dai criteri del rapporto e della radice per serie numeriche (Teoremi 1.17 e 1.21) applicati alla serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| |x|^n$  discendono immediatamente i seguenti risultati.

TEOREMA 2.15. Sia  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  una serie di potenze, con  $a_n \neq 0$  per ogni  $n$  e sia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell.$$

- Se  $0 < \ell < +\infty$  allora il raggio di convergenza è  $\rho = 1/\ell$ .
- Se  $\ell = +\infty$  allora il raggio di convergenza è  $\rho = 0$ .
- Se  $\ell = 0$  allora il raggio di convergenza è  $\rho = +\infty$ .

TEOREMA 2.16. Sia  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  una serie di potenze e sia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell.$$

- Se  $0 < \ell < +\infty$  allora il raggio di convergenza è  $\rho = 1/\ell$ .
- Se  $\ell = +\infty$  allora il raggio di convergenza è  $\rho = 0$ .
- Se  $\ell = 0$  allora il raggio di convergenza è  $\rho = +\infty$ .

**2.2. Continuità della somma di una serie di potenze.** Mostriamo ora che in sottointervalli chiusi e limitati contenuti all'interno dell'intervallo di convergenza si ha anche convergenza uniforme.

TEOREMA 2.17. Sia  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  una serie di potenze con raggio di convergenza  $\rho > 0$  (anche  $+\infty$ ). Allora  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  converge uniformemente in ogni intervallo della forma

$$[-r, r] \subset (-\rho, \rho) \quad \begin{array}{l} 0 < r < \rho \text{ se } \rho \in \mathbb{R}^+ \\ \forall r > 0 \text{ se } \rho = +\infty. \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE. Occupiamoci del caso in cui  $\rho$  non sia  $+\infty$ . Il caso  $\rho = +\infty$  è analogo. Se  $|x| \leq r$  si ha

$$|a_n x^n| \leq |a_n| r^n \quad \forall n.$$

Dalla definizione di raggio di convergenza, sappiamo che quando  $r < \rho$  la serie numerica  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$  è assolutamente convergente. Allora adoperando il test di Weierstrass (Teorema 2.6)

possiamo concludere che la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  converge uniformemente in  $[-r, r]$ .  $\square$

COROLLARIO 2.18. Sia  $f$  la somma di una serie di potenze centrate in 0 e con raggio di convergenza  $\rho$ . Allora  $f$  è continua in  $(-\rho, \rho)$ .

DIMOSTRAZIONE. Sia  $x_1$  un punto di  $(-\rho, \rho)$  e sia  $h$  tale che  $|x_1| \leq h$ . Siccome la serie di potenze converge uniformemente in  $[-h, h]$  e le potenze sono funzioni continue, per la Proposizione 2.2 su continuità e convergenza uniforme,  $f$  risulta continua in  $x_1$ . Per l'arbitrarietà di  $x_1$  otteniamo la tesi.  $\square$

Osserviamo che può esserci convergenza uniforme in tutti i sottointervalli contenuti nell'intervallo di convergenza senza esserci convergenza uniforme in tutto l'intervallo di convergenza.

ESEMPIO 2.19. La serie geometrica  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$  ha raggio di convergenza 1 e il suo intervallo di convergenza è  $(-1, 1)$ . C'è convergenza uniforme nei sottointervalli della forma  $[-r, r]$  con  $r < 1$ , ma non c'è convergenza uniforme su  $(-1, 1)$ , perché non è soddisfatta la condizione necessaria del Teorema 2.5

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup\{|x|^n : x \in (-1, 1)\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1.$$

Tuttavia, se in un estremo dell'intervallo di convergenza la serie di potenze è convergente, allora l'intervallo di convergenza uniforme (e quindi l'intervallo di continuità della funzione somma) è più grande. È il significato del seguente criterio, che non dimostriamo.

TEOREMA 2.20 (Abel). Sia  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  una serie di potenze con raggio di convergenza  $\rho > 0$  finito. Allora

- se la serie converge in  $x = \rho$ , allora la serie è uniformemente convergente in  $[-r, \rho]$  per ogni  $0 < r < \rho$  e quindi la funzione somma è continua in  $(-\rho, \rho]$ ;
- se la serie converge in  $x = -\rho$ , allora la serie è uniformemente convergente in  $[-\rho, r]$  per ogni  $0 < r < \rho$  e quindi la funzione somma è continua in  $[-\rho, \rho)$ ;
- se la serie converge in  $x = \pm\rho$ , allora la serie è uniformemente convergente in  $[-\rho, \rho]$  e quindi la funzione somma è continua in  $[-\rho, \rho]$ .

**2.3. Derivabilità e integrazione per serie di potenze.** Dai Teoremi 2.3 e 2.4 seguono facilmente i seguenti criteri (con estremi inclusi o esclusi a seconda dei casi).

TEOREMA 2.21 (Integrazione per serie della somma di una serie di potenze). Sia  $\rho > 0$  il raggio di convergenza della serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  e sia  $f$  la sua somma. Allora

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad \forall x \in (-\rho, \rho).$$

In particolare, per ogni  $a, b \in (-\rho, \rho)$  si ha

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}).$$

Si può dimostrare che il raggio di convergenza della serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$  è lo stesso della serie di partenza  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ . In effetti, se esiste  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  e usiamo il criterio della radice,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n |a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

**TEOREMA 2.22** (Derivazione per serie della somma di una serie di potenze). *Sia  $\rho > 0$  il raggio di convergenza della serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  e sia  $f$  la sua somma. Allora  $f$  è  $C^1$  in  $(-\rho, \rho)$  e si ha*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \forall x \in (-\rho, \rho).$$

Iterando il ragionamento, otteniamo che la somma di una serie di potenze di raggio di convergenza positivo è di classe  $C^\infty$ , inoltre

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k} \quad \forall x \in (-\rho, \rho);$$

$$f^{(k)}(0) = k! a_k \quad \text{in particolare per } x = 0.$$

**2.4. Esempi.** In questa sezione vediamo alcuni esempi noti di serie di potenze che si costruiscono a partire dalla serie geometrica.

1) La serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in (-1, 1)$$

ha raggio di convergenza 1. Converge uniformemente nei sottointervalli del tipo  $[-r, r]$  con  $r < 1$ .

2) Se nella serie geometrica  $\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$  poniamo  $t = -x$ , otteniamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Di nuovo il raggio di convergenza è 1 e la serie converge uniformemente nei sottointervalli del tipo  $[-r, r]$  con  $r < 1$ .

3) Se nella serie geometrica  $\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$  poniamo  $t = -x^2$ , otteniamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Di nuovo il raggio di convergenza è 1 e la serie converge uniformemente nei sottointervalli del tipo  $[-r, r]$  con  $r < 1$ .

4) Integrando per serie nell'intervallo  $(0, x)$  la serie dell'esempio 2) otteniamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \forall x \in (-1, 1].$$

Il raggio di convergenza è sempre 1 ma la serie converge uniformemente nei sottointervalli del tipo  $[-r, 1]$  con  $r < 1$ . In particolare  $\log(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ .

5) Integrando per serie nell'intervallo  $(0, x)$  la serie dell'esempio 3) otteniamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Il raggio di convergenza è sempre 1 ma la serie converge uniformemente su  $[-1, 1]$ . In particolare  $\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ .

6) Derivando per serie la geometrica otteniamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \left( \frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Il raggio di convergenza è sempre 1. Questo esempio è legato alla probabilità. Sia  $T$  il tempo di attesa di uno schema di Bernoulli di parametro  $p \in (0, 1)$  e sia  $q = 1 - p$ . Allora  $\mathbb{P}(T = n) = p q^{n-1}$  e per quanto appena visto,

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} n p q^{n-1} = p \sum_{n=1}^{+\infty} n q^{n-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

### 3. Serie di Taylor

Abbiamo visto che se  $f$  è una funzione reale, definita in un intervallo  $(a, b)$ ,  $x_0$  è un punto di  $(a, b)$  e  $f$  è derivabile  $n$  volte in  $x_0$ , allora alla funzione  $f$  possiamo associare il polinomio di Taylor centrato in  $x_0$  e di ordine  $n$ , dato da

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$



Abbiamo visto che questo è il polinomio che approssima la funzione  $f$  in un intorno del punto  $x_0$  a meno di un infinitesimo di ordine superiore a  $(x - x_0)^n$ , ovvero

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \left[ f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right]}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Numericamente una stima dell'errore è data dalla formula di Taylor con resto di Lagrange: se  $f$  è derivabile con continuità in  $(a, b)$  e la derivata di ordine  $n + 1$  esiste in  $(a, b) \setminus \{x_0\}$ , allora per ogni  $x$  in  $(a, b)$  esiste un punto  $\xi$  nell'intervallo di estremi  $x_0$  e  $x$  tale che

$$(2.2) \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

In forma più compatta, possiamo scrivere il polinomio di Taylor di  $f$  centrato in  $x_0$  e di ordine  $n$  come

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

dove intendiamo che  $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ .

Nel caso in cui  $f$  sia derivabile infinite volte in un intervallo  $(a, b)$ , appare naturale associare alla funzione  $f$  la serie

$$(2.3) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

di cui il polinomio di Taylor di ordine  $n$  costituisce la ridotta (di ordine  $n + 1$ ).

**DEFINIZIONE 2.4.** La serie (2.3) prende il nome di *serie di Taylor* di  $f$  centrata in  $x_0$ . Quando  $x_0 = 0$ , si parla di *serie di Mac Laurin* di  $f$ .

Osserviamo che una serie di Taylor è una serie di potenze e che ogni serie di potenze (di raggio di convergenza positivo) è la serie di Taylor della sua somma. Quindi gli esempi 1)–6) di serie di potenze della sezione precedente sono delle particolari serie di Mac Laurin della loro somma.

**3.1. Convergenza di una serie di Taylor.** Sia  $f$  infinitamente derivabile in un certo intervallo  $(a, b)$ .

Due sono le domande che ci poniamo a questo punto:

- 1) la serie definita dalla formula (2.3) è convergente per ogni  $x \in (a, b)$ ?
- 2) Se la serie (2.3) è convergente in  $x \in (a, b)$ , la somma della serie è  $f(x)$ ?

Se la risposta a entrambe le domande precedenti è sì, allora  $f(x)$  si dice *svilupppabile in serie di Taylor* centrata in  $x_0$  nell'intervallo  $(a, b)$ .

Siccome una serie di Taylor è una serie di potenze, sappiamo che avrà un intervallo di convergenza simmetrico, del tipo  $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ . Quindi, a meno che  $x_0$  non sia il centro dell'intervallo  $(a, b)$ , la risposta alla domanda 1) è in generale no.

ESEMPIO 2.23. La funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

è derivabile infinite volte in  $(-\infty, 1)$  e inoltre  $f^{(k)}(0) = k!$  per ogni  $k$ . La serie di Mac Laurin di  $f(x)$  è la serie geometrica di ragione  $x$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k,$$

quindi convergente per  $|x| < 1$  e lì  $f(x)$  coincide con la somma della sua serie di Mac Laurin. Questo fornisce un esempio in cui l'intervallo di convergenza è più piccolo di quello dove la funzione risulta derivabile infinite volte.

Possiamo quindi riformulare la domanda 1) chiedendo che

1') se  $f$  è derivabile infinite volte in un intervallo  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , la serie definita dalla formula (2.3) è convergente per ogni  $x$  in  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ?

Anche la risposta a questa domanda è no.

ESEMPIO 2.24. Si veda l'esempio 3)

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

In questo caso,  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  è una funzione regolare su  $\mathbb{R}$ , ma il raggio di convergenza della serie di Mac Laurin è 1.

Può quindi capitare che il raggio di convergenza non sia il più grande possibile. Ma anche se fosse giusto il raggio di convergenza, la somma potrebbe non essere la funzione  $f$ , ovvero anche per la domanda 2) non ci sono buone notizie:

ESEMPIO 2.25. La funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

è derivabile infinite volte in  $\mathbb{R}$  e inoltre  $f^{(k)}(0) = 0$  per ogni  $k$ . La serie di Mac Laurin di  $f(x)$  è nulla, quindi convergente. Tuttavia  $f(x)$  non coincide con la somma della sua serie di Mac Laurin a meno che  $x = 0$ .

Tuttavia se la funzione  $f$  ha derivate che non crescono troppo rapidamente, allora la sviluppabilità è garantita.

**TEOREMA 2.26** (Sviluppabilità in serie di Taylor). *Se la funzione  $f(x)$  è derivabile infinite volte in un intervallo  $(a, b)$  e se esistono due numeri reali  $L, M$  tali che*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M L^n \quad \forall x \in (a, b), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

*allora per ogni  $x_0 \in (a, b)$  la funzione  $f(x)$  è sviluppabile in serie di Taylor centrata in  $x_0$  nell'intervallo  $(a, b)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Basta ricordare la formula di Taylor con resto di Lagrange (2.2) e far vedere che il resto di Lagrange tende a 0 per  $n \rightarrow +\infty$ .  $\square$

Da questo Teorema ricaviamo che sono sviluppabili in serie di Mac Laurin anche le funzioni  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  in ogni intervallo che contiene l'origine.

**ESEMPIO 2.27.** Sia  $f(x) = e^x$ . Si ha  $f^{(k)}(x) = e^x$  e quindi la serie esponenziale è

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Questa ha raggio di convergenza infinito (come già visto nell'esempio 1.27). Inoltre

$$|f^{(k)}(x)| = e^x \leq e^A \quad \forall x \in [-A, A]$$

quindi per il Teorema 2.26 con  $L = 1$  e  $M = e^A$  si ha che la somma di tale serie nell'intervallo  $[-A, A]$  è  $e^x$ . Per l'arbitrarietà di  $A > 0$  si ha

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**ESEMPIO 2.28.** Sia  $f(x) = \sin x$ . Si ha  $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x$  e  $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x$  e quindi lo sviluppo in serie è

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Questa serie ha raggio di convergenza infinito e inoltre

$$|f^{(k)}(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

quindi per il Teorema 2.26 con  $L = M = 1$  si ha che la somma di tale serie su  $\mathbb{R}$  è  $\sin x$ , ovvero

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Con considerazioni analoghe,

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ricordiamo che la somma di una serie di potenze è sviluppabile in serie di Taylor con stesso centro in tutto l'intervallo di convergenza della serie. Quindi altri esempi di funzioni sviluppabili sono quelli della precedente sezione.

Inoltre se  $f$  è sviluppabile, allora  $g$  definita da  $g(x) = f(\alpha x^k)$  è ancora sviluppabile e la serie di Taylor di  $g$  si ottiene da quella di  $f$  sostituendo  $x$  con  $\alpha x^k$ . Con la stessa sostituzione si tratta l'intervallo di sviluppabilità.

Infine lo sviluppo di una derivata o di una primitiva di  $f$  si ottengono derivando e integrando lo sviluppo di  $f$ .

Un'ulteriore applicazione degli sviluppi è nel calcolo approssimato degli integrali.

**ESEMPIO 2.29.** Approssimare  $\int_0^1 e^{-t^2} dt$  a meno di  $10^{-6}$ . Nella serie esponenziale, che ha raggio di convergenza infinito, poniamo  $x = -t^2$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-t^2} dt &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-t^2)^n}{n!} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)n!} \simeq \sum_{n=0}^8 (-1)^n \frac{1}{(2n+1)n!} = 0.74682 \end{aligned}$$

Abbiamo considerato solo 9 termini, perché la somma della serie, che è di Leibniz, è approssimata dalla ridotta a meno del primo termine non considerato, quindi il valore esatto dell'integrale si approssima con  $\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)n!}$  a meno di

$$\frac{1}{(2N+1)N!} < 10^{-6} \quad \text{per } N = 9.$$

#### 4. Esercizi

1) Studiare la convergenza puntuale di

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (\log x)^n; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2^n x)}{6^n}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{2+nx}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n \left( \frac{e^x - 1}{x} \right)^n$$

2) Sia

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^2 e^{-n^3 x^3}$$

Determinare il dominio di  $f$  e verificare che  $f$  è continua in  $[0, +\infty)$ . Dire se  $f$  è derivabile nell'intervallo  $[2, 5]$ .

3) Sia  $f$  la funzione definita da

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n}.$$

Determinare il dominio di  $f$ . Dire se  $f$  è continua e derivabile nel suo dominio.

4) Determinare il raggio di convergenza e l'intervallo di convergenza delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^n} (x-2)^n; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n+1} x^n; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (x+1)^n; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} (2x-1)^n.$$

5) Calcolare la somma di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{1}{n! 2^n}; \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \frac{1}{3^n}; \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1) 2^n}; \quad \sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n 2^{2n}}.$$

6) Sviluppare in serie di Taylor centrata nell'origine, specificando l'intervallo di convergenza,

$$\log(1 + (2x)^2); \quad \sqrt{1+x}; \quad x \cos x; \quad \frac{1}{3+x^2}; \quad \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$



## CAPITOLO 3

### Calcolo differenziale per funzioni di più variabili reali

Scopo di questo capitolo è studiare le principali caratteristiche dei grafici di funzioni di più variabili, con particolare attenzione allo studio dei massimi e minimi.

Una funzione  $f$  dall'insieme  $A$  all'insieme  $B$  (brevemente:  $f : A \rightarrow B$ ) è una legge che ad ogni elemento di  $A$  fa corrispondere al più un elemento di  $B$ . L'insieme  $A$  è detto dominio di  $f$  e  $B$  codominio di  $f$ . Il grafico della funzione è il sottoinsieme di  $A \times B$  dato da

$$\{(a, b) \in A \times B : a \in \text{dom } f \text{ e } f(a) = b\}$$

L'immagine di  $f$  è il sottoinsieme di  $B$  formato dagli elementi “raggiunti” da  $A$  tramite  $f$ . In formule

$$\text{Im } f = \{b \in B : \exists a \in A \text{ tale che } f(a) = b\}.$$

Tratteremo funzioni definite su (sottoinsiemi di)  $\mathbb{R}^n$  a valori in  $\mathbb{R}^m$ . Nel caso in cui  $m = 1$ , si parla di funzioni reali di  $n$  variabili reali. Nel caso in cui  $m > 1$ , si parla di funzioni a valori vettoriali. Il grafico di queste funzioni è dunque un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ; siccome possiamo visualizzare oggetti al più tridimensionali, oltre al caso di funzioni reali di una variabile reale (quelle di Analisi I), potremo disegnare grafici di funzioni reali di due variabili oppure di funzioni a valori in  $\mathbb{R}^2$  di una variabile.

È consuetudine, nel caso di funzioni di una o più variabili reali, non specificare il sottoinsieme  $A$  su cui è definita la funzione, ma indicare solo il numero di variabili in gioco (diciamo  $n$ ) e la legge (da cui si desume il numero di variabili per il codominio, diciamo  $m$ ). In tal caso, si intende che il codominio è  $\mathbb{R}^m$  e che il dominio di  $f$  sia il più grande sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}^n$  su cui la legge ha senso, ovvero  $A$  è il sottoinsieme degli elementi a cui è assegnato un elemento di  $\mathbb{R}^m$ .

Solitamente disegneremo i grafici di funzioni reali di due variabili, usando i pacchetti di Maple o di MatLab.

Usiamo la seguente notazione: indichiamo con  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  il punto di  $\mathbb{R}^n$  di coordinate  $(x_1, \dots, x_n)$ . È facile calcolare la distanza tra due punti  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  e  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  utilizzando più volte il teorema di Pitagora:

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}.$$

In particolare, la distanza di  $\mathbf{x}$  dall'origine  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$  è  $\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ ; talvolta si chiama norma di  $\mathbf{x}$  e si indica con  $\|\mathbf{x}\|$ .

Indicheremo solitamente un punto di  $\mathbb{R}^2$  con la coppia di coordinate  $(x, y)$ , anziché  $(x_1, x_2)$  e un punto di  $\mathbb{R}^3$  con la terna di coordinate  $(x, y, z)$ , anziché  $(x_1, x_2, x_3)$ .

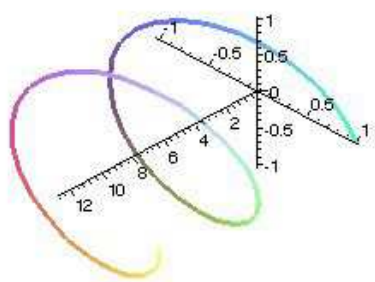
Se  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  sono due punti di  $\mathbb{R}^n$ , allora  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  indica la somma dei due vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , ossia  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ . Se  $\alpha$  è un numero reale,  $\alpha\mathbf{x}$  indica la moltiplicazione dello scalare  $\alpha$  per il vettore  $\mathbf{x}$ , quindi  $\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$ .

Facilmente possiamo controllare le seguenti proprietà:

$$\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\| \quad \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

ESEMPIO 3.1. Si disegni il grafico della funzione  $f : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  data dalla formula

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \forall t \in [0, 4\pi].$$

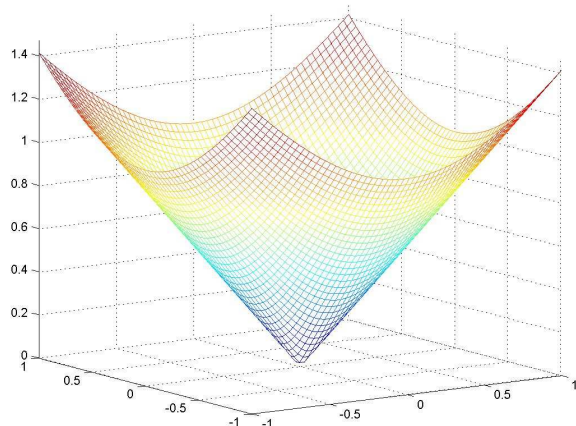


Si tratta di una funzione a valori vettoriali. Nell'immagine ci sono tutti i vettori di modulo 1, per le note proprietà di seno e coseno. Il grafico è un'elica che si avvolge due volte attorno all'asse delle  $t$ .

ESEMPIO 3.2. Si determinino grafico e immagine della funzione distanza in  $\mathbb{R}^2$ , ovvero della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$





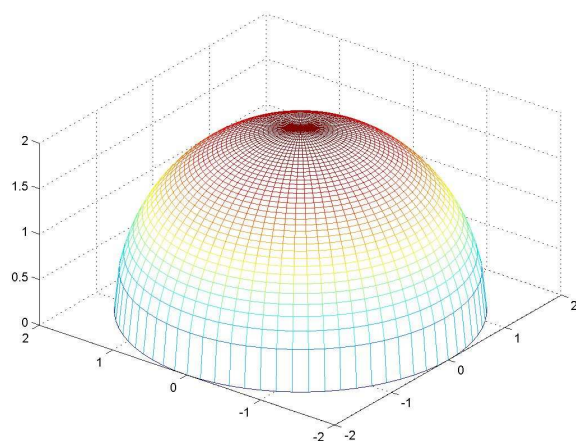
Essa ha dominio  $\mathbb{R}^2$  e assume tutti i valori reali non negativi. Inoltre è costante sulle circonferenze centrate nell'origine e  $f(x, 0) = |x|$ . Pertanto il suo grafico è il cono disegnato in figura.

Un metodo semplice per rendersi conto di come può essere fatto il grafico di una funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  è quello di studiare le cosiddette linee di livello, ovvero i sottoinsiemi del piano del tipo

$$\{(x, y) \in \text{dom } f : f(x, y) = k\}$$

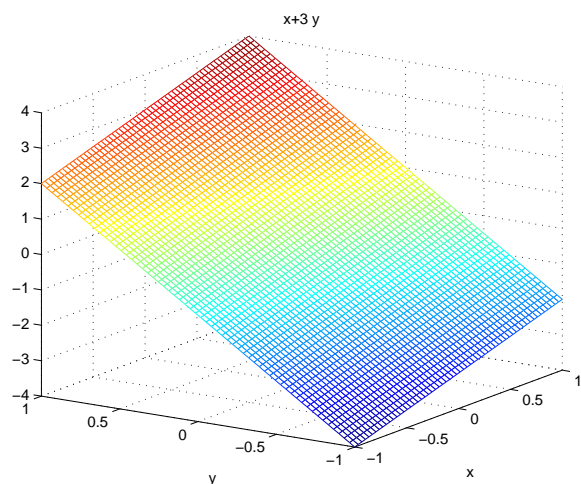
al variare di  $k$  in  $\mathbb{R}$ .

ESEMPIO 3.3. Determinare grafico e immagine della funzione  $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ .



Essa ha dominio  $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}$  e assume tutti i valori in  $[0, 2]$ . Infatti se  $k \in \mathbb{R}$  è tale che  $k = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ , allora  $k$  deve essere maggiore o uguale a 0. Quadrando otteniamo  $x^2 + y^2 = 4 - k^2$ , quindi  $k \leq 2$  e inoltre la curva di livello  $k$  è una circonferenza centrata nell'origine. Il grafico di  $f$  è la mezza sfera disegnata in figura.

ESEMPIO 3.4. Determinare grafico e immagine della funzione  $f(x, y) = 3x + y$ .



Essa ha dominio  $\mathbb{R}^2$  e assume tutti i valori in  $\mathbb{R}$ . Inoltre per  $k \in \mathbb{R}$  la curva di livello  $k$  è una retta di coefficiente angolare  $-3$ . Il grafico di  $f$  è il piano inclinato disegnato in figura.

In generale, una funzione che dipende solo dalla distanza dall'origine ha per linee di livello le circonferenze centrate nell'origine. Una funzione lineare ha per linee di livello rette parallele.

Supponiamo di voler ottenere il grafico dell'esempio 3.2 con Maple. Usiamo il comando

```
plot3d(sqrt(x^2 + y^2), x=-1..1, y=-1..1);
```

Selezionando il grafico è possibile ruotarlo, cambiarne i colori, ecc. Possiamo anche memorizzare la funzione  $f$  e poi disegnarne il grafico scrivendo

```
f:=(x,y)->sqrt(x^2+y^2);
plot3d(f,-1..1,-1..1);
```

Per disegnare le linee di livello, occorre caricare il pacchetto `plots` (si fa una volta sola nel file) e poi usare il comando `contourplot`:

```
with(plots);
f:=(x,y)->sqrt(x^2+y^2);
contourplot(f,-1..1,-1..1);
```

I grafici di queste pagine sono stati ottenuti con `MatLab`. Ci sono diversi comandi, ma i principali sono `surf` (disegna la superficie), `mesh` (disegna la griglia) e `contour` (disegna le linee di livello) e le versioni “easy” `ezsurf`, `ezmesh` e `ezcontour`. Le versioni “easy” possono

essere usate anche direttamente nella command window; il grafico del cono è stato ottenuto con il comando `ezmesh(' (x^2 + y^2)^(1/2)', [-1, 1, -1, 1])`.

**ESEMPIO 3.5.** Un esempio di funzione di  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}^n$  è legato alla forma parametrica della retta.

Tutti sappiamo che è unica la retta passante per due punti distinti  $P$  e  $Q$ ; il vettore  $\mathbf{v} = (Q - P)$  individua la direzione della retta; inizialmente supponiamo che  $P$  sia l'origine.

La retta in  $\mathbb{R}^n$  passante per l'origine e con vettore direzionale  $\mathbf{v}$  in  $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  è costituita da tutti e soli i punti  $\mathbf{x}$  di  $\mathbb{R}^n$  allineati con  $\mathbf{v}$ . Pertanto  $\mathbf{x}$  è sulla retta se e solo se  $\mathbf{x}$  è un multiplo di  $\mathbf{v}$ , in formule: se e solo se esiste  $t \in \mathbb{R}$  tale che  $\mathbf{x} = t\mathbf{v}$ .

La retta passante per il generico punto  $\mathbf{x}_0$  e con vettore direzionale  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  si ottiene trasladando quella passante per l'origine, quindi  $\mathbf{x}$  è su questa retta se e solo se esiste  $t \in \mathbb{R}$  tale che  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$ . Questa è la forma parametrica della retta.

Il grafico della funzione  $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  definita da  $\mathbf{f}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$  è quindi quello della retta in  $\mathbb{R}^{n+1}$  passante per il punto  $(0, \mathbf{x}_0)$  di  $\mathbb{R}^{n+1}$  e con vettore direzionale  $(1, \mathbf{v})$ .

Viceversa, ogni retta di  $\mathbb{R}^{n+1}$  con vettore direzionale  $\mathbf{w}$  con  $w_1 \neq 0$  si può pensare come grafico di una opportuna funzione.

Infatti, a meno di dividere ciascuna componente per  $w_1$ , possiamo supporre che  $\mathbf{w} = (1, w_2, \dots, w_{n+1}) = (1, \mathbf{w}')$  con  $\mathbf{w}'$  in  $\mathbb{R}^n$ . Inoltre passerà per un punto  $\mathbf{y}_0$  di  $\mathbb{R}^{n+1}$  e quindi sarà costituita dai punti  $\mathbf{x}$  di  $\mathbb{R}^{n+1}$  per cui  $\mathbf{x} = \mathbf{y}_0 + t\mathbf{w}$  con  $t$  reale.

In particolare la retta passa per un punto con prima coordinata nulla:  $x_1 = y_{01} + t = 0$  ha soluzione  $t = -y_{01}$ . Quindi la retta passa per il punto  $\mathbf{y}_0 - y_{01}\mathbf{w}$  che è del tipo  $(0, \mathbf{z}_0)$  con  $\mathbf{z}_0$  in  $\mathbb{R}^n$  e ha vettore direzionale  $(1, \mathbf{w}')$ . In forma parametrica  $x_1 = 0 + t \cdot 1 = t$ ,  $x_j = z_{0j} + tw'_j$ , ovvero la retta è il grafico della funzione  $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  definita da  $\mathbf{f}(t) = \mathbf{z}_0 + t\mathbf{w}'$ .

## 1. Limiti e continuità

Il concetto di limite per funzioni di più variabili è simile a quello per funzioni di una variabile.

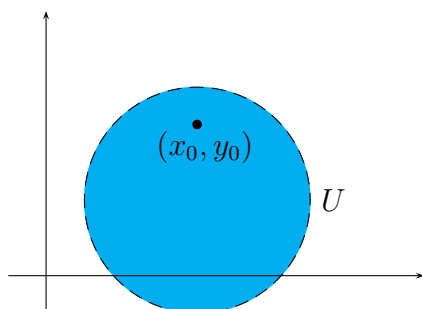
**1.1. Intorni e punti di accumulazione.** Iniziamo da alcune considerazioni sui sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$ .

**DEFINIZIONE 3.1.** Sia  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ . Un sottoinsieme  $U$  di  $\mathbb{R}^n$  della forma

$$(3.1) \quad U = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| = \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r\} \quad \text{dove } r > 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

si dice intorno aperto del punto  $\mathbf{x}_0$  se esso contiene  $\mathbf{x}_0$ .

Nel caso  $n = 1$ , gli intorni aperti di  $x_0$  sono gli intervalli aperti che contengono  $x_0$ .



Nel caso  $n = 2$ , gli intorni aperti di  $(x_0, y_0)$  sono i dischi aperti (cioè senza il bordo) che contengono  $(x_0, y_0)$  all'interno.

In generale, chiamiamo disco aperto di centro  $\mathbf{x}$  e raggio  $r$  un insieme della forma (3.1).

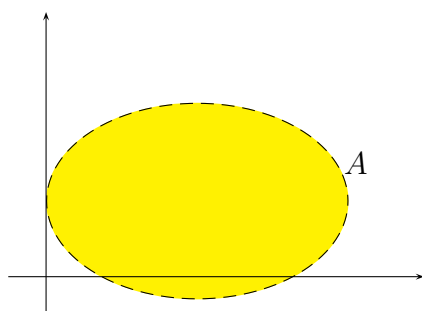
**DEFINIZIONE 3.2.** Un insieme  $V$  è un intorno di  $\infty$  se è della forma

$$V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| > R\} \quad \text{con } R > 0.$$

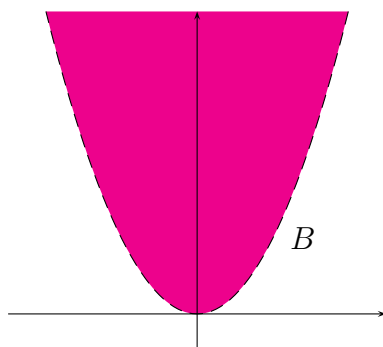
Nel caso  $n = 2$ , gli intorni di infinito sono i complementari dei dischi chiusi (ovvero considerati con il loro bordo) centrati nell'origine.

**DEFINIZIONE 3.3.** Sia  $A$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ . Un punto  $\mathbf{x}$  di  $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  si dice punto di accumulazione per  $A$  se ogni suo intorno interseca  $A$  in punti distinti da  $\mathbf{x}$  stesso.

Come nel caso di funzioni di una variabile, i punti di accumulazione del dominio di una funzione sono quelli in cui possiamo calcolare i limiti.



Sia  $A$  l'interno dell'ellisse, come disegnato in figura. I punti di accumulazione di  $A$  sono i punti interni e dell'ellisse.



Sia  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y\}$ .

I punti di accumulazione di  $B$  sono  $\infty$  e

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y\}.$$

**1.2. Definizione di limite.** La definizione di limite è la stessa vista lo scorso anno, in termini dei “nuovi” intorni.

DEFINIZIONE 3.4. Sia  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e sia  $\mathbf{x}_0$  un punto di accumulazione per il dominio di  $\mathbf{f}$ . Dato  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$  si dice che

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$$

se per ogni intorno  $V$  di  $\mathbf{L}$  esiste un intorno  $U$  di  $\mathbf{x}_0$  tale che per ogni  $\mathbf{x}$  in  $U \cap \text{dom } \mathbf{f}$  tranne al più  $\mathbf{x}_0$  si ha che  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in V$ .

Non è difficile verificare che se  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$  e  $\mathbf{L} = (\ell_1, \dots, \ell_m) \in \mathbb{R}^m$ , allora si ha

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L} \quad \text{se e solo se} \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f_k(\mathbf{x}) = \ell_k \quad \forall k = 1, \dots, m.$$

In particolare, nel caso di  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ , allora si ha  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$  se e solo se  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \text{Re}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \text{Re}(\mathbf{L})$  e  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \text{Im}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \text{Im}(\mathbf{L})$ .

Inoltre  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \infty$  se e solo se  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| = \infty$ . Sembra una complicazione, ma notiamo che la funzione  $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|$  è a valori scalari.

Per queste ragioni, nel seguito, tranne quando diversamente specificato, ci limitiamo a considerare il caso  $m = 1$ .

Inoltre, sempre nel caso  $m = 1$ , possiamo dare senso alla definizione di limite anche se  $\ell = \pm\infty$ .

**1.3. Calcolo di limiti.** Valgono le principali proprietà dei limiti viste per funzioni di una variabile: unicità del limite, permanenza del segno, regole di calcolo dei limiti. Vorrei ricordare una regola di limite per funzioni composte: se  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua in  $\ell$  e  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \ell$ , allora  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(f(\mathbf{x})) = g(\ell)$ . Vediamo ora alcuni esempi.

ESEMPIO 3.6. È banale verificare che  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} 1 = 1$ . Proviamo che, nel caso  $(x_0, y_0)$  sia in  $\mathbb{R}^2$ , vale  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x = x_0$ .

Fissato un intorno di  $x_0$  del tipo  $V = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  si ha  $x \in V$  (cioè  $|x - x_0| < \varepsilon$ ) per ogni  $(x, y)$  nell'intorno  $U = \left\{ (x, y) : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon \right\}$ . Infatti se  $(x, y)$  è in  $U$ , allora  $-\varepsilon < |x - x_0| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon$ , cioè  $x \in V$ .

Analogamente  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} y = y_0$ .

Dalle regole per il calcolo dei limiti, nel caso  $(x_0, y_0)$  sia in  $\mathbb{R}^2$ , segue che  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} P(x, y) = P(x_0, y_0)$  per ogni polinomio  $P$ .

ESEMPIO 3.7. Calcolare  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ . Si ricordi che la funzione

$$g(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

è continua. Per le regole di limite del prodotto e della somma,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 + y^2 = 0.$$

Per la regola di limite di funzioni composte appena ricordata, con  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , si ha

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(f(x, y)) = g(0) = 1.$$

Nel caso di funzioni di una variabile abbiamo introdotto la nozione di limite sinistro e limite destro. Quando  $n > 1$  ci si può avvicinare al punto  $\mathbf{x}_0$  in un'infinità di modi e, se il limite esiste, in ognuno di questi modi dobbiamo ottenere sempre lo stesso valore limite.

Illustriamo più diffusamente la situazione nel caso  $n = 2$ . Supponiamo che  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_0, y_0)$  sia un punto di accumulazione per il dominio di  $f$  e  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \ell$ . Ci possiamo avvicinare al punto  $(x_0, y_0)$  lungo una qualsiasi curva che giaccia nel dominio di  $f$ . Se valutiamo il limite della funzione lungo una qualsiasi di queste curve, abbiamo da valutare il limite di una funzione di una sola variabile (che dovremmo saper fare). Ebbene: questo limite deve essere uguale a  $\ell$ .

Più formalmente, utilizzando il limite della funzione composta nella forma di questa nota <sup>1</sup> si dimostra che

**PROPOSIZIONE 3.8 (Limite lungo una curva).** *Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $\mathbf{x}_0$  un punto di accumulazione per il dominio di  $f$ . Se (per  $\ell$  in  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ )*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \ell$$

*allora per ogni  $\mathbf{g} : (0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{g}(t) = \mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{g}(0, \varepsilon) \subset \text{dom } f \setminus \{\mathbf{x}_0\}$  si ha*

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{g}(t)) = \ell.$$

Questa proprietà è soprattutto utile quando vogliamo dimostrare che un limite assegnato non esiste, come nell'esempio seguente. Inoltre ci permette di stabilire quanto possa valere un determinato limite.

ESEMPIO 3.9. Studiare  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  dove  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ .

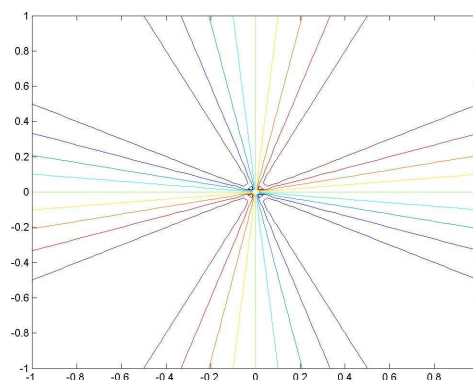
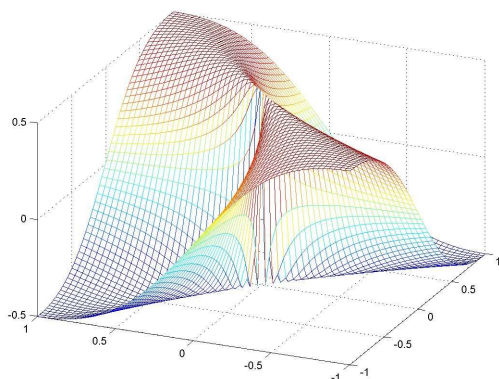
<sup>1</sup> Siano  $\mathbf{g} : (0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni tali che l'immagine  $\mathbf{g}(0, \varepsilon)$  sia contenuta nel dominio di  $f$  e  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{g}(t) = \mathbf{x}_0$  con  $\mathbf{g}(t) \neq \mathbf{x}_0$  per ogni  $t$ . Inoltre sia  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \ell$ , allora  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(\mathbf{g}(t)) = \ell$ .

Innanzitutto, il dominio di  $f$  è  $\mathbb{R}^2$  privato di  $(0, 0)$ , quindi l'origine è punto di accumulazione per il dominio di  $f$ .

Siccome la funzione sull'asse  $x$  (ossia in punti del dominio con  $y = 0$ ) è nulla, possiamo iniziare pensando che se ci avviciniamo all'origine mantenendoci sull'asse  $x$  i valori della funzione sono prossimi a zero. In particolare, se il limite esiste, allora è 0.

Avviciniamoci all'origine lungo un'altra retta, ad esempio la retta  $y = x$ . Lungo questa retta abbiamo  $f(x, y) = f(x, x) = \frac{1}{2}$ , quindi se ci avviciniamo all'origine mantenendoci sulla retta  $y = x$  ci sembra di dover star vicini al valore  $\frac{1}{2}$ .

Siccome non si può contemporaneamente star vicini a 0 e a  $\frac{1}{2}$ , ne dobbiamo concludere che il limite non esiste.



Nella figura di destra vediamo le linee di livello della funzione, che formano un fascio di rette per l'origine.

Per chiarire l'enunciato della proposizione, in questo esempio abbiamo scelto le funzioni  $\mathbf{g}_1$  e  $\mathbf{g}_2$  definite da

$$\mathbf{g}_1(t) = (t, 0) \quad \mathbf{g}_2(t) = (t, t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e abbiamo notato che, anche se  $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{g}_j(t) = (0, 0)$  per ogni  $j = 1, 2$ , si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{g}_1(t)) = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{g}_2(t)).$$

Si potrebbe pensare che se esiste il limite su ogni retta e questi limiti sono uguali, allora esiste il limite della funzione, perché in questo modo esauriamo tutte le possibili direzioni con cui avvicinarsi al punto. Questo è assolutamente FALSO!!! Guardate cosa succede nel prossimo esempio. Ci sono infiniti modi di avvicinarsi a un punto dato, non esistono solo le rette.

**ESEMPIO 3.10.** Studiare  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  dove  $f(x, y) = x^2 y / (x^4 + y^2)$ .

Innanzitutto, il dominio di  $f$  è  $\mathbb{R}^2$  privato di  $(0, 0)$ , quindi l'origine è punto di accumulazione per il dominio di  $f$ .

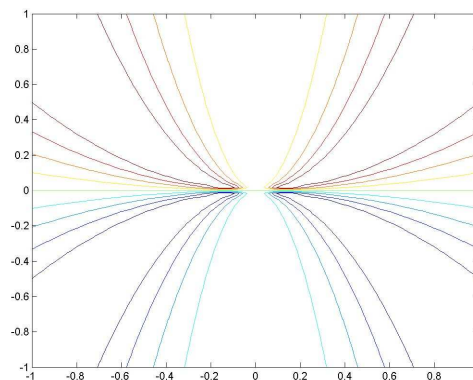
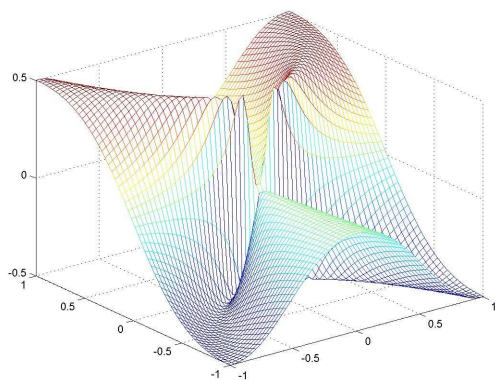
Siccome la funzione sull'asse  $x$  (ossia in punti del dominio con  $y = 0$ ) è nulla, possiamo iniziare pensando che se ci avviciniamo all'origine mantenendoci sull'asse  $x$  i valori della funzione sono prossimi a zero. In particolare, se il limite esiste, allora è 0.

Avviciniamoci all'origine lungo un'altra curva, ad esempio la parabola  $y = x^2$ . Lungo questa curva abbiamo  $f(x, y) = f(x, x^2) = \frac{1}{2}$ , quindi se ci avviciniamo all'origine mantenendoci sulla parabola  $y = x^2$  ci sembra di dover star vicini al valore  $\frac{1}{2}$ . Formalmente, se  $\mathbf{g}_1(t) = (t, 0)$  e  $\mathbf{g}_2(t) = (t, t^2)$ , allora  $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{g}_j(t) = (0, 0)$  per  $j = 1, 2$ , ma

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{g}_1(t)) = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{g}_2(t)).$$

Come prima, concludiamo che il limite non esiste.

Notare però che per ogni  $\theta \in \mathbb{R}$  si ha  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \theta, t \sin \theta) = 0$ , ovvero il limite valutato lungo qualsiasi retta per l'origine  $t \mapsto (t \cos \theta, t \sin \theta)$  è 0.



Nella figura di destra vediamo le curve di livello della funzione, che sono parabole del tipo  $y = ax^2$  con  $a \in \mathbb{R}$ .

Abbiamo detto che la Proposizione 3.8 è anche utile perché ci permette di stabilire quanto possa valere un determinato limite: supponiamo ad esempio che  $\mathbf{x}_0$  sia in  $\mathbb{R}^n$  e che  $f$  sia definita in un intorno bucato di  $\mathbf{x}_0$  (ovvero in un intorno di  $\mathbf{x}_0$  tranne al più proprio  $\mathbf{x}_0$ ). Allora possiamo restringere  $f$  a una retta per  $\mathbf{x}_0$ . Se lungo tale retta il limite risulta essere  $\ell$ , allora il limite da calcolarsi, se esistente, deve valere  $\ell$ . È il contenuto del seguente



COROLLARIO 3.11. Sia  $\mathbf{x}_0$  in  $\mathbb{R}^n$  e esista  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ . Se, per un certo vettore  $\mathbf{u}$  in  $\mathbb{R}^n$  di lunghezza 1, i punti del tipo  $\mathbf{x}_0 + r\mathbf{u}$  sono nel dominio di  $f$  per  $r \rightarrow 0^+$  e

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(\mathbf{x}_0 + r\mathbf{u}) = \ell$$

allora

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \ell.$$

Nel caso di  $\mathbb{R}^2$ , un vettore  $\mathbf{u}$  di lunghezza 1 è della forma

$$\mathbf{u} = (\cos \theta, \sin \theta) \quad \text{per un certo } \theta.$$

Possiamo capire quale è il candidato valore del limite calcolando a  $\theta$  fissato

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta).$$

Come più volte detto, se il risultato dipende da  $\theta$ , possiamo subito dire che il limite non esiste. Se il risultato non dipende da  $\theta$ , il limite potrebbe esistere. La domanda ora è: come stabilire se esiste?

Per poter stabilire l'esistenza di un limite, quando non funzionano le regole di calcolo già note, cerchiamo di valutare il limite “uniformemente rispetto alla direzione”. Il trucco consiste nello stimare la funzione (di cui si desidera calcolare il limite) con un'altra funzione più semplice perché radiale. Di funzioni radiali si sa calcolare il limite utilizzando il teorema per le funzioni composte. Per concludere si utilizza il criterio del confronto.

TEOREMA 3.12. Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e supponiamo che un disco bucato di centro  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  e raggio positivo sia contenuto nel dominio di  $f$  (quindi  $\mathbf{x}_0$  è un punto di accumulazione per il dominio di  $f$ ). Se  $\ell \in \mathbb{R}$  è tale che

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left( \sup_{\|\mathbf{u}\|=1} |f(\mathbf{x}_0 + r\mathbf{u}) - \ell| \right) = 0$$

allora

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \ell.$$

ESEMPIO 3.13. Calcolare, se esiste,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ , dove  $f(x,y) = \frac{x^2(y+1)+y^2}{x^2+y^2}$ .

Per iniziare, valutiamo a  $\theta$  fissato in  $[0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^2 \cos^2 \theta (r \sin \theta + 1) + r^2 \sin^2 \theta}{r^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} r \cos^2 \theta \sin \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} r \cos^2 \theta \sin \theta + 1 = 1. \end{aligned}$$

IL valore limite così ottenuto non dipende dalla direzione  $\theta$ . Valutiamo quindi la quantità  $|f(x, y) - 1|$ , usando coordinate polari. Il nostro scopo è quello di maggiorare questa quantità con una funzione che dipenda solo dalla distanza dal punto  $(0, 0)$ , dove stiamo calcolando il limite, e, al tendere a 0 di questa distanza risulti infinitesima. Per il teorema del confronto risulterà anche  $|f(x, y) - 1| \rightarrow 0$ . Nel nostro caso abbiamo

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(r \cos \theta, r \sin \theta) - 1| &= \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \left| \frac{r^2 \cos^2 \theta (r \sin \theta + 1) + r^2 \sin^2 \theta}{r^2} - 1 \right| \\ &= \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \left| \frac{r^2 \cos^2 \theta (r \sin \theta + 1) + r^2 \sin^2 \theta - r^2}{r^2} \right| \\ &= \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \left| \frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2} \right| \\ &= \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} r \cos^2 \theta \\ &\leq r \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} 0. \end{aligned}$$

Fra parentesi, notiamo che nell'ultima riga in questo caso vale un'uguaglianza (cioè vale  $\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} r \cos^2 \theta = r$ ), ma per i nostri scopi anche una semplice stima dell'estremo superiore sarebbe stata sufficiente.

Quindi

$$0 \leq \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} |f(x, y) - 1| \leq \lim_{r \rightarrow 0} r = 0$$

e allora  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} |f(x, y) - 1| = 0$ , cioè  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 1$ .

**DIMOSTRAZIONE.** È sufficiente verificare che

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} |f(\mathbf{x}) - \ell| = 0.$$

Poniamo

$$g(r) = \sup_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \\ \|\mathbf{u}\|=1}} |f(\mathbf{x}_0 + r\mathbf{u}) - \ell|.$$

Allora per ipotesi  $\lim_{r \rightarrow 0^+} g(r) = 0$  e per il teorema sul limite della funzione composta (vedi nota) si ha che

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) = 0.$$

Siccome per ogni  $\mathbf{x}$  vale

$$0 \leq |f(\mathbf{x}) - \ell| \leq g(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)$$

la tesi segue dal teorema del confronto dei limiti.  $\square$

Nel caso in cui il candidato valore limite sia  $\pm\infty$ , il criterio va modificato nella maniera seguente.

**TEOREMA 3.14.** *Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e un disco bucato di centro  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  e raggio positivo sia contenuto nel dominio di  $f$  (quindi  $\mathbf{x}_0$  è un punto di accumulazione per il dominio di  $f$ ).*

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left( \inf_{\|\mathbf{u}\|=1} f(\mathbf{x}_0 + r\mathbf{u}) \right) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = +\infty.$$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left( \sup_{\|\mathbf{u}\|=1} f(\mathbf{x}_0 + r\mathbf{u}) \right) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = -\infty.$$

La verifica è lasciata per esercizio.

Come appena visto nell'esempio, il metodo per calcolare  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ , dove  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , consiste nel:

1. passare in coordinate polari attorno al punto  $(x_0, y_0)$  dove si deve calcolare il limite — ovvero  $x = x_0 + r \cos \theta$  e  $y = y_0 + r \sin \theta$ ;
2. calcolare  $\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ ; qualora tale limite dipenda da  $\theta$  il procedimento si arresta, perché abbiamo stabilito che il limite non esiste in base alla Proposizione 3.8; qualora questo limite non dipenda da  $\theta$  — poniamo valga  $\ell$  — si proceda con il punto 3;
3. nel caso in cui  $\ell$  sia finito, calcolare o stimare uniformemente rispetto a  $\theta$

$$g(r) = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) - \ell|;$$

4. verificare che  $\lim_{r \rightarrow 0^+} g(r) = 0$ . A questo punto concludiamo per il teorema del confronto

$$0 \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} |f(x,y) - \ell| \leq \lim_{r \rightarrow 0^+} g(r) = 0$$

che  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} |f(x,y) - \ell| = 0$ , ovvero che  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$ .

Se invece  $\lim_{r \rightarrow 0^+} g(r) \neq 0$ , può darsi che si sia fatta una stima troppo cruda; si provi a dimostrare la non esistenza del limite assegnato, adoperando restrizioni a curve opportune che non siano rette.

Il metodo va opportunamente modificato come segue nel caso in cui  $\ell = \pm\infty$ : se  $\ell = +\infty$ , allora occorre modificare i punti 3. e 4. in

- 3'. calcolare o stimare dal basso uniformemente rispetto a  $\theta$

$$g(r) = \inf_{\theta \in [0, 2\pi]} f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta);$$

- 4'. verificare che  $\lim_{r \rightarrow 0^+} g(r) = +\infty$ . Allora per il confronto

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) \geq \lim_{r \rightarrow +\infty} g(r) = +\infty.$$

Nel caso in cui  $\lim_{r \rightarrow 0^+} g(r) \neq +\infty$ , si provi a dimostrare la non esistenza del limite assegnato, adoperando restrizioni a curve opportune che non siano rette.

(Analogamente se  $\ell = -\infty$ ).

ESEMPIO 3.15. Calcolare, se esiste,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ , dove  $f(x,y) = \frac{\sin(|x|+2|y|)}{x^2+y^2}$ .

Innanzitutto semplifichiamo la situazione moltiplicando e dividendo per  $|x| + 2|y|$ . Il vantaggio è che

$$\frac{\sin(|x| + 2|y|)}{x^2 + y^2} = \left| \frac{\sin(|x| + 2|y|)}{|x| + 2|y|} \right| \cdot \frac{|x| + 2|y|}{x^2 + y^2}$$

e il primo fattore tende a 1, quindi ci basta occuparci del secondo. Poniamo  $h(x,y) = \frac{|x|+2|y|}{x^2+y^2}$  e passiamo in coordinate polari centrate in  $(0,0)$ . A  $\theta$  fissato

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} h(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{|r \cos \theta| + 2r |\sin \theta|}{r^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{|\cos \theta| + 2|\sin \theta|}{r} = +\infty. \end{aligned}$$

Siccome la funzione  $\theta \mapsto \varphi(\theta) = |\cos \theta| + 2|\sin \theta|$  è continua e  $[0, 2\pi]$  è un intervallo chiuso e limitato, per il Teorema di Weierstrass,  $\varphi$  ha minimo  $m$ ; siccome  $\varphi$  è sempre strettamente positiva, il minimo è strettamente positivo e

$$\begin{aligned} \inf_{\theta \in [0, 2\pi]} h(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \inf_{\theta \in [0, 2\pi]} \frac{|r \cos \theta| + 2r |\sin \theta|}{r^2} \\ &= \inf_{\theta \in [0, 2\pi]} \frac{|\cos \theta| + 2|\sin \theta|}{r} \\ &\geq \frac{m}{r} \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} +\infty. \end{aligned}$$

Quindi il limite è  $+\infty$ . In questo caso non abbiamo determinato precisamente l'estremo inferiore, ma lo abbiamo solamente stimato.

Quando  $\mathbf{x}_0 = \infty$  è sufficiente modificare il metodo visto facendo tendere  $r$  a infinito. Precisamente:

**COROLLARIO 3.16.** *Supponiamo che esista  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} f(\mathbf{x})$ . Se, per un certo vettore  $\mathbf{u}$  in  $\mathbb{R}^n$  di lunghezza 1, i punti del tipo  $r\mathbf{u}$  sono nel dominio di  $f$  per  $r \rightarrow +\infty$  e*

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} f(r\mathbf{u}) = \ell$$

*allora*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = \ell.$$

TEOREMA 3.17. Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e supponiamo che il complementare di un disco centrato nell'origine sia contenuto nel dominio di  $f$  (quindi  $\infty$  è un punto di accumulazione per il dominio di  $f$ ). Se  $\ell \in \mathbb{R}$  è tale che

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left( \sup_{\|\mathbf{u}\|=1} |f(r\mathbf{u}) - \ell| \right) = 0$$

allora

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = \ell.$$

TEOREMA 3.18. Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e supponiamo che il complementare di un disco centrato nell'origine sia contenuto nel dominio di  $f$  (quindi  $\infty$  è un punto di accumulazione per il dominio di  $f$ ).

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left( \inf_{\|\mathbf{u}\|=1} f(r\mathbf{u}) \right) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = +\infty.$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left( \sup_{\|\mathbf{u}\|=1} f(r\mathbf{u}) \right) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = -\infty.$$

In particolare, per  $n = 2$  per calcolare un limite per  $(x, y) \rightarrow \infty$ , si scelgano coordinate polari centrate in  $(0, 0)$  e si faccia tendere  $r$  a  $+\infty$  nei punti 1, 2, 3 (o 3'), 4 (o 4').

ESEMPIO 3.19. Verificare che  $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} x$  non esiste. Infatti in coordinate polari

$$x = r \cos \theta \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & \cos \theta > 0 \\ 0 & \cos \theta = 0 \\ -\infty & \cos \theta < 0 \end{cases}$$

Siccome il limite dipende dalla direzione,  $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} x$  non esiste.

ESEMPIO 3.20. Calcolare, se esiste,  $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} f(x, y)$ , dove  $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ . In coordinate polari centrate in  $(0, 0)$  valutiamo dapprima a  $\theta$  fissato

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} f(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r \cos \theta}{r^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\cos \theta}{r} = 0. \end{aligned}$$

Siccome il limite non dipende dalla direzione e è finito, calcoliamo

$$\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(r \cos \theta, r \sin \theta)| = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \frac{|\cos \theta|}{r} = \frac{1}{r} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0.$$

Quindi il limite è 0.

ESEMPIO 3.21. Calcolare, se esiste,  $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} f(x,y)$ , dove  $f(x,y) = x^2 + y^4$ . In coordinate polari centrate in  $(0,0)$  valutiamo a  $\theta$  fissato

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} f(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \lim_{r \rightarrow +\infty} r^2 \cos^2 \theta + r^4 \sin^4 \theta \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} r^2 (\cos^2 \theta + r^2 \sin^4 \theta) = +\infty. \end{aligned}$$

Siccome il limite non dipende dalla direzione e è  $+\infty$ , calcoliamo

$$\begin{aligned} \inf_{\theta \in [0, 2\pi]} f(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \inf_{\theta \in [0, 2\pi]} r^2 (\cos^2 \theta + r^2 \sin^4 \theta) \\ &= r^2 \inf_{\theta \in [0, 2\pi]} (\cos^2 \theta + r^2 \sin^4 \theta) \\ &\geq r^2 \inf_{\theta \in [0, 2\pi]} (\cos^2 \theta + r^2 \sin^4 \theta) \quad \text{se } r \geq 1 \\ &\geq r^2 \inf_{\theta \in [0, 2\pi]} (\cos^2 \theta + \sin^4 \theta) \\ &\geq m r^2 \end{aligned}$$

dove il minimo  $m > 0$  esiste per il Teorema di Weierstrass. Quindi

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \inf_{\theta \in [0, 2\pi]} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \geq \lim_{r \rightarrow +\infty} m r^2 = +\infty$$

e il limite assegnato vale  $+\infty$ .

## 2. Continuità

DEFINIZIONE 3.5. Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $\mathbf{x}_0$  un punto del dominio di  $f$ . Si dice che  $f$  è continua in  $\mathbf{x}_0$  se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che se  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$  e  $\mathbf{x} \in \text{dom} f$ , allora  $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ .

Questo equivale alla richiesta

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$$

nel caso in cui  $\mathbf{x}_0$  sia un punto di accumulazione per il dominio di  $f$ . Per le regole di calcolo dei limiti, le funzioni polinomiali sono continue.

Per le funzioni continue valgono i seguenti teoremi (analoghi a quelli visti lo scorso anno) sulle generalizzazioni a più variabili degli intervalli e degli intervalli chiusi e limitati.

DEFINIZIONE 3.6. Un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice connesso se comunque scegliamo due punti  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  in  $A$  è possibile congiungere tali punti con una spezzata giacente in  $A$ .

**TEOREMA 3.22** (degli zeri). Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e sia  $A$  un insieme connesso. Inoltre esistano due punti  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  in  $A$  tali che  $f(\mathbf{a}) > 0$  e  $f(\mathbf{b}) < 0$ . Allora esiste uno zero di  $f$ , ovvero esiste  $\mathbf{c}$  in  $A$  tale che  $f(\mathbf{c}) = 0$ .

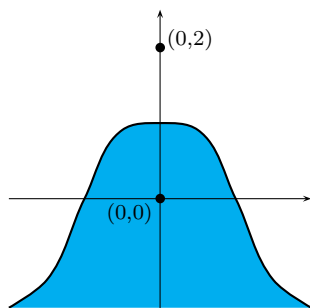
**COROLLARIO 3.23** (valori intermedi). Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e sia  $A$  un insieme connesso. Dati  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  in  $A$ , allora  $f$  assume in  $A$  tutti valori tra  $f(\mathbf{a})$  e  $f(\mathbf{b})$ .

Un importante uso del teorema degli zeri o del suo corollario è nello studio di disequazioni.

**ESEMPIO 3.24.** Determinare e disegnare nel piano il dominio della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3 - 1}.$$

Si ha  $\text{dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^3 - 1 \geq 0\}$ . Dobbiamo quindi indicare i punti  $(x, y)$  di  $\mathbb{R}^2$  per cui  $x^2 + y^3 - 1 \geq 0$ . Occupiamoci dapprima dei punti che soddisfano l'uguaglianza, ovvero  $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$ .

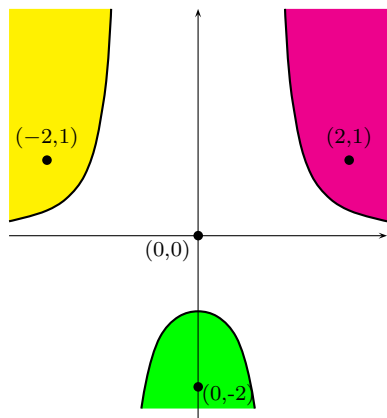


Il piano viene diviso dal grafico di  $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$  in due aperti connessi, quello bianco e quello azzurro. Scegliamo un punto qualsiasi in ognuno di questi aperti connessi. Ad esempio, scegliamo i punti  $(0, 2)$  e  $(0, 0)$ . Siccome la funzione  $g(x, y) = x^2 + y^3 - 1$  è continua e  $g(0, 2) = 7 > 0$  allora si avrà anche  $g(x, y) > 0$  in tutto l'aperto connesso che contiene  $(0, 2)$ , perché altrimenti in questo aperto connesso si dovrebbe trovare un punto  $(x, y)$  per cui  $g(x, y) = 0$ . Analogamente, siccome  $g(0, 0) = -1 < 0$ , allora  $g(x, y) < 0$  su tutto l'aperto connesso che contiene  $(0, 0)$ . Quindi  $\text{dom } f$  risulta la regione evidenziata in bianco in figura, compreso il grafico di  $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$ .

**ESEMPIO 3.25.** Determinare e disegnare nel piano il dominio della funzione

$$f(x, y) = \log(y(x^2 - 1) - 1).$$

Si ha  $\text{dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y(x^2 - 1) - 1 > 0\}$ . Siccome la funzione  $g(x, y) = y(x^2 - 1) - 1$  è continua, utilizziamo il metodo di prima. Iniziamo disegnando i punti  $(x, y)$  di  $\mathbb{R}^2$  per cui  $y(x^2 - 1) - 1 = 0$ , ovvero  $y(x^2 - 1) = 1$ . Ma allora  $x \neq \pm 1$  e  $y = 1/(x^2 - 1)$ .



Il piano viene diviso dal grafico di  $y = 1/(x^2 - 1)$  in quattro aperti connessi. Scegliamo i punti  $(0, 0)$ ,  $(\pm 2, 1)$  e  $(0, -2)$  (uno in ogni regione) e calcoliamo

$$g(0, 0) = -1 \quad g(\pm 2, 1) = 2 \quad g(0, -2) = 1.$$

Siccome  $g$  è continua, dovrà essere  $g(x, y) < 0$  nella regione che contiene  $(0, 0)$  e  $g(x, y) > 0$  in ciascuna delle regioni colorate. Quindi  $\text{dom } f$  risulta l'unione delle regioni colorate in figura, escluso il grafico di  $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$ .

**DEFINIZIONE 3.7.** Un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice aperto se ogni suo punto risulta interno, ovvero se per ogni  $\mathbf{a} \in A$  esiste un intorno aperto  $U$  di  $\mathbf{a}$  tale che  $U \subseteq A$ . Un insieme  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice chiuso se il suo complementare è aperto.

**TEOREMA 3.26** (di Weierstrass). Sia  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme chiuso e limitato e sia  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora  $f$  è limitata e ammette massimo e minimo assoluti, ovvero esistono  $\mathbf{y}_1$  e  $\mathbf{y}_2$  in  $K$  tali che

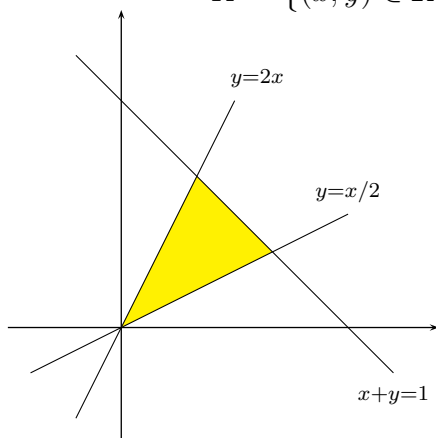
$$\min f = f(\mathbf{y}_1) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y}_2) = \max f \quad \forall \mathbf{x} \in K.$$

**ESEMPIO 3.27.** Dire se la funzione

$$f(x, y) = e^{x^2 - y^2} + \sin x^2 + xy$$

ha massimo e/o minimo assoluto sull'insieme

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1, \quad 2x - y \geq 0, \quad x - 2y \leq 0\}$$



La funzione  $f$  è continua, come composta di funzioni continue.

Con il solito metodo possiamo disegnare l'insieme  $K$  e notare che è il triangolo chiuso colorato in giallo, quindi chiuso e limitato.

Per il Teorema di Weierstrass, la funzione  $f$  ammette massimo e minimo assoluti in  $K$ .

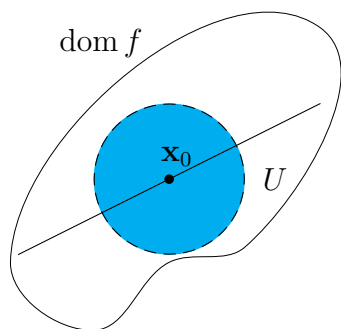
Nella prossima sezione svilupperemo metodi che ci permetteranno di calcolare i valori massimo o minimo assoluti di una funzione.



### 3. Derivabilità e differenziabilità

Iniziamo a affrontare il problema in maniera ingenua, cercando di trasferire le nostre conoscenze di funzioni di una variabile.

**3.1. Derivate direzionali.** Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $\mathbf{x}_0$  un punto interno al dominio di  $f$ , ovvero esista un intorno aperto  $U$  contenuto in  $\text{dom } f$ .



Consideriamo una retta per il punto  $\mathbf{x}_0$ . Allora possiamo restringere la funzione  $f$  a questa retta e ottenere una funzione di una variabile, che sappiamo derivare. In formule, se  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  è un vettore in  $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ , allora la retta per  $\mathbf{x}_0$  e parallela a  $\mathbf{v}$  è descritta in forma parametrica dall'equazione (vettoriale)  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$  al variare di  $t$  in  $\mathbb{R}$ . Per  $t$  sufficientemente piccolo i punti  $\mathbf{x}(t)$  sono nell'intorno aperto  $U$ , quindi sono nel  $\text{dom } f$ . Possiamo chiederci se la funzione di una variabile  $f(\mathbf{x}(t))$  risulta derivabile in  $t = 0$ .

**DEFINIZIONE 3.8.** Si dice che  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile (o derivabile Gateaux) in  $\mathbf{x}_0$  interno al  $\text{dom } f$  secondo il vettore  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  se esiste finito

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}.$$

Qualora questo limite esista finito, lo si chiama derivata di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$  secondo il vettore  $\mathbf{v}$  e si indica con  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)$ .

Tra le derivate direzionali sono importanti quelle secondo i vettori della base canonica di  $\mathbb{R}^n$  (quelli che hanno tutte le componenti nulle, tranne una che è uguale a 1). Una derivata direzionale secondo un vettore della base canonica si chiama derivata parziale. Solitamente se  $\mathbf{e}_j = (0, \dots, \overset{j}{1}, \dots, 0)$ , cioè  $\mathbf{e}_j$  è il vettore della base canonica che ha un 1 al posto  $j$ , allora la derivata parziale  $j$ -esima viene indicata con uno dei simboli  $\partial_j f$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ,  $f_{x_j}$ ,  $f_j$ . Calcolare la derivata parziale  $j$ -esima è molto semplice: basta trattare le altre coordinate come costanti.

Se  $n = 2$  si usano anche i simboli  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\partial_x f$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\partial_y f$  per indicare le derivate parziali di  $f$ .

**ESEMPIO 3.28.** Calcolare le derivate parziali di  $\sin(x^2y)$ . Trattando  $y$  come costante e derivando rispetto a  $x$ , otteniamo  $\frac{\partial}{\partial x} \sin(x^2y) = 2xy \cos(x^2y)$ . Trattando  $x$  come costante e derivando rispetto a  $y$  otteniamo  $\frac{\partial}{\partial y} \sin(x^2y) = x^2y \cos(x^2y)$ .

**ESEMPIO 3.29.** Calcolare le derivate direzionali nell'origine della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Fissiamo un vettore  $(v_1, v_2)$  con  $v_1^2 + v_2^2 \neq 0$ . Allora se  $t \neq 0$  abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{f(0 + tv_1, 0 + tv_2) - f(0, 0)}{t} &= \frac{t^2 v_1^2 t v_2}{t^4 v_1^4 + t^2 v_2^2} \frac{1}{t} \\ &= \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & v_2 = 0 \\ v_1^2/v_2 & v_2 \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Osserviamo che la funzione dell'esempio precedente è derivabile secondo tutte le direzioni nell'origine, tuttavia non è continua in  $(0, 0)$ , perché  $f(x, x^2) = \frac{1}{2}$  per ogni  $x \neq 0$ . Questo esempio ci mostra che una nozione di derivabilità sensata per funzioni di più variabili deve essere più forte (vorremmo che le funzioni derivabili risultino più regolari delle funzioni continue).

L'anno scorso abbiamo visto che la nozione di derivabilità in  $x_0$  è equivalente al fatto di poter approssimare la funzione con un polinomio di grado 1 vicino a  $x_0$  a meno di infinitesimi di ordine superiore. Geometricamente, questo fatto si esprime dicendo che il grafico della funzione vicino a  $x_0$  è "molto vicino" a quello della retta tangente al grafico in  $x_0$ .

L'idea dell'approssimazione tramite la retta tangente, che nel caso di due variabili diventa un piano tangente, è quella che si dimostra vincente nel caso di funzioni di più variabili.

Iniziamo a richiamare alcune nozioni sui grafici di funzioni lineari in  $\mathbb{R}^n$ .

**3.2. Piani in  $\mathbb{R}^3$  – iperpiani in  $\mathbb{R}^{n+1}$ .** Un piano in  $\mathbb{R}^3$  può essere pensato individuato mediante un punto  $P_0$  e un vettore  $V$  dello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3$ . Infatti possiamo dire che un punto  $P$  sta nel piano  $\Pi$  passante per  $P_0$  se il vettore  $P - P_0$  è ortogonale al vettore  $V$ . In formule questo si esprime dicendo che il prodotto scalare tra  $P - P_0$  e  $V$  deve essere nullo:

$$\langle V, P - P_0 \rangle = 0 \quad \forall P \in \Pi.$$

Se  $P_0$  ha coordinate  $(x_0, y_0, z_0)$  e  $V = (v_1, v_2, v_3)$  nella base canonica, allora troviamo l'equazione dei punti  $P = (x, y, z)$  del piano  $\Pi$

$$v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0.$$

Il vettore  $V$  si dice vettore normale al piano  $\Pi$ .

Viceversa, un'equazione lineare in  $x, y, z$  della forma

$$ax + by + cz = d$$

dove  $a, b, c$  non sono tutti nulli, rappresenta l'equazione di un piano con vettore normale  $(a, b, c)$  (passante per  $(0, 0, d/c)$  se  $c \neq 0$ , passante per  $(d/a, 0, 0)$  se  $a \neq 0$ , per  $(0, d/b, 0)$  se  $b \neq 0$ ).

Si noti che se  $c \neq 0$ , allora il piano non è verticale e è il grafico della funzione lineare

$$\ell(x, y) = \frac{d}{c} - \frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y.$$

Un iperpiano in  $\mathbb{R}^{n+1}$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^{n+1}$  formato da tutti quei punti che hanno prodotto scalare costante con un vettore fissato dato, detto anche vettore normale. Pertanto un'equazione lineare della forma

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j x_j = b \quad \text{dove } a_j, b \in \mathbb{R}$$

rappresenta un iperpiano in  $\mathbb{R}^{n+1}$  e precisamente quell'iperpiano che ha prodotto costante ( $= b$ ) con il vettore  $(a_1, \dots, a_{n+1})$ . Quando  $a_{n+1} \neq 0$  il piano non è verticale e possiamo scriverlo nella forma

$$x_{n+1} = b' - \sum_{j=1}^n a'_j x_j \quad \text{dove } a'_j, b' \in \mathbb{R}$$

ovvero come grafico di una funzione lineare.

**3.3. Differenziabilità.** Vogliamo dire che una funzione risulta differenziabile in un punto  $\mathbf{x}_0$  se in quel punto può essere approssimata tramite una funzione lineare a meno di infinitesimi di ordine superiore a uno, in termini geometrici se ha un iperpiano tangente non verticale.

**DEFINIZIONE 3.9.** Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $\mathbf{x}_0$  un punto interno al dominio di  $f$ . Si dice che  $f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  se esistono un vettore  $\mathbf{d}$  in  $\mathbb{R}^n$  e una funzione  $\omega$  definita in un opportuno intorno  $U_0$  di  $\mathbf{0}$  in  $\mathbb{R}^n$  tali che

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \mathbf{d}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \text{ tale che } \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \in U_0$$

e  $\lim_{\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{0}} \omega(\mathbf{t}) = \omega(\mathbf{0}) = 0$ .

Notare che il vettore  $\mathbf{d}$  dipende sia da  $f$  sia da  $\mathbf{x}_0$  e solitamente si chiama gradiente di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$ ; in formule  $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ . Nel prossimo teorema vediamo che la nozione di differenziabilità ora introdotta implica la continuità e è più forte della nozione di derivabilità secondo un vettore.

**TEOREMA 3.30 (del differenziale).** Sia  $f$  differenziabile in un punto  $\mathbf{x}_0$  interno al dominio di  $f$ . Allora

- $f$  è continua in  $\mathbf{x}_0$ ;
- il vettore  $\nabla f(\mathbf{x}_0)$  è  $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0))$ ;
- $f$  è derivabile in  $\mathbf{x}_0$  secondo ogni vettore  $\mathbf{v}$  non nullo e  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle$ .

DIMOSTRAZIONE. Siccome i polinomi sono funzioni continue, il prodotto scalare e il quadrato della norma sono funzioni continue. Inoltre per composizione con la funzione radice, anche la norma è continua. Quindi  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \langle \mathbf{d}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = \langle \mathbf{d}, \mathbf{0} \rangle = 0$  e  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \|\mathbf{0}\| = 0$ . Da cui

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) &= \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}_0) + \langle \mathbf{d}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= f(\mathbf{x}_0), \end{aligned}$$

ovvero  $f$  è continua in  $\mathbf{x}_0$ . Occupiamoci ora di c). Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0) + \langle \mathbf{d}, t\mathbf{v} \rangle + \|t\mathbf{v}\| \omega(t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \langle \mathbf{d}, \mathbf{v} \rangle + \frac{|t|}{t} \|\mathbf{v}\| \omega(t\mathbf{v}) \\ &= \langle \mathbf{d}, \mathbf{v} \rangle, \end{aligned}$$

perché  $\omega$  è continua e infinitesima in  $\mathbf{0}$  e  $\frac{|t|}{t}$  è limitato (vale  $\pm 1$ ). Ma allora  $f$  è derivabile in  $\mathbf{x}_0$  secondo ogni vettore  $\mathbf{v}$  non nullo e  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \langle \mathbf{d}, \mathbf{v} \rangle$ . Da questo ricaviamo anche b), prendendo come vettori  $\mathbf{v}$  i vettori della base canonica: si ha  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_j}(\mathbf{x}_0) = \langle \mathbf{d}, \mathbf{e}_j \rangle = d_j$ , ovvero  $\mathbf{d} = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0))$ .  $\square$

Si noti che l'iperpiano di  $\mathbb{R}^{n+1}$  di equazione

$$x_{n+1} = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle$$

è tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$  e ha vettore normale  $(\nabla f(\mathbf{x}_0), -1)$ .

Da un punto di vista geometrico, l'interpretazione di quanto abbiamo visto è la seguente: se una funzione in un determinato punto possiede un iperpiano tangente, allora la restrizione di questa funzione a ogni retta parallela agli assi  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_j$  dovrà risultare derivabile, come funzione di una variabile in  $t = 0$ . Infatti la retta intersezione tra l'iperpiano tangente e il "cilindro" sopra  $\mathbf{x}(t)$  giace sull'iperpiano tangente, quindi è tangente al grafico di  $f$ . Pertanto la funzione  $f$  dovrà risultare parzialmente derivabile e

$$\partial_j f(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x}_0)}{t}.$$

La retta tangente, nel piano individuato da  $\mathbf{e}_j$  e  $\mathbf{e}_{n+1}$ , sarà del tipo  $x_{n+1} = f(\mathbf{x}_0) + \partial_j f(\mathbf{x}_0) t$ ; vista nello spazio  $\mathbb{R}^{n+1}$  avrà equazione parametrica

$$\begin{cases} x_k = x_{0k} + t\delta_{kj} & k = 1, \dots, n \\ x_{n+1} = f(\mathbf{x}_0) + \partial_j f(\mathbf{x}_0) t \end{cases}$$

quindi ha vettore direzionale  $\mathbf{v}_j = (0, \dots, \overset{j}{1}, \dots, \partial_j f(\mathbf{x}_0))$ . L'iperpiano tangente dovrà contenere tutte queste rette tangenti al variare di  $j = 1, \dots, n$ , quindi il suo vettore normale  $\mathbf{N}$  dovrà essere ortogonale a tutti i  $\mathbf{v}_j$ . Questo vuol dire che

$$\langle \mathbf{N}, \mathbf{v}_j \rangle = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Allora le componenti di  $\mathbf{N} = (N_1, \dots, N_{n+1})$  soddisfano le equazioni

$$0 = \langle \mathbf{N}, \mathbf{v}_j \rangle = N_j + N_{n+1} \partial_j f(\mathbf{x}_0) \quad \forall j = 1, \dots, n,$$

da cui  $N_j = -N_{n+1} \partial_j f(\mathbf{x}_0)$ . Se scegliamo, ad esempio,  $N_{n+1} = -1$ , otteniamo che  $N_j = \partial_j f(\mathbf{x}_0)$  ovvero l'iperpiano tangente deve avere equazione

$$x_{n+1} = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^n \partial_j f(\mathbf{x}_0) (x_j - x_{0j}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle.$$

Per verificare la differenziabilità di  $f$  in un punto fissato, possiamo procedere in questo modo.

**PROPOSIZIONE 3.31.** *Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile parzialmente nel punto  $\mathbf{x}_0$  interno al dominio di  $f$ . Se*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0,$$

*allora  $f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ . Se il limite invece non esiste o è diverso da 0, allora  $f$  non è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Si ponga

$$\mathbf{d} = \nabla f(\mathbf{x}_0) \quad \omega(\mathbf{t}) = \begin{cases} \frac{f(\mathbf{t} + \mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0) - \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{t} \rangle}{\|\mathbf{t}\|} & \mathbf{t} \neq \mathbf{0} \quad \mathbf{t} + \mathbf{x}_0 \in \text{dom } f \\ 0 & \mathbf{t} = \mathbf{0} \end{cases}$$

e si controllino le proprietà della definizione. □

**ESEMPIO 3.32.** Si studi la differenziabilità in  $(0, 0)$  della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Siccome la funzione è nulla sugli assi, allora le derivate parziali in  $(0, 0)$  sono nulle:  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ . La funzione  $f$  è differenziabile in  $(0, 0)$  se risulta essere 0 il

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \omega(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \langle \nabla f(0, 0), (x, y) \rangle}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Valutando il modulo di questa espressione in coordinate polari otteniamo:

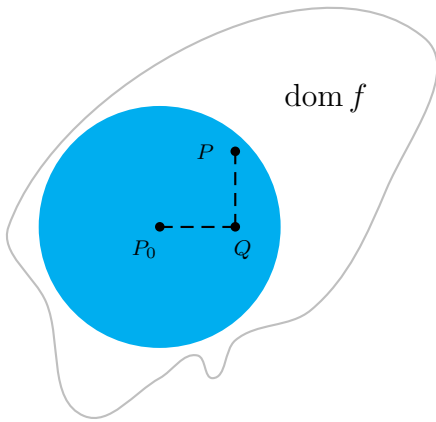
$$\begin{aligned} \left| \frac{x^3 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right| &= \left| \frac{r^4 \cos^3 \theta \sin \theta}{r^3} \right| \\ &\leq r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Pertanto  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \omega(x, y) = 0$  e  $f$  risulta quindi differenziabile in  $(0, 0)$ . Il piano tangente in  $(0, 0)$  al grafico della funzione è  $z = 0$ .

In alcuni casi è molto semplice verificare che una funzione è differenziabile.

**TEOREMA 3.33.** *Sia  $\mathbf{x}_0$  un punto interno al dominio di  $f$  e in un intorno di tale punto esistano e siano continue tutte le derivate parziali di  $f$ . Allora  $f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Diamo un'idea della dimostrazione nel caso  $n = 2$ . Siano, come in figura,  $P_0 = (x_0, y_0)$ ,  $P = (x, y)$ ,  $Q = (x, y_0)$  punti nell'intorno di  $(x_0, y_0)$  dove le derivate parziali sono continue. Dobbiamo verificare che  $f(P) - f(P_0) - \langle \nabla f(P_0), P - P_0 \rangle$  tende a zero con ordine maggiore di  $\|P - P_0\|$ , per  $P \rightarrow P_0$ .



Sia  $Q$  il punto che ha stessa ordinata di  $P$  e stessa ascissa di  $P_0$ , come in figura. Scriviamo

$$f(P) - f(P_0) = f(P) - f(Q) + f(Q) - f(P_0).$$

In questo modo, arriviamo al punto  $P$ , partendo da  $P_0$ , muovendoci dapprima a  $y$  costante e dopo a  $x$  costante. Siccome la funzione  $f$  ha derivate parziali continue in un intorno di  $P_0$ , possiamo applicare il teorema di Lagrange e dire che esistono punti  $\xi$ , compreso tra  $x$  e  $x_0$ , e  $\eta$  compreso tra  $y$  e  $y_0$ , tali che

$$\begin{aligned} f(P) - f(Q) &= \partial_y f(x, \eta)(y - y_0) \\ f(Q) - f(P_0) &= \partial_x f(\xi, y_0)(x - x_0). \end{aligned}$$

Possiamo quindi scrivere  $f(P) - f(P_0) - \langle \nabla f(P_0), P - P_0 \rangle$  come

$$(\partial_x f(\xi, y_0) - \partial_x f(x_0, y_0))(x - x_0) + (\partial_y f(x, \eta) - \partial_y f(x_0, y_0))(y - y_0).$$

Dobbiamo controllare che questo tenda a zero più velocemente di  $\|P - P_0\|$  per  $P \rightarrow P_0$ . D'altra parte

$$\left| \frac{(\partial_x f(\xi, y_0) - \partial_x f(x_0, y_0))(x - x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \right| \leq |\partial_x f(\xi, y_0) - \partial_x f(x_0, y_0)|$$

e, siccome le derivate parziali sono continue nell'intorno di  $P_0$ , questa quantità tende a zero per  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ . Analogamente per il secondo addendo.  $\square$

**ESEMPIO 3.34.** La funzione  $f(x, y) = e^{x^2+y^2} \cos(x+y)$  è differenziabile in  $\mathbb{R}^2$ , perché le sue derivate parziali sono

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) &= e^{x^2+y^2} \cos(x+y) 2x + e^{x^2+y^2} \sin(x+y) \\ \partial_y f(x, y) &= e^{x^2+y^2} \cos(x+y) 2y + e^{x^2+y^2} \sin(x+y) \end{aligned}$$

e sono continue come composte di funzioni continue.

ESEMPIO 3.35. La funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} y e^{-x^2/y^2} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

è differenziabile in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ , perché le sue derivate parziali per  $y \neq 0$  sono

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) &= e^{-x^2/y^2} (-2x/y) \\ \partial_y f(x, y) &= e^{-x^2/y^2} + e^{-x^2/y^2} (2x^2/y^2) \end{aligned}$$

e sono continue in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ . Ci chiediamo se  $f$  è differenziabile in  $(x_0, 0)$  per qualche  $x_0$ . Si ha

$$\begin{aligned} \partial_x f(x_0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, 0) - f(x_0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0 \\ \partial_y f(x_0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, t) - f(x_0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} e^{-x_0^2/t^2} = \begin{cases} 0 & x_0 \neq 0 \\ 1 & x_0 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Per  $x_0 = 0$  dovrebbe essere nullo il

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y e^{-x^2/y^2} - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y (e^{-x^2/y^2} - 1)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Notiamo che restringendosi a  $x = y$  il limite precedente diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x (e^{-1} - 1)}{|x| \sqrt{2}} \quad \text{che non esiste.}$$

Quindi  $f$  non è differenziabile in  $(0, 0)$ .

Per  $x_0 \neq 0$  dobbiamo invece considerare

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} \frac{y e^{-x^2/y^2}}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} h(x, y).$$

Possiamo scrivere  $h$  come prodotto di  $e^{-x^2/y^2}$  che è infinitesima per  $(x, y) \rightarrow (x_0, 0)$  e  $\frac{y}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2}}$  che è limitata, quindi  $h$  è infinitesima per  $(x, y) \rightarrow (x_0, 0)$ . Oppure possiamo seguire il metodo solito delle coordinate polari centrate in  $(x_0, 0)$ :

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{\theta \in (0, 2\pi) \\ \theta \neq \pi}} |h(x_0 + r \cos \theta, r \sin \theta)| &= \sup_{\substack{\theta \in (0, 2\pi) \\ \theta \neq \pi}} \frac{r |\sin \theta| e^{-(x_0 + r \cos \theta)^2 / (r \sin \theta)^2}}{r} \\ &= \sup_{\substack{\theta \in (0, 2\pi) \\ \theta \neq \pi}} |\sin \theta| e^{-(x_0 + r \cos \theta)^2 / (r \sin \theta)^2} \\ &\leq \sup_{\substack{\theta \in (0, 2\pi) \\ \theta \neq \pi}} e^{-(x_0 + r \cos \theta)^2 / r^2} \end{aligned}$$

Per stimare questa funzione, notiamo che ci possiamo limitare a considerare  $r < |x_0|/2$  (perché ci interessa  $r$  piccolo), da cui  $(x_0 + r \cos \theta)^2 \geq |x_0|^2/4$ ; inoltre  $0 < (r \sin \theta)^2 \leq r^2$  per cui

$$(x_0 + r \cos \theta)^2 / (r \sin \theta)^2 \geq |x_0|^2 / (4r^2).$$

Siccome  $t \mapsto e^{-t}$  è decrescente, ricaviamo che  $e^{-(x_0 + r \cos \theta)^2 / (r \sin \theta)^2} \leq e^{-|x_0|^2 / (4r^2)}$ . Allora

$$\sup_{\substack{\theta \in (0, 2\pi) \\ \theta \neq \pi}} |h(x_0 + r \cos \theta, r \sin \theta)| \leq e^{-|x_0|^2 / (4r^2)} \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} 0.$$

Quindi  $f$  è differenziabile anche in  $(x_0, 0)$  con  $x_0 \neq 0$ .

**3.4. Derivazione della funzione composta.** Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione definita sull'insieme  $A$  aperto e sia  $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)$  una funzione a valori vettoriali definita sull'intervallo  $(a, b)$  e tale che per ogni  $t$  in  $(a, b)$  si abbia  $\mathbf{g}(t) \in A$ . Allora possiamo considerare la funzione composta  $f \circ \mathbf{g}$ , cioè  $t \mapsto f(\mathbf{g}(t))$ , che è una funzione di una variabile reale.

**TEOREMA 3.36** (di derivazione della funzione composta—prima versione). *Sia  $t_0$  in  $(a, b)$  e supponiamo che tutte le funzioni  $g_j$  siano derivabili in  $t_0$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Sia inoltre  $f$  differenziabile in  $\mathbf{g}(t_0)$ . Allora la funzione composta  $f \circ \mathbf{g}$  è derivabile in  $t_0$  e*

$$\frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{g})(t_0) = \sum_{j=1}^n \partial_j f(\mathbf{g}(t_0)) g'_j(t_0) = \langle \nabla f(\mathbf{g}(t_0)), \mathbf{g}'(t_0) \rangle,$$

dove  $\mathbf{g}'(t_0)$  denota il vettore  $(g'_1(t_0), \dots, g'_n(t_0))$ .

**ESEMPIO 3.37.** Siano  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$  e  $\mathbf{g}(t) = (\cos t, \sin t)$ . Calcolare la derivata della funzione  $f \circ \mathbf{g}$ .

Si ha  $\nabla f(x, y) = (-2x e^{-(x^2+y^2)}, -2y e^{-(x^2+y^2)})$ , quindi

$$\nabla f(\cos t, \sin t) = (-2 \cos t e^{-1}, -2 \sin t e^{-1})$$

e  $\mathbf{g}'(t) = (-\sin t, \cos t)$ . Allora

$$\frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{g})(t) = -2 \cos t e^{-1}(-\sin t) - 2 \sin t e^{-1}(\cos t) = 0.$$

(Del resto  $f \circ \mathbf{g}$  è la funzione che vale costantemente  $e^{-1}$ )

Le funzioni dei prossimi esempi sono tutte derivabili o differenziabili in tutti i punti del loro dominio. Vogliamo solo illustrare il significato delle formule.

**ESEMPIO 3.38.** Siano  $f(x, y) = \cos(x + 2y)$  e  $\mathbf{g}(t) = (t^2, t - 2)$ . Calcolare la derivata della funzione  $f \circ \mathbf{g}$ .

Si ha  $\nabla f(x, y) = (-\sin(x + y), -2 \sin(x + y))$ , quindi

$$\nabla f(t^2, t - 2) = (-\sin(t^2 + t - 2), -2 \sin(t^2 + t - 2))$$



e  $\mathbf{g}'(t) = (2t, 1)$ . Allora

$$\frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{g})(t) = (-\sin(t^2 + t - 2))(2t) + (-2\sin(t^2 + t - 2)) = -2(t + 1)\sin(t^2 + t - 2).$$

#### 4. Derivate di ordine successivo

Sia data una funzione  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e supponiamo che esistano in  $A$ , insieme aperto, le derivate parziali di  $f$ . Le derivate parziali si possono considerare a loro volta come funzioni definite in  $A$  e ci potremmo chiedere se tali funzioni sono a loro volta derivabili parzialmente.

**DEFINIZIONE 3.10.** Se le funzioni  $\partial_j f$  sono derivabili parzialmente, si dice che  $f$  ammette derivate parziali del secondo ordine (o derivate parziali seconde).

Si indica con  $\partial_{kj}f$  la funzione  $\partial_k(\partial_j f)$ . Nel caso in cui  $k = j$  si parla di derivate parziali seconde pure (ovvero si deriva rispetto alla stessa variabile) e talvolta si usa la notazione  $\partial_j^2$  per indicare  $\partial_{jj}$ ; nel caso in cui  $k \neq j$  si parla di derivate parziali seconde miste.

In generale, se  $j \neq k$ , non è detto che  $\partial_{kj}f = \partial_{jk}f$ . Tuttavia, se la funzione  $f$  è sufficientemente regolare, l'ordine di derivazione non conta; questo è il contenuto del prossimo teorema.

**TEOREMA 3.39** (di Schwarz sulle derivate miste). *Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione e sia  $\mathbf{x}_0$  un punto interno al dominio di  $f$ . Supponiamo che in un intorno di  $\mathbf{x}_0$  esistano le derivate parziali  $\partial_{kj}f$  e  $\partial_{jk}f$  e siano continue in  $\mathbf{x}_0$ . Allora  $\partial_{kj}f(\mathbf{x}_0) = \partial_{jk}f(\mathbf{x}_0)$ .*

**ESEMPIO 3.40.** Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq 0 \\ 0 & (x, y) = 0. \end{cases}$$

Verificare che  $\partial_{xy}f(0, 0) \neq \partial_{yx}f(0, 0)$ .

Possiamo scrivere le derivate parziali seconde di una funzione in un punto  $\mathbf{x}_0$  raggruppandole in una matrice in questo modo:

$$\begin{pmatrix} \partial_{11}f(\mathbf{x}_0) & \partial_{12}f(\mathbf{x}_0) & \dots & \partial_{1n}f(\mathbf{x}_0) \\ \partial_{21}f(\mathbf{x}_0) & \partial_{22}f(\mathbf{x}_0) & \dots & \partial_{2n}f(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_{n1}f(\mathbf{x}_0) & \partial_{n2}f(\mathbf{x}_0) & \dots & \partial_{nn}f(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

Questa matrice si chiama matrice Hessiana di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$  e si indica con  $\text{Hess}_f(\mathbf{x}_0)$  o anche  $H_{f, \mathbf{x}_0}$ . Se la funzione  $f$  ha derivate parziali seconde continue, allora questa matrice è simmetrica. A ogni matrice simmetrica  $H$  si associa la forma quadratica  $Q_H(\mathbf{x}) = {}^t \mathbf{x} H \mathbf{x}$ .

Abbiamo visto che se  $f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ , allora  $f$  si può approssimare in un intorno  $U_0$  di questo punto tramite il suo piano tangente, ovvero un polinomio in  $n$  variabili di grado 1:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in U_0$$

$$\text{e } \lim_{\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{0}} \omega(\mathbf{t}) = \omega(\mathbf{0}) = 0.$$

Cosa succede se la funzione è più regolare, ad esempio con derivate parziali seconde continue? Analogamente al caso di funzioni di una variabile, possiamo approssimare la funzione nell'intorno di un punto fissato mediante un polinomio (in  $n$  variabili) di grado 2.

**TEOREMA 3.41** (formula di Taylor di ordine 2 con resto di Peano). *Sia  $f$  una funzione con derivate parziali continue sino all'ordine 2 in un intorno  $U_0$  del punto  $\mathbf{x}_0$ . Allora*

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle + \frac{1}{2} Q_{H_f, \mathbf{x}_0}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 \omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in U_0$$

e  $\lim_{\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{0}} \omega(\mathbf{t}) = \omega(\mathbf{0}) = 0$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$  con  $\mathbf{h}$  in  $\mathbb{R}^n$ . Restringiamo l'attenzione alla funzione ristretta alla retta per  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}$  (o alla porzione di retta che cade nel dominio di  $f$ ): consideriamo la funzione  $\mathbf{g}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}$  per  $t \in (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$ . Allora  $\mathbf{g}(0) = \mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{g}(1) = \mathbf{x}$  e  $\mathbf{g}(t)$  è un punto della retta passante per  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}$ . Allora la funzione  $\phi = f \circ \mathbf{g}$  è una funzione di una variabile reale, cui applichiamo la formula di Taylor del primo ordine, centrata in  $t_0 = 0$  con resto di Lagrange: esiste  $c_{\mathbf{x}} \in (0, t)$  tale che

$$(3.2) \quad \phi(t) = \phi(0) + \phi'(0)t + \frac{1}{2} \phi''(c_{\mathbf{x}}) t^2.$$

Ma dal Teorema 3.36 di derivazione della funzione composta abbiamo

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \sum_{j=1}^n h_j \partial_j f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) \\ \phi''(t) &= \sum_{j=1}^n h_j \frac{d}{dt} \partial_j f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) \\ &= \sum_{j=1}^n h_j \sum_{k=1}^n h_k \partial_k \partial_j f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}). \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \phi'(0) &= \sum_{j=1}^n h_j \partial_j f(\mathbf{x}_0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} \rangle \\ \phi''(0) &= \sum_{j,k=1}^n h_j h_k \partial_{kj} f(\mathbf{x}_0) = Q_{H_f, \mathbf{x}_0}(\mathbf{h}). \end{aligned}$$

Notiamo che  $\phi(1) = f(\mathbf{x})$  e quindi sostituendo  $t = 1$  nella (3.2), aggiungendo e togliendo il termine del secondo ordine, otteniamo

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} \rangle + \frac{1}{2} \phi''(c_{\mathbf{x}}) \\ &= f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} \rangle + \frac{1}{2} Q_{H_{f, \mathbf{x}_0}}(\mathbf{h}) + \frac{1}{2} \left\{ \phi''(c_{\mathbf{x}}) - Q_{H_{f, \mathbf{x}_0}}(\mathbf{h}) \right\}. \end{aligned}$$

Dobbiamo ancora controllare che il termine tra parentesi graffe tende a 0 abbastanza rapidamente quando  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ , cioè  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ . Si ha

$$\frac{\left\{ \phi''(c_{\mathbf{x}}) - Q_{H_{f, \mathbf{x}_0}}(\mathbf{h}) \right\}}{\|\mathbf{h}\|^2} = \sum_{j,k=1}^n \frac{h_j h_k}{\|\mathbf{h}\|^2} [\partial_{kj} f(\mathbf{x}_0 + c_{\mathbf{x}} \mathbf{h}) - \partial_{kj} f(\mathbf{x}_0)]$$

Ogni addendo è il prodotto di  $\frac{h_j h_k}{\|\mathbf{h}\|^2}$ , che è una quantità limitata, per  $[\dots]$  che tende a 0 per la continuità delle derivate seconde.  $\square$

## 5. Ricerca di massimi e minimi, relativi e assoluti, punti sella

Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $\mathbf{x}_0$  un punto nel dominio di  $f$ .

**DEFINIZIONE 3.11.** Si dice che  $\mathbf{x}_0$  è un punto di massimo relativo per  $f$  se esiste un intorno  $U$  di  $\mathbf{x}_0$  tale che

$$f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in U \cap \text{dom } f.$$

Se vale la disuguaglianza stretta  $f(\mathbf{x}_0) > f(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in U \cap \text{dom } f$  escluso  $\mathbf{x}_0$ , si dice che  $\mathbf{x}_0$  è un punto di massimo relativo forte.

**DEFINIZIONE 3.12.** Si dice che  $\mathbf{x}_0$  è un punto di minimo relativo per  $f$  se esiste un intorno  $U$  di  $\mathbf{x}_0$  tale che

$$f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in U \cap \text{dom } f.$$

Se vale la disuguaglianza stretta  $f(\mathbf{x}_0) < f(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in U \cap \text{dom } f$  escluso  $\mathbf{x}_0$ , si dice che  $\mathbf{x}_0$  è un punto di minimo relativo forte.

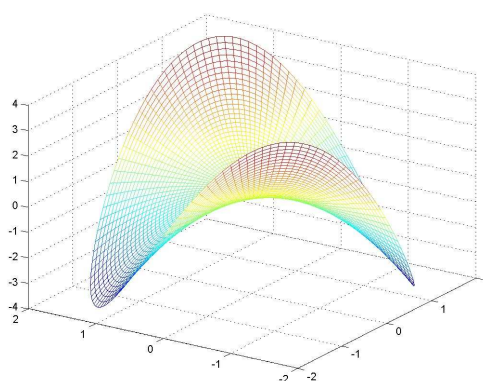
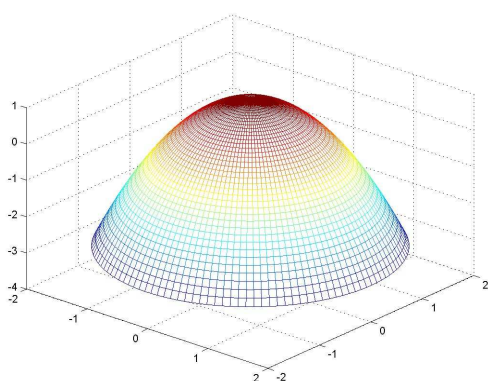
Supponiamo per un momento che  $n = 2$ , ossia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , e che  $(x_0, y_0)$  sia un punto di massimo relativo per  $f$ . La funzione  $f(x, y_0)$ , restrizione di  $f$  alla retta passante per  $(x_0, y_0)$  della forma  $y = y_0$ , deve avere un massimo relativo per  $x = x_0$ . Quindi la derivata (rispetto alla variabile  $x$ ) della funzione  $f(x, y_0)$  deve essere nulla in  $x_0$ . Analogamente, la restrizione della funzione  $f$  alla retta passante per  $(x_0, y_0)$  della forma  $x = x_0$  deve avere un massimo relativo per  $y = y_0$  e quindi la derivata (rispetto a  $y$ ) della funzione  $f(x_0, y)$  deve essere nulla in  $y_0$ . Nel caso generale, l'enunciato dice:

**TEOREMA 3.42.** *Se  $f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}_0$  è un punto di massimo o di minimo relativo per  $f$ , allora  $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ .*

I punti  $\mathbf{x}_0$  tali che  $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$  si dicono punti critici.

**DEFINIZIONE 3.13.** Si dice che un punto critico  $\mathbf{x}_0$  è un punto sella se per ogni intorno  $U$  di  $\mathbf{x}_0$  esistono punti  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  in  $U$  tali che

$$f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0) < f(\mathbf{y}).$$



$(0, 0)$  è punto di max rel per  $1 - x^2 - y^2$

$(0, 0)$  è punto sella per  $xy$

Se la funzione  $f$  è di classe  $C^2$ , tramite un test sulla matrice Hessiana, possiamo stabilire se un punto critico è di massimo relativo, minimo relativo, o sella, almeno nella maggior parte dei casi. Infatti, la formula di Taylor di ordine 2 centrata in un punto critico  $\mathbf{x}_0$  diventa più semplice e, attraverso tale formula riusciamo a stabilire il segno di  $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$  in un intorno di  $\mathbf{x}_0$  tramite lo studio della forma quadratica associata alla matrice Hessiana.

Iniziamo con il caso  $n = 2$  e, per semplificare le notazioni, supponiamo che  $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$  e che l'approssimazione data dall'approssimazione di Taylor del secondo ordine sia “buona” in un intorno dell'origine, ovvero che  $f$  sia di classe  $C^2$ . Allora

$$f(x, y) - f(0, 0) \simeq \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

dove  $\text{Hess}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ . Ci siamo ricondotti al problema di studiare il segno di un polinomio omogeneo di grado 2. Si avrà  $f(x, y) - f(0, 0) > 0$  in ogni punto  $(x, y)$  in un intorno di  $(0, 0)$  tranne al più  $(0, 0)$  se  $ax^2 + 2bxy + cy^2 > 0$  in ogni punto  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Sotto quali condizioni su  $a, b, c$  questo accade?

Se  $y = 0$  questo succede quando  $a > 0$ . Supponiamo allora  $a > 0$  e  $y \neq 0$ . Si ha  $ax^2 + 2bxy + cy^2 > 0$  in ogni punto  $(x, y)$  con  $y \neq 0$  se e solo se  $at^2 + 2bt + c > 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , quindi deve essere  $ac - b^2 > 0$ . In sintesi abbiamo controllato che se valgono entrambe le condizioni

1.  $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ ,
2.  $a = \partial_x^2 f(0, 0) > 0$  e  $\det(\text{Hess}_f(0, 0)) = ac - b^2 > 0$ ,

allora  $(0, 0)$  è un punto di minimo relativo per  $f$ .

Analogamente, se valgono entrambe le condizioni

- 1'.  $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ ,
- 2'.  $a = \partial_x^2 f(0, 0) < 0$  e  $\det(\text{Hess}_f(0, 0)) = ac - b^2 > 0$ ,

allora  $(0, 0)$  è un punto di massimo relativo per  $f$ .

Infine, se

- 1''.  $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ ,
- 2''.  $\det(\text{Hess}_f(0, 0)) = ac - b^2 < 0$ ,

allora  $(0, 0)$  è un punto sella.

Torniamo al caso generale e, per brevità, indichiamo con  $H$  la matrice Hessiana di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$ . Per  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$  possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) &= \frac{1}{2} Q_H(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 \omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= \frac{1}{2} {}^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) H (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 \omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 \left( \frac{1}{2} {}^t \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \right) H \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \right) + \omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right), \end{aligned}$$

dove  $\lim_{\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{0}} \omega(\mathbf{t}) = \omega(\mathbf{0}) = 0$ . Vedremo che il segno di  $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$  in un intorno piccolo di  $\mathbf{x}_0$  è determinato dal segno di  $\langle H\mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle$ , dove  $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}$  è un vettore di lunghezza 1 in  $\mathbb{R}^n$ . È il contenuto del seguente teorema.

**TEOREMA 3.43** (Condizioni sufficienti per massimo/minimo relativo sella). *Sia  $f$  una funzione con derivate parziali continue fino al secondo ordine in un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $\mathbf{x}_0$  un punto in questo aperto tale che  $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$  e sia  $H$  la matrice Hessiana di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$ .*

- a) *Se  ${}^t\mathbf{t}H\mathbf{t} > 0$  per ogni  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$  con  $\|\mathbf{t}\| = 1$ , allora  $\mathbf{x}_0$  è un punto di minimo relativo per  $f$ .*
- b) *Se  ${}^t\mathbf{t}H\mathbf{t} < 0$  per ogni  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$  con  $\|\mathbf{t}\| = 1$ , allora  $\mathbf{x}_0$  è un punto di massimo relativo per  $f$ .*
- c) *Se esistono  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathbb{R}^n$  con  $\|\mathbf{t}_1\| = \|\mathbf{t}_2\| = 1$ , e  ${}^t\mathbf{t}_1H\mathbf{t}_1 < 0$ ,  ${}^t\mathbf{t}_2H\mathbf{t}_2 > 0$ , allora  $\mathbf{x}_0$  è un punto sella.*

Il caso a) si presenta quando la forma quadratica associata alla matrice simmetrica  $H$  è definita positiva, ovvero quando  $H$  ha tutti autovalori positivi.

Il caso b) si presenta quando la forma quadratica associata alla matrice simmetrica  $H$  è definita negativa, ovvero quando  $H$  ha tutti autovalori negativi.

Il caso c) si presenta quando la forma quadratica associata alla matrice simmetrica  $H$  è indefinita perché  $H$  ha sia autovalori positivi sia autovalori negativi.

**DIMOSTRAZIONE.** Esiste un intorno  $V$  di  $x_0$  in cui possiamo scrivere

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 \left( \frac{1}{2} {}^t \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \right) H \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \right) + \omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right) \quad \forall \mathbf{x} \in V, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$$

dove  $\lim_{\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{0}} \omega(\mathbf{t}) = \omega(\mathbf{0}) = 0$ .

Nel caso a), quando  $H$  ha tutti autovalori positivi, possiamo dire che  $H$  ha un autovalore più piccolo  $\lambda$  e allora  ${}^t\mathbf{t}H\mathbf{t} \geq \lambda > 0$  per ogni  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$  con  $\|\mathbf{t}\| = 1$ .<sup>2</sup> Siccome  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \lambda/2 + \omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \lambda/2 > 0$ , esiste un intorno  $U \subseteq V$  di  $\mathbf{x}_0$  tale che  $\lambda/2 + \omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) > 0$  per ogni  $\mathbf{x}$  in  $U$ .

<sup>2</sup>Se non avete visto questo fatto in ALGA, potete anche ragionare in questo modo: la forma quadratica  $\mathbf{v} \mapsto Q(\mathbf{v})$  è una funzione continua e sempre positiva sulla sfera  $S = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{v}\| = 1\}$ . La sfera è un insieme chiuso e limitato, quindi per il Teorema di Weierstrass la funzione  $Q$  ha minimo assoluto  $\lambda$ , ovvero

$$\begin{aligned} \lambda &= Q(\mathbf{v}_0) && \text{per un opportuno } \mathbf{v}_0 \in S \\ \lambda &\leq Q(\mathbf{v}) && \text{per ogni } \mathbf{v} \in S. \end{aligned}$$

Siccome  $Q(\mathbf{v}) > 0$  per ogni  $\mathbf{v}$  in  $S$ , si ha  $\lambda > 0$ .

A questo punto per  $\mathbf{x}$  in  $U$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) &= \underbrace{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2}_{>0} \left( \underbrace{\frac{1}{2} {}^t \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \right) H \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \right)}_{\geq \lambda/2} + \omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right) \\ &\geq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 \left( \frac{\lambda}{2} + \omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right) > 0. \end{aligned}$$

Il caso b) è del tutto analogo.

Per il caso c), supponiamo che  $\lambda_1 = {}^t \mathbf{t}_1 H \mathbf{t}_1 < 0$  e  $\lambda_2 = {}^t \mathbf{t}_2 H \mathbf{t}_2 > 0$ .

Osserviamo che fissato un qualsiasi intorno  $U$  di  $\mathbf{x}_0$ , esiste  $\alpha > 0$  abbastanza piccolo tale che un punto del tipo  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \alpha \mathbf{t}_1$  stia in  $U$ . Allora per un tale  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \alpha \mathbf{t}_1$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) &= \underbrace{|\alpha|^2}_{>0} \left( \underbrace{\frac{1}{2} {}^t (\mathbf{t}_1) H (\mathbf{t}_1)}_{=\lambda_1/2} + \omega(\alpha \mathbf{t}_1) \right) \\ &= |\alpha|^2 \left( \frac{\lambda_1}{2} + \omega(\alpha \mathbf{t}_1) \right). \end{aligned}$$

Osserviamo che la quantità fra parentesi tonde tende a  $\frac{\lambda_1}{2} < 0$  quando  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$  (cioè quando  $\alpha \rightarrow 0$ ) quindi si mantiene negativa per  $\alpha$  piccolo abbastanza. Questo prova che esiste un punto  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \alpha \mathbf{t}_1$  in  $U$  tale che

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = |\alpha|^2 \left( \frac{\lambda_1}{2} + \omega(\alpha \mathbf{t}_1) \right) < 0.$$

Analogamente si trova  $\mathbf{y}$  del tipo  $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + \beta \mathbf{t}_2$  con  $\beta$  piccolo in modo che  $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + \beta \mathbf{t}_2$  stia in  $U$  e

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0) = \underbrace{|\beta|^2}_{>0} \left( \frac{1}{2} {}^t (\mathbf{t}_2) H (\mathbf{t}_2) + \omega(\beta \mathbf{t}_2) \right) = |\beta|^2 \underbrace{\left( \frac{\lambda_2}{2} + \omega(\alpha \mathbf{t}_1) \right)}_{\rightarrow \frac{\lambda_2}{2} > 0} > 0$$

Quindi in ogni intorno  $U$  abbiamo determinato punti  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  in  $U$  tali che

$$f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0) < f(\mathbf{y})$$

ovvero  $\mathbf{x}_0$  è un punto sella. □

ESEMPIO 3.44. Determinare massimi e minimi relativi della funzione  $f(x, y) = xy e^{-(x^2+y^2)/2}$ .

La funzione è super-regolare, perché è composta di polinomi con la funzione esponenziale. Calcoliamo il gradiente e la matrice Hessiana.

$$\begin{aligned}\partial_x f(x, y) &= y e^{-(x^2+y^2)/2} - x^2 y e^{-(x^2+y^2)/2} = y(1-x^2) e^{-(x^2+y^2)/2} \\ \partial_y f(x, y) &= x e^{-(x^2+y^2)/2} - x y^2 e^{-(x^2+y^2)/2} = x(1-y^2) e^{-(x^2+y^2)/2} \\ \partial_x^2 f(x, y) &= -2xy e^{-(x^2+y^2)/2} - xy(1-x^2) e^{-(x^2+y^2)/2} = xy(x^2-3) e^{-(x^2+y^2)/2} \\ \partial_{xy} f(x, y) &= \partial_{yx} f(x, y) = (1-x^2) e^{-(x^2+y^2)/2} - y^2(1-x^2) e^{-(x^2+y^2)/2} \\ &= (1-y^2)(1-x^2) e^{-(x^2+y^2)/2} \\ \partial_y^2 f(x, y) &= -2xy e^{-(x^2+y^2)/2} - xy(1-y^2) e^{-(x^2+y^2)/2} = xy(y^2-3) e^{-(x^2+y^2)/2}.\end{aligned}$$

Iniziamo a selezionare i punti per cui  $\nabla f(x, y) = 0$ . Questo accade quando

$$\begin{cases} y(1-x^2) = 0 \\ x(1-y^2) = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad (x, y) \in \{(0, 0), (1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)\}.$$

Analizziamo la matrice Hessiana in ciascuno di questi casi:

$$\begin{aligned}H(0, 0) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & H(1, 1) &= \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{pmatrix} = H(-1, -1) \\ H(-1, 1) &= \begin{pmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix} = H(1, -1).\end{aligned}$$

Dall'esame degli autovalori o dai criteri visti nel caso  $n = 2$  abbiamo che  $(0, 0)$  è un punto sella,  $(1, 1)$  e  $(-1, -1)$  sono punti di massimo relativo (con massimo relativo  $1/e$ ),  $(-1, 1)$  e  $(1, -1)$  sono punti di minimo relativo (con minimo relativo  $-1/e$ ).

Si può anche notare che  $\pm 1/e$  sono massimo e minimo assoluto di  $f$  su  $\mathbb{R}^2$ .

Infatti  $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} f(x, y) = 0$ , quindi esiste  $R > 0$  tale che  $|f(x, y)| < 1/2e$  se  $x^2 + y^2 \geq R$ . Nel disco chiuso  $\{x^2 + y^2 \leq R\}$  la funzione  $f$  assume massimo e minimo assoluti per il Teorema di Weierstrass. Se il massimo o il minimo assoluti sono assunti in punti interni, allora ritroviamo i valori precedenti. D'altra parte  $|f(x, y)| < 1/2e$  se  $x^2 + y^2 = R$ , quindi  $\pm 1/e$  sono massimo e minimo assoluti.

E se fosse  $\det H = 0$ ? Il seguente teorema permette di dare una risposta almeno parziale.



**TEOREMA 3.45** (Condizioni necessarie per massimo/minimo relativo). *Sia  $f$  una funzione con derivate parziali continue fino al secondo ordine in un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $\mathbf{x}_0$  un punto in  $A$  tale che  $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$  e sia  $H$  la matrice Hessiana di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$ .*

- a) *Se  $\mathbf{x}_0$  è un punto di minimo relativo per  $f$  allora  ${}^t\mathbf{t}H\mathbf{t} \geq 0$  per ogni  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$  con  $\|\mathbf{t}\| = 1$ ;*  
 b) *Se  $\mathbf{x}_0$  è un punto di massimo relativo per  $f$  allora  ${}^t\mathbf{t}H\mathbf{t} \leq 0$  per ogni  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$  con  $\|\mathbf{t}\| = 1$ .*

Il caso a) si presenta quando la forma quadratica è semidefinita positiva, ossia quando gli autovalori della matrice Hessiana sono tutti maggiori o uguali a zero.

Il caso b) si presenta quando la forma quadratica è semidefinita negativa, ossia quando gli autovalori della matrice Hessiana sono tutti minori o uguali a zero.

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che  $\mathbf{x}_0$  sia un punto di minimo relativo per  $f$ . Allora per ogni vettore  $\mathbf{v}$  di lunghezza 1, la funzione definita da

$$g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) \quad \forall t : \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} \in A$$

ha un minimo relativo per  $t = 0$ . Quindi  $g'(0) = 0$  e  $g''(0) \geq 0$ . Calcolando  $g''(0)$  come nella dimostrazione del Teorema 3.41 di Taylor, otteniamo

$$0 \leq g''(0) = \sum_{j,k=1}^n v_j v_k \partial_{kj}^2 f(\mathbf{x}_0) = {}^t\mathbf{v}H\mathbf{v}$$

□

**ESEMPIO 3.46.** Si consideri il punto critico  $(0, 0)$  nei seguenti casi:

$$f(x, y) = x^2 + y^4 \quad g(x, y) = x^2 - y^4 \quad h(x, y) = (x - y^2)(x - 2y^2).$$

È facile controllare che  $f$ ,  $g$ ,  $h$  hanno la stessa matrice hessiana in  $(0, 0)$ , data da

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che è semidefinita positiva. Allora possiamo escludere che  $(0, 0)$  sia un punto di massimo relativo, ma non possiamo decidere se sia di minimo o sella.

Verifichiamo che  $(0, 0)$  è punto di minimo per  $f$  e di sella per  $g$ .

Infatti,  $f(x, y) > 0 = f(0, 0)$  se  $(x, y) \neq (0, 0)$ , quindi  $(0, 0)$  è punto di minimo per  $f$ . Invece se  $x, y \neq 0$ ,  $g(0, y) = -y^4 < 0$  e  $g(x, 0) = x^2 > 0$ , quindi  $(0, 0)$  è punto di sella per  $g$ .

Per quanto riguarda  $h$ , notiamo che ogni restrizione della funzione  $h$  a una retta per  $(0, 0)$  del tipo  $t \mapsto \phi(tv_1, tv_2)$  ha un minimo per  $t = 0$ . Questo non basta per concludere

che  $(0, 0)$  è punto di minimo per  $f$ . In effetti  $h$  ha una sella in  $(0, 0)$ , perché, se  $x, y \neq 0$ ,  $h(x, 0) = x^2 > 0$  e  $h(3/2y^2, y) = -1/4y^4 < 0$ .

In generale, se vogliamo determinare il massimo e il minimo **assoluti** di una funzione continua su un insieme dato, possiamo ragionare in questo modo. Innanzi tutto, analizziamo l'insieme: se l'insieme è chiuso e limitato, allora possiamo usare il Teorema di Weierstrass e dire che senz'altro esistono massimo e minimo assoluti. Tali valori saranno assunti in punti del tipo:

- punti di non differenziabilità
- punti in cui il gradiente è nullo (detti “punti critici”)
- punti della frontiera (del bordo) dell'insieme.

Nella prossima sezione svilupperemo un metodo che ci permetterà di trovare punti di massimo o di minimo sulla frontiera di un insieme.

Se poi l'insieme non è chiuso oppure non è limitato, dobbiamo anche analizzare i limiti (all'infinito se l'insieme non è limitato) della funzione agli estremi dell'insieme.

## 6. Estremi vincolati

Un esempio di problema vincolato è il seguente: dobbiamo costruire un recipiente per conservare 100mc. di acqua. Per comodità lo costruiamo a forma di parallelepipedo. Il materiale che adoperiamo però è costoso, se desideriamo che l'acqua mantenga inalterate le sue proprietà, quindi decidiamo di costruirlo senza coperchio e di superficie più piccola possibile. Quanto devono misurare gli spigoli, affinché la superficie sia minima?

Possiamo formalizzare il problema precedente in questo modo: se indichiamo con  $x, y, z$  le lunghezze dei lati del parallelepipedo allora il volume  $V = xyz = 100\text{mc.}$  e la superficie è  $S = xy + 2xz + 2yz$ . Ovviamente le lunghezze sono positive. Desideriamo quindi trovare il minimo assoluto della funzione  $xy + 2xz + 2yz$  definita sull'insieme  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}$  soggetta al vincolo  $xyz = 100$ .

Un primo metodo, consigliabile quando il vincolo è particolarmente semplice, consiste nell'utilizzare il vincolo per ridurre il numero di variabili. Nel nostro caso, possiamo ricondurci al problema di determinare il minimo di una funzione  $f$  di due variabili ponendo  $z = V/(xy)$ . Allora  $f(x, y) = S(x, y, V/(xy)) = xy + 2V/y + 2V/x$  è la funzione di cui occorre trovare il minimo sull'insieme  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ .

È facile rendersi conto che ci deve essere il minimo assoluto di  $f$  su  $A$ , perché se  $\bar{x}, \bar{y} \geq 0$  e i limiti si intendono con  $(x, y) \in A$ , allora

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} f(x, y) = +\infty \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (\bar{x}, 0)} f(x, y) = +\infty \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0, \bar{y})} f(x, y) = +\infty.$$

Cerchiamo allora tale minimo. Siccome  $f$  è differenziabile in  $A$ , se  $(x, y)$  è punto di minimo allora deve essere  $\nabla f(x, y) = 0$ , ovvero

$$\partial_x f(x, y) = y - 2V/x^2 = 0 \quad \text{e} \quad \partial_y f(x, y) = x - 2V/y^2 = 0$$

che ha come (unica) soluzione in  $A$  il punto di coordinate  $x = \sqrt[3]{2V}$ ,  $y = \sqrt[3]{2V}$ . Siccome tale soluzione è unica, è senz'altro il punto di minimo cercato.

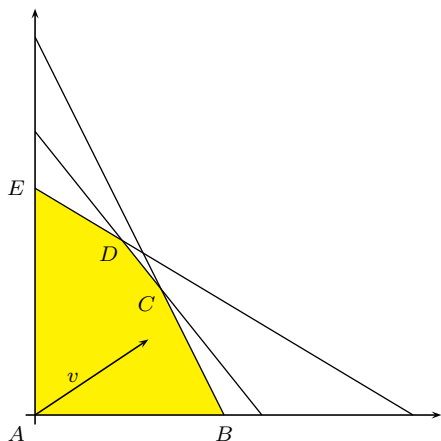
La nostra scatola deve quindi avere base quadrata di lato  $\sqrt[3]{2V}$  e altezza  $\sqrt[3]{V/4}$ . La superficie minima trovata è  $3\sqrt[3]{(2V)^2}$ .

Un altro esempio di problema vincolato è il seguente. Un produttore di tessuti prepara due qualità di cotone misto lana: una, più pregiata con il 20% in peso di lana, il 50% di cotone e il rimanente 30% di poliestere; l'altra, meno pregiata, con il 10% di lana, il 40% di cotone e il rimanente 50% di poliestere. La qualità più pregiata è venduta a 3 EURO al chilo e quella meno pregiata a 2 EURO al chilo. Il magazzino contiene 2 tonnellate di lana, 6 tonnellate di cotone e 6 tonnellate di poliestere. Quanti chili di ciascun tessuto dovrà produrre per massimizzare il suo guadagno?

Possiamo pensare che  $x$  siano le tonnellate di tessuto pregiato da produrre e  $y$  le tonnellate di quello meno pregiato. Si desidera massimizzare  $f(x, y) = 3000x + 2000y$ . I materiali a disposizione in magazzino forniscono i vincoli

$$20\%x + 10\%y \leq 2 \quad 50\%x + 40\%y \leq 6 \quad 30\%x + 50\%y \leq 6,$$

insieme alle ovvie richieste  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ . In questo caso i vincoli sono espressi in forma di disuguaglianze e quindi otterremo una regione interna, in cui cercare punti critici, e la sua frontiera.



Dobbiamo analizzare i punti interni al poligono in figura per cui  $\nabla f = 0$  (non ce ne sono). Infine dobbiamo cercare il massimo assoluto sulla frontiera, ovvero restringere la funzione ai lati  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EA$  e su ciascun lato cercare il massimo assoluto della funzione.

In questo caso,  $f$  è una funzione lineare, quindi gli eventuali massimo e minimo assoluti si potranno trovare solo nei vertici. Calcoliamo quindi i valori di  $f$  in ciascuno dei vertici e otteniamo

$$\begin{aligned} f(A) = f(0, 0) = 0 & \quad f(B) = f(10, 0) = 30\,000 & \quad f(C) = f\left(\frac{20}{3}, \frac{20}{3}\right) = \frac{100\,000}{3} \simeq 33\,333.33 \\ f(D) = f\left(\frac{60}{13}, \frac{120}{13}\right) = \frac{420\,000}{13} \simeq 32\,307.69 & \quad f(E) = f(0, 12) = 24\,000. \end{aligned}$$

Il massimo profitto è quindi di 33 333 EURO e si ottiene confezionando 6.6666 tonnellate di tessuto pregiato e 6.6666 tonnellate di tessuto meno pregiato.

Allo stesso risultato saremmo potuti arrivare con un poco meno calcoli utilizzando il significato geometrico del gradiente. Abbiamo visto, nel Teorema 3.30 (del differenziale), che se  $f$  è differenziabile in un punto  $\mathbf{x}$ , allora la derivata rispetto al vettore non nullo  $\mathbf{v}$  è data dal prodotto scalare del gradiente di  $f$  in  $\mathbf{x}$  e il vettore  $\mathbf{v}$ . In formule, se  $\theta$  è l'angolo formato da  $\nabla f(\mathbf{x})$  e dal vettore  $\mathbf{v}$  di norma 1,

$$\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) = \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cos \theta.$$

Pertanto  $f$  cresce più rapidamente nel verso del gradiente (corrispondente a  $\cos \theta = 1$ ) e decresce più rapidamente nel verso opposto al gradiente (corrispondente a  $\cos \theta = -1$ ). Infine la variazione di  $f$  è nulla nella direzione tangente all'ipersuperficie di livello per il punto  $\mathbf{x}$  (casi corrispondenti a  $\cos \theta = 0$ ), ovvero il gradiente in  $\mathbf{x}$  è ortogonale all'ipersuperficie di livello passante per  $\mathbf{x}$ .

Tornando all'esempio del produttore di tessuti, il gradiente di  $f$  in ogni punto è (3000, 2000). In modulo è molto grande, ma ha la stessa direzione del vettore  $v$  disegnato in figura. La freccia del vettore ci indica che il punto di massimo assoluto tra i vertici deve essere  $C$ . Questo metodo fornisce una buona indicazione quando sia la funzione sia i vincoli sono lineari.

In sintesi, un problema vincolato consiste nel massimizzare o minimizzare una certa funzione  $f(\mathbf{x})$  soggetta a un vincolo definito da una o più equazioni della forma  $g(\mathbf{x}) = 0$ .

**DEFINIZIONE 3.14.** Siano  $f, g_1, \dots, g_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni definite in un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$ . Si ponga  $S = \{\mathbf{x} \in A : g_1(\mathbf{x}) = \dots = g_k(\mathbf{x}) = 0\}$ . Un punto  $\mathbf{x}_0$  in  $S$  è un punto di massimo relativo per  $f$  soggetta al vincolo  $S$  se esiste un intorno  $U$  di  $\mathbf{x}_0$  tale che  $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$  per ogni  $\mathbf{x} \in S \cap U$ .

Analogamente è la definizione di punto di minimo relativo vincolato. In generale si dice punto di estremo (relativo) vincolato un punto di massimo o di minimo (relativo) vincolato.

**TEOREMA 3.47** (dei moltiplicatori di Lagrange). Siano  $f, g_1, \dots, g_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni con derivate parziali continue in un aperto  $A$  e sia  $k < n$ . Indichiamo con  $S$  il vincolo, ossia  $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g_1(\mathbf{x}) = \dots = g_k(\mathbf{x}) = 0\}$ . Supponiamo che  $\mathbf{x}_0 \in S$  sia un punto di estremo relativo vincolato per  $f$  e che la matrice

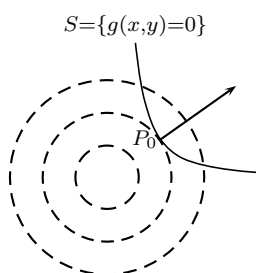
$$\begin{pmatrix} \partial_1 g_1(\mathbf{x}_0) & \partial_1 g_2(\mathbf{x}_0) & \dots & \partial_1 g_k(\mathbf{x}_0) \\ \partial_2 g_1(\mathbf{x}_0) & \partial_2 g_2(\mathbf{x}_0) & \dots & \partial_2 g_k(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_n g_1(\mathbf{x}_0) & \partial_n g_2(\mathbf{x}_0) & \dots & \partial_n g_k(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

abbia rango  $k$ . Allora esistono  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  tali che  $\nabla f(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^k \lambda_j \nabla g_j(\mathbf{x}_0) = 0$ .

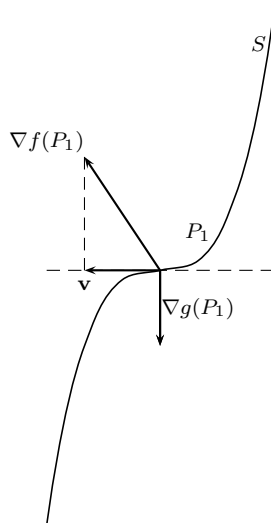
I numeri  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  vengono detti moltiplicatori di Lagrange.

Useremo solo il caso in cui il vincolo è definito da una sola equazione  $g(\mathbf{x}) = 0$ . In questo caso il teorema afferma che se  $\mathbf{x}_0$  è un estremo vincolato e  $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ , allora esiste  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  tale che  $\nabla f(\mathbf{x}_0) + \lambda_0 \nabla g(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ , ovvero  $(\lambda_0, \mathbf{x}_0)$  è un punto critico per la funzione (detta lagrangiana)

$$L(\lambda, \mathbf{x}) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$



Nel disegno, la situazione nel caso  $n = 2$ . Tratteggiate sono alcune linee di livello della funzione. La condizione trovata vuol semplicemente dire che se un punto è un estremo relativo vincolato, allora i gradienti di  $f$  e  $g$  in quel punto devono essere paralleli, come in  $P_0$ .



Altrimenti, se  $\nabla g$  e  $\nabla f$  nel punto di estremo relativo non fossero paralleli, come in  $P_1$ , allora la proiezione di  $\nabla f(P_1)$  lungo la retta tangente al vincolo in  $P_1$  sarebbe non nulla. Chiamiamo  $\mathbf{v}$  questa proiezione.

Ma allora  $f$  avrebbe una derivata direzionale positiva nella direzione di  $\mathbf{v}$  e una negativa nella direzione opposta.

Quindi muovendosi lungo il vincolo  $S$ , la funzione  $f$  crescerebbe o decrescerebbe allontanandosi da  $P_1$  nella direzione di  $\mathbf{v}$  o di  $-\mathbf{v}$ . Quindi  $P_1$  non può essere né punto di minimo né punto di massimo relativo per  $f$  soggetta al vincolo a  $S$ .

Si noti che il teorema dei moltiplicatori di Lagrange non garantisce che una soluzione esista: esso fornisce un metodo per trovare una soluzione che, per altre considerazioni fatte, deve esistere. Inoltre non si occupa dei punti in cui  $\nabla g = 0$ . Questo è lo scopo dei due esercizi seguenti: far vedere che non è detto che il metodo fornisca una soluzione (occorre stabilire per altra via che questa debba esistere) e far vedere il ruolo della condizione  $\nabla g = 0$ .

**ESEMPIO 3.48.** Trovare, se esistono, massimi e minimi assoluti di  $f(x, y) = x^2 y$  soggetta al vincolo  $S = \{g(x, y) = y - x = 0\}$ .

È facile rendersi conto che il problema dato non ha soluzione, perché la funzione  $f$  ristretta al vincolo coincide con  $f(x, x) = x^3$  che non è limitata né inferiormente né superiormente.

Tuttavia se scriviamo  $L(x, y, \lambda) = x^2y + \lambda(y - x)$  e calcoliamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= y - x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= 2xy - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= x^2 + \lambda = 0\end{aligned}$$

troviamo come soluzione  $x = 0, y = 0, \lambda = 0$ .

**ESEMPIO 3.49.** Verificare che  $(0, 0)$  è punto di minimo assoluto per  $f(x, y) = x$  soggetta al vincolo  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = y^2 - x^3 = 0\}$ .

Il fatto che  $f(0, 0) = 0$  sia minimo assoluto vincolato a  $S$  è ovvio, dal momento che se  $(x, y) \in S$ , allora  $x \geq 0$ , quindi  $f(x, y) = x \geq 0$ .

Col metodo della lagrangiana  $L(x, y, \lambda) = x + \lambda(y^2 - x^3)$ , siamo ricondotti al trovare le soluzioni di

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= y^2 - x^3 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= 1 - 3\lambda x^2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2\lambda y = 0.\end{aligned}$$

La lagrangiana non ha punti critici (l'ultima equazione ha soluzioni  $y = 0$  oppure  $\lambda = 0$ ; ma: se  $y = 0$ , si ricava dalla prima che  $x = 0$ , ma allora la seconda non è soddisfatta; se invece è  $\lambda = 0$ , la seconda di nuovo non vale).

La ragione per cui il metodo dei moltiplicatori di Lagrange non funziona è che il gradiente di  $g$  nel punto di minimo è nullo. Questo corrisponde al fatto che la funzione  $g$  è regolare, ma la sua curva di livello 0 presenta una cuspidi in  $(0, 0)$ .

Quando usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange dobbiamo quindi tener conto del fatto che un punto di estremo vincolato può essere:

- un punto in cui non sono continue le derivate parziali di  $f$  o di  $g$ ;
- un punto in cui  $\nabla g = 0$ ;
- un punto “estremo” per il vincolo;
- un punto critico della lagrangiana.

**ESEMPIO 3.50.** Determinare, se esiste, il punto della curva  $y = x^2 - 4x + \frac{7}{2}$  più vicino all'origine.

Possiamo considerare  $g(x, y) = x^2 - 4x + \frac{7}{2} - y$  come la funzione che definisce il vincolo  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$  e come funzione da minimizzare la  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,

che è il quadrato della distanza dall'origine (e ha gli stessi punti di minimo della distanza dall'origine).

Osserviamo innanzi tutto che il minimo assoluto esiste, perché  $f$  tende a  $+\infty$  se  $(x, y) \rightarrow \infty$ . Inoltre sia  $f$  sia  $g$  sono funzioni con derivate parziali continue e  $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -1$ , quindi  $\nabla g$  non è mai nullo.

In questo caso la funzione lagrangiana è

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda \left( x^2 - 4x + \frac{7}{2} - y \right),$$

e ha come punti critici i punti tali che

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^2 - 4x + \frac{7}{2} - y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x + \lambda(2x - 4) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y - \lambda = 0. \end{aligned}$$

C'è un unico punto critico della lagrangiana, in corrispondenza di  $x = 1, y = \frac{1}{2}, \lambda = 1$ . Pertanto il punto  $(1, \frac{1}{2})$  è il punto di minimo assoluto per  $f$ . Si ha  $f(1, \frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$ , quindi la distanza minima della parabola  $y = x^2 - 4x + \frac{7}{2}$  dall'origine è  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

ESEMPIO 3.51. Determinare estremi assoluti di  $f(x, y) = 2x^2 + y^2$  nell'insieme

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 - x^2 + y^2 - 5 \leq 0\}.$$

Sia  $g(x, y) = x^4 - x^2 + y^2 - 5$ . Notiamo innanzi tutto che  $f$  è continua e  $K$  è un insieme chiuso e limitato, perché

$$g(x, y) \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{21}{4},$$

quindi  $K \subset \left\{ (x, y) : |x| \leq \sqrt{\frac{1+\sqrt{21}}{2}}, |y| \leq \frac{\sqrt{21}}{2} \right\}$ .

Allora per il Teorema di Weierstrass  $f$  ha estremi assoluti in  $K$ . Occupiamoci dapprima dei punti interni, valutando i punti critici di  $f$ . Si ha

$$\nabla f(x, y) = (4x, 2y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \quad \text{e} \quad f(0, 0) = 0.$$

Occupiamoci ora dei punti sul bordo, ovvero dei punti su

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = x^4 - x^2 + y^2 - 5 = 0\}.$$

Notiamo che

$$\nabla g(x, y) = (4x^3 - 2x, 2y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) \in \left\{ (0, 0), \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \right\}$$

e che  $(0, 0), \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$  non sono su  $S$ , quindi

$$\nabla g(x, y) = (4x^3 - 2x, 2y) \neq (0, 0) \quad \forall (x, y) \in S.$$

Utilizziamo il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange e risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x^4 - x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ 4x + \lambda(4x^3 - 2x) = 0 \\ 2y + \lambda 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^4 - x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ x(2 + \lambda(2x^2 - 1)) = 0 \\ 2y(1 + \lambda) = 0 \end{cases}$$

L'ultima equazione ha soluzioni  $y = 0$  oppure  $\lambda = -1$ . Se  $y = 0$  si ricava dalla prima che  $x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{21}}{2}}$  e un certo valore di  $\lambda$  dalla seconda.

Se  $\lambda = -1$  si ricava dalla seconda equazione che  $x = 0$  oppure  $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ . Per  $x = 0$  nella prima si ottiene  $y = \pm\sqrt{5}$ ; per  $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$  nella prima si ricava  $y = \pm\sqrt{17}/2$ .

Valutiamo ora  $f$  in tutti questi punti (e ricordiamo che  $f(0, 0) = 0$ )

$$f(0, \pm\sqrt{5}) = 5 \quad f\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \pm\frac{\sqrt{17}}{2}\right) = \frac{29}{4} \quad f\left(\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{21}}{2}}, 0\right) = 1 + \sqrt{21}.$$

Ne ricaviamo che 0 è il minimo assoluto e  $\frac{29}{4}$  è il massimo assoluto.

## 7. Esercizi

- 1) Determinare il dominio e i punti di accumulazione per il dominio delle seguenti funzioni  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e, eventualmente con l'aiuto di un software, disegnare le linee di livello:

$$f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}; \quad f(x, y) = \sqrt{xy}; \quad f(x, y) = \log(1+xy); \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2-y^2}.$$

- 2) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{y}; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{2x^4+y^4}; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)}; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{2x^2-xy}{4x^2-y^2};$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} x-y; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} x^2+y; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} x^2 + \sqrt{|y|} + \cos y; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{x^2y}{x^2+(y-1)^2}.$$

- 3) Dire se i seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^2$  sono connessi e/o compatti

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y \geq 0\}, \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 \leq 4\}, \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 2\}.$$



4) Dire dove le seguenti funzioni sono differenziabili:

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2); \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0); \end{cases} \quad f(x, y) = \begin{cases} xy & x \geq 0 \\ y & x < 0; \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0); \end{cases} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

5) Determinare e classificare i punti critici delle funzioni:

$$f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2 \quad f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} - y \quad f(x, y) = \cos x + \cos y.$$

6) In quale direzione aumentano maggiormente le seguenti funzioni in ciascuno dei punti assegnati

$$f(x, y) = 3x - 4y \quad \text{in } (0, 2)$$

$$f(x, y) = \frac{x}{1 + y} \quad \text{in } (0, 0)$$

$$f(x, y) = \log(x^2 + y^2) \quad \text{in } (1, 1)?$$

7) Determinare massimo e minimo assoluti di  $2xy$  sull'insieme definito dalla disequazione  $|x| + |y| \leq 4$ .

8) (difficilino) Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti su  $\mathbb{R}^2$  per le funzioni dell'esercizio 1, seconda riga.

9) (difficile) La temperatura nel punto  $(x, y)$  è data dalla funzione

$$f(x, y) = \frac{140 + 30x^2 - 60x + 120y^2}{8 + x^2 - 2x + 4y^2}.$$

Determinare, se esiste, la temperatura minima.

10) Dobbiamo preparare un pacco postale. L'ufficio richiede che i pacchi siano a forma di parallelepipedo rettangolo in modo che la somma dell'altezza più il perimetro della base non ecceda 6 metri. Qual è il volume massimo che possiamo spedire?

11) Massimizzare, se possibile,  $x^3 y^5$  soggetta al vincolo  $x + y = 8$ .

12) Determinare la distanza minima dall'origine della superficie  $xyz^2 = 2$ .

- 13) Determinare i valori massimo e minimo di  $xy + z^2$  sulla palla  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ .
- 14) Si deve costruire una scatola di base rettangolare senza coperchio e di volume fissato  $V$  (in metri cubi), impiegando due materiali diversi. Il materiale usato per la base della scatola e per la parte frontale costa cinque volte tanto (al metro quadro) quello da usare per le rimanenti facce. Quali devono essere le dimensioni della scatola, per renderne minimo il costo?
- 15) Determinare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione  $f(x, y) = (x - 2y)^2$  soggetta al vincolo  $x^2 + 4y^2 - 1 \leq 0$ .
- 16) Sia  $S$  l'insieme  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x(x^2 - 1) = y^2\}$ . Determinare i punti di  $S$  aventi ordinata minima e quelli aventi ordinata massima.
- 17) Determinare i punti di massimo e minimo assoluto di  $f(x, y) = e^{y^2 - x^2}$  nell'insieme  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0, x^2 - y^2 \leq 0, x^2 - y - 4 \leq 0\}$ .

8. Complementi su gradiente e curve di livello,  $n = 2$ 

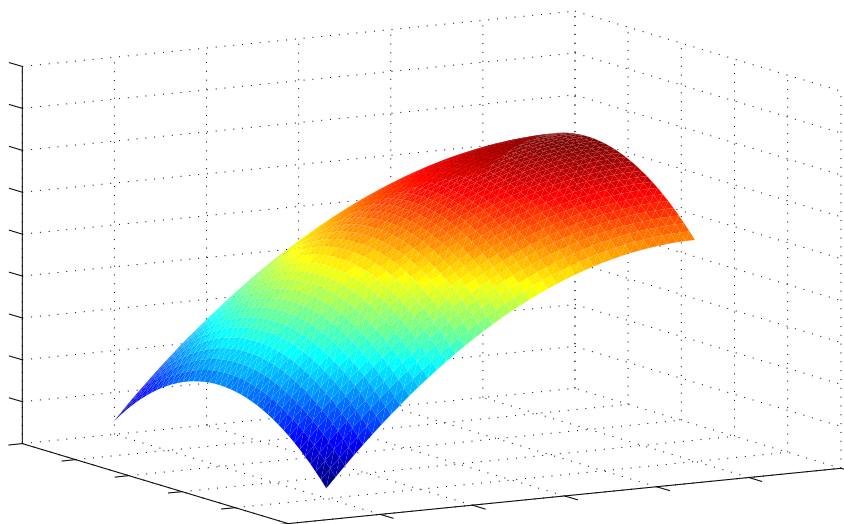
Si ricordi che il grafico di  $f$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Abbiamo detto che se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione definita su un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  e differenziabile nel punto  $\mathbf{x}_0$  di  $A$ , allora l'iperpiano di equazione

$$x_{n+1} = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle$$

è tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ .

Il vettore  $(\nabla f(\mathbf{x}_0), -1)$  è uno dei due vettori normali al piano tangente al grafico di  $f$  e quindi al grafico stesso di  $f$  nel punto  $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ .

In particolare per  $n = 2$  consideriamo il grafico di  $f$  in  $\mathbb{R}^3$ :

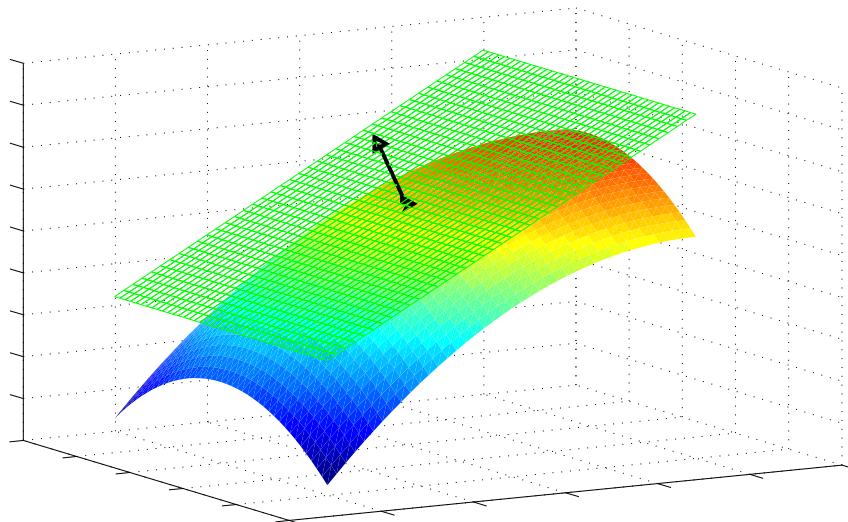


il piano tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  è la funzione lineare  $\ell(x, y) = f(x_0, y_0) + \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0)$  e ha come grafico l'insieme dei punti  $(x, y, z)$  tali che

$$z = f(x_0, y_0) + \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0).$$

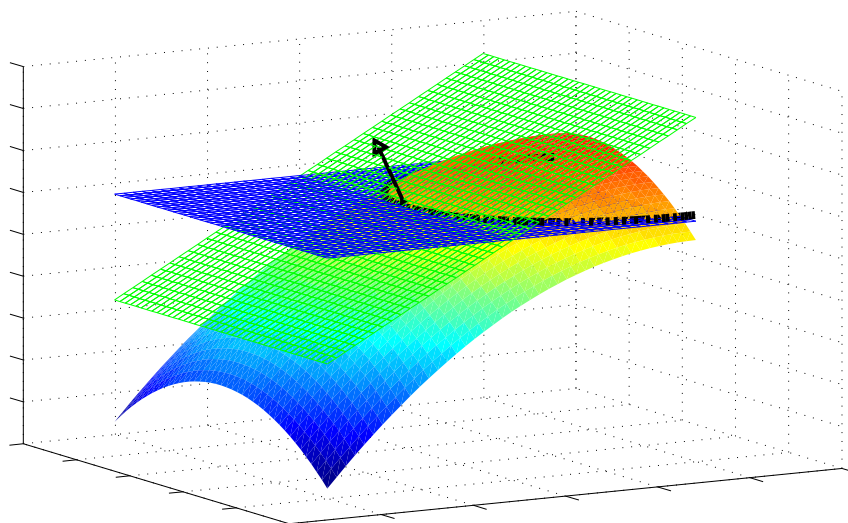
Per una migliore visualizzazione, il vettore normale al piano che abbiamo disegnato è

$$(-\nabla f(x_0, y_0), 1)$$



Sia  $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ . Sezioniamo ora il grafico di  $f$  con il piano parallelo al piano  $x, y$  a quota  $f(x_0, y_0)$  e otteniamo una curva  $C$ , in formule  $C$  è descritta da:

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = f(x_0, y_0) \end{cases}$$



Proiettiamo la curva  $C$  sul piano  $x, y$ : otteniamo così la curva di livello di  $f$  passante per il punto  $(x_0, y_0)$ , ossia la curva

$$C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = f(x_0, y_0)\}.$$

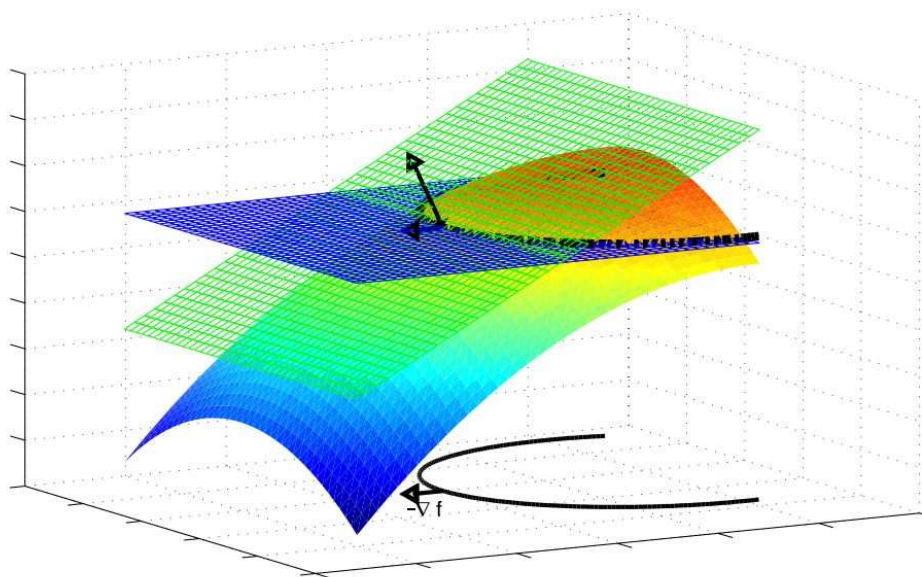
Ripetiamo la stessa operazione con il piano tangente: sezioniamo col piano  $z = f(x_0, y_0)$  e otteniamo l'intersezione di due piani

$$\begin{cases} z = f(x_0, y_0) + \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0) \\ z = f(x_0, y_0) \end{cases}$$

Siccome  $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ , i due piani non sono coincidenti e la loro intersezione è una retta. Tale retta sta nel piano tangente al grafico, quindi è tangente alla curva  $C$ . Proiettiamo ancora sul piano  $x, y$  e otteniamo la retta  $r_0$  di equazione

$$\partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

che risulta quindi essere tangente alla curva di livello  $C_0$ . Il vettore  $\nabla f(x_0, y_0)$  è ortogonale a  $r_0$  e quindi a  $C_0$  nel punto  $(x_0, y_0)$ .



Abbiamo quindi verificato che

**PROPOSIZIONE 3.52.** *Sia  $f$  differenziabile in  $(x_0, y_0)$  e  $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ . Allora la curva di livello  $\{(x, y) : f(x, y) = f(x_0, y_0)\}$  ha un vettore tangente  $\mathbf{t}$  nel punto  $(x_0, y_0)$  e il gradiente  $\nabla f(x_0, y_0)$  è perpendicolare a  $\mathbf{t}$  nel punto  $(x_0, y_0)$ .*



## CAPITOLO 4

### Calcolo integrale per funzioni di più variabili reali

La definizione di integrale definito per funzioni di una variabile reale è motivato dal problema del calcolo delle aree: si desidera calcolare l'area della regione piana delimitata dal grafico della curva  $y = f(x)$  e dall'asse delle ascisse.

Per funzioni di due variabili reali il problema è quello di calcolare il volume del solido delimitato dal piano  $xy$ , dal grafico dell'equazione  $z = f(x, y)$  e da un cilindro retto di base assegnata  $B$ .

Le prime definizioni ricalcano la teoria dell'integrale di Riemann vista lo scorso anno: inizialmente ci occuperemo del caso in cui  $B$  è un rettangolo (o, nel caso  $n$ -dimensionale, un prodotto di intervalli), definiremo somme superiori e somme inferiori in maniera ovvia. Successivamente ci occuperemo dell'integrazione su domini più generali dei soli rettangoli: triangoli, cerchi, corone circolari,... e, nei casi di dimensione maggiore, cilindri, sfere,...

#### 1. Il calcolo di volumi

Trattiamo dapprima il caso di  $\mathbb{R}^2$ , in cui si calcolano volumi. Supponiamo che  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sia una funzione limitata e, per fissare le idee, non negativa. Sia  $R$  il rettangolo  $[a, b] \times [c, d]$  e supponiamo che  $R \subseteq \text{dom } f$ .

Calcoleremo il volume della regione  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$  per successive approssimazioni dall'alto e dal basso con somme di volumi di parallelepipedi.

Dividiamo il rettangolo  $R$  in sottorettangoli scegliendo:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_r = b \quad c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_s = d$$

e chiamiamo partizione  $\mathcal{P}$  l'insieme formato da  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_r\} \times \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_s\}$ . Siano inoltre  $R_{kj}$  il rettangolo  $[x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$  e

$$m_{kj} = \inf_{(x,y) \in R_{kj}} f(x, y) \quad M_{kj} = \sup_{(x,y) \in R_{kj}} f(x, y).$$

Definiamo la somma inferiore di Riemann della funzione  $f$  relativa alla partizione  $\mathcal{P}$  scelta

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^s m_{kj} \text{area}(R_{kj}) = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^s m_{kj} (x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Questa somma fornisce un'approssimazione dal basso del volume cercato.

Analogamente, la somma superiore di Riemann della funzione  $f$  relativa alla partizione  $\mathcal{P}$  è

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^s M_{kj} \text{area}(R_{kj}) = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^s M_{kj} (x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1})$$

e fornisce un'approssimazione dall'alto del volume cercato.

Ovviamente, se  $m$  e  $M$  sono rispettivamente l'estremo inferiore e l'estremo superiore della funzione sul rettangolo  $R$  si ha

$$m(b-a)(d-c) \leq s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}) \leq M(b-a)(d-c).$$

Inoltre, se  $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$  (ovvero la suddivisione  $\mathcal{P}$  è più fine di  $\mathcal{P}'$ ) si ha

$$s(f, \mathcal{P}') \leq s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}').$$

Definiamo l'integrale inferiore di  $f$  su  $R$  mediante

$$\int_R f = \sup \{s(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partizione di } R\}$$

e l'integrale superiore di  $f$  su  $R$  mediante

$$\int_R f = \inf \{S(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partizione di } R\}.$$

**DEFINIZIONE 4.1.** La funzione limitata  $f$  si dice integrabile (secondo Riemann) sul rettangolo  $[a, b] \times [c, d]$  se l'integrale superiore e l'integrale inferiore di  $f$  su  $R$  sono uguali. In tal caso si indica tale valore con uno dei simboli  $\int_R f$ ,  $\iint_R f$ ,  $\int_R f(x, y) dx dy$ ,  $\iint_R f(x, y) dx dy$  e talvolta si parla di "integrale doppio".

Una classe importante di funzioni integrabili sui rettangoli è la classe delle funzioni continue. Non dimostriamo questo fatto; intuitivamente pensiamo che una funzione continua presenta oscillazioni che si possono facilmente controllare su un rettangolo chiuso e limitato.

**ESEMPIO 4.1.** Sia  $\chi$  la funzione definita sul quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$  da

$$\chi(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in \mathbb{Q}^2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Questa è una funzione non integrabile, perché comunque si scelga una partizione del quadrato unitario risulta sempre

$$M_{kj} = 1 \quad m_{kj} = 0,$$

da cui  $\int_{[0,1] \times [0,1]} \chi = 0$  e  $\int_{[0,1] \times [0,1]} \chi = 1$ .



La domanda che ci poniamo adesso è come si possano calcolare gli integrali doppi.

**TEOREMA 4.2** (di riduzione). *Sia  $f$  una funzione integrabile sul rettangolo  $R$ .*

a. *Se, per ogni  $y \in [c, d]$  esiste l'integrale  $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ , allora*

$$\iint_R f = \int_c^d F(y) dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

b. *Se, per ogni  $x \in [a, b]$  esiste l'integrale  $G(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ , allora*

$$\iint_R f = \int_a^b G(x) dx = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Interessante è l'interpretazione geometrica del Teorema di riduzione: si tratta di una sorta di "integrazione a fette". Infatti, per  $\bar{y}$  fissato in  $[c, d]$ , l'integrale  $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  rappresenta l'area della regione che si ottiene intersecando il piano  $y = \bar{y}$  con la regione di cui si desidera calcolare il volume. Il volume si ottiene integrando tali aree tra  $c$  e  $d$ .

Si osservi che se  $f$  è continua allora tutte le ipotesi del teorema di riduzione sono soddisfatte e che quindi

$$\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx,$$

ovvero l'ordine di integrazione non conta.

**ESEMPIO 4.3.** Integrare la funzione  $f(x, y) = x^{-3} e^{y/x}$ , sul rettangolo  $R = [1, 2] \times [0, 1]$ .

Si tratta di una funzione continua su  $R$ , quindi integrabile e possiamo integrare prima rispetto a  $x$  e poi rispetto a  $y$ , oppure viceversa, indifferentemente. Vediamo cosa ci conviene: se desideriamo integrare prima rispetto a  $x$ , occorre calcolare  $\int_1^2 x^{-3} e^{y/x} dx$ ; se desideriamo integrare prima rispetto a  $y$ , occorre calcolare  $\int_0^1 x^{-3} e^{y/x} dy$ . Siccome il secondo integrale è più facile del primo, decidiamo di integrare prima rispetto a  $y$ . Con la sostituzione  $t = y/x$  si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{-3} e^{y/x} dy &= x^{-3} \int_0^1 e^{y/x} dy \\ &= x^{-3} \int_0^{1/x} e^t x dt \\ &= x^{-2} [e^t]_0^{1/x} = x^{-2} (e^{1/x} - 1). \end{aligned}$$

Quindi, eventualmente con la sostituzione  $t = 1/x$ ,

$$\begin{aligned} \int_R f &= \int_1^2 x^{-2} (e^{1/x} - 1) dx = \int_1^2 x^{-2} e^{1/x} dx - \int_1^2 x^{-2} dx \\ &= \int_{1/2}^1 e^t dt - \int_1^2 x^{-2} dx \\ &= [e^t]_{1/2}^1 - \left[ \frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^2 = e - \sqrt{e} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

ESEMPIO 4.4. La funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & y \in \mathbb{Q}, x = 1/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è integrabile sul quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$ , ma non “a fette”. Infatti, se scegliamo partizioni formate da rettangoli di altezza sempre più sottile, diventa trascurabile l’apporto dell’integrale superiore, cosa d’altra parte credibile dal momento che desidereremmo calcolare il volume di una sorta di parallelepipedo che ha una dimensione nulla.

Si noti che non esiste  $\int_0^1 f(\frac{1}{2}, y) dy$ , quindi non ha senso per ogni  $x$  fissato l’operazione di integrazione rispetto a  $y$ .

Vogliamo ora integrare su regioni più generali, non solo sui rettangoli, ma anche su cerchi, corone circolari, ecc.

Sia  $\Omega$  una regione limitata del piano e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Per utilizzare la definizione di integrale appena vista, possiamo includere  $\Omega$  in un rettangolo  $R$  e estendere la funzione al rettangolo  $R$ , ponendola uguale a 0 al di fuori di  $\Omega$ . A livello di calcolo di volumi, nulla dovrebbe cambiare.

Data  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , definiamo  $\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R}$  ponendo

$$(4.1) \quad \tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in \Omega \\ 0 & (x, y) \in R \setminus \Omega. \end{cases}$$

**DEFINIZIONE 4.2.** Diciamo che  $f$  è integrabile in una regione limitata del piano  $\Omega$  secondo Riemann se  $\tilde{f}$  è integrabile in  $R$  e in tal caso poniamo

$$\int_{\Omega} f = \int_R \tilde{f}.$$

Osserviamo che la definizione è ben posta, ossia non dipende dal rettangolo  $R$  che adoperiamo per racchiudere l’insieme  $\Omega$ . Tuttavia non è molto maneggevole, perché  $\tilde{f}$  non sarà, in generale, continua e quindi capire se  $\tilde{f}$  sia integrabile non sarà immediato.

Introduciamo ora una classe di regioni  $\Omega$  su cui le funzioni continue sono integrabili.

**DEFINIZIONE 4.3.** Si dice dominio normale rispetto all'asse  $y$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  della forma

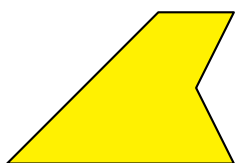
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

dove  $g_1$  e  $g_2$  sono funzioni continue sull'intervallo  $[a, b]$ .

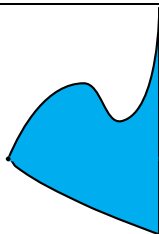
Analogamente, si dice dominio normale rispetto all'asse  $x$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  della forma

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

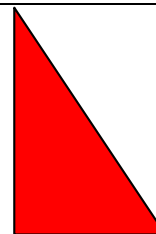
dove  $h_1$  e  $h_2$  sono funzioni continue sull'intervallo  $[c, d]$ .



Dominio normale  
rispetto all'asse  $x$



Dominio normale  
rispetto all'asse  $y$



Dominio normale  
rispetto a entrambi gli assi

**TEOREMA 4.5.** Sia  $\Omega$  un dominio normale rispetto a uno dei due assi e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora  $f$  è integrabile in  $\Omega$  e

$$\int_{\Omega} f = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \quad \text{se } \Omega \text{ è normale rispetto all'asse } y$$

$$\int_{\Omega} f = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \quad \text{se } \Omega \text{ è normale rispetto all'asse } x.$$

**ESEMPIO 4.6.** Sia  $f(x, y) = xy^2$ . Calcolare  $\int_C f$  e  $\int_S f$  dove  $C$  è il cerchio  $x^2 + y^2 \leq 1$  e  $S$  il semicerchio  $C \cap \{x \geq 0\}$ .

Si tratta di una funzione integrabile sul cerchio, perché il cerchio è normale rispetto agli assi (ad esempio  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ ) e  $f$  è continua. Anche senza calcolare l'integrale, possiamo dire che vale 0, perché  $f$  è dispari rispetto a  $x$  e il dominio è simmetrico nella  $x$ .

La funzione  $f$  è anche integrabile sul semicerchio, perché il semicerchio è normale rispetto agli assi (ad esempio  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ ) e  $f$  è continua.

Si ha, con la sostituzione  $t = 1 - x^2$ :

$$\begin{aligned} \int_S f &= \int_0^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xy^2 dy \right) dx \\ &= \int_0^1 x [y^3/3]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{2}{3} x (1-x^2)^{3/2} dx \\ &= -\frac{1}{3} \int_1^0 t^{3/2} dt = -\frac{1}{3} \left[ \frac{t^{3/2+1}}{3/2+1} \right]_1^0 = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

Notare che  $S$  è anche normale rispetto all'asse  $x$ , perché possiamo scrivere

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \right\}.$$

Usando questa decomposizione si ha

$$\begin{aligned} \int_S f &= \int_{-1}^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy^2 dx \right) dy \\ &= \int_{-1}^1 y^2 [x^2/2]_0^{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 y^2 (1-y^2) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (y^2 - y^4) dy = \frac{1}{2} \left[ \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{15}, \end{aligned}$$

ovvero lo stesso risultato, come dovevasi.

**ESEMPIO 4.7.** Sia  $f(x, y) = e^{-x^2}$ . Calcolare  $\int_T f$  dove  $T$  è il triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 2)$ .

Si tratta di una funzione continua su  $T$ , dominio normale rispetto sia all'asse  $x$ , sia rispetto all'asse  $y$ . Infatti abbiamo

$$\begin{aligned} T &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x \right\} \\ T &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2, \frac{y}{2} \leq x \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

Se consideriamo il dominio come normale rispetto all'asse  $y$  abbiamo

$$\int_T f = \int_0^1 \left( \int_0^{2x} e^{-x^2} dy \right) dx = \int_0^1 e^{-x^2} 2x dx = \left[ -e^{-x^2} \right]_0^1 = 1 - e^{-1};$$

se invece consideriamo il dominio come normale rispetto all'asse  $x$  abbiamo

$$\int_T f = \int_0^2 \left( \int_{y/2}^1 e^{-x^2} dx \right) dy = ???$$

In questo caso non sappiamo valutare, se non in maniera approssimata, l'integrale interno e quindi non possiamo portare a termine il conto facilmente (in realtà si può integrare per

parti, ma è più delicato:

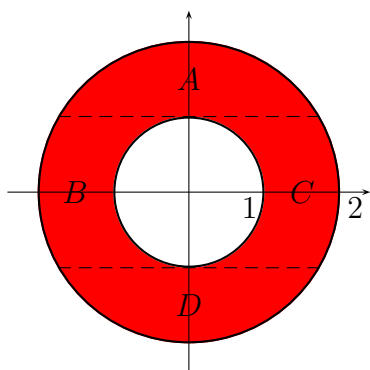
$$\begin{aligned} \int_T f &= \int_0^2 1 \left( \int_{y/2}^1 e^{-x^2} dx \right) dy = \int_0^2 1H(y) dy & H(y) &= \int_{y/2}^1 e^{-x^2} dx \\ &= [yH(y)]_0^2 - \int_0^2 y H'(y) dy \\ &= 2H(2) - \int_0^2 y H'(y) dy = \frac{1}{2} \int_0^2 y e^{-y^2/4} dy \end{aligned}$$

Infatti  $H(2) = \int_1^2 e^{-x^2} dx = 0$  e  $H'(y) = -\frac{1}{2}e^{-y^2/4}$ ; da cui

$$\int_T f = \frac{1}{2} \int_0^2 y e^{-y^2/4} dy = \int_0^1 e^{-s} ds = 1 - e^{-1},$$

come prima).

Tutto quanto visto sinora vale anche se il dominio  $\Omega$  non è normale rispetto agli assi, ma si può scrivere come unione finita di domini normali rispetto agli assi, che si sovrappongono solo sui bordi, sfruttando l'additività dell'integrale.



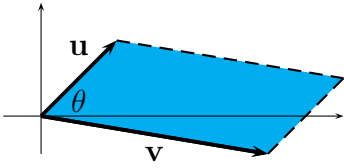
Ad esempio, un poligono può essere scritto come unione finita di domini normali rispetto agli assi. Oppure una corona circolare: non è normale rispetto a nessuno degli assi, tuttavia è unione di quattro domini normali, ad esempio come in figura rispetto all'asse  $x$ . Risulta

$$\int_{1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2} f(x, y) dx dy = \int_A f + \int_B f + \int_C f + \int_D f.$$

Notiamo anche che, in coordinate polari  $(r, \theta)$ , sarebbe molto facile descrivere la corona circolare: basterebbe richiedere  $1 \leq r \leq 2$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Potremmo quindi pensare di scrivere l'integrale sulla corona della funzione  $f(x, y)$  come  $\int_1^2 \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta dr$ . Questa formula però non è quella giusta. Come vedremo nella prossima sezione, manca un fattore di correzione nella misura delle aree.

## 2. Teorema di cambiamento di variabili

Per capire meglio a cosa è legato il fattore di correzione di cui poco sopra, ripassiamo le trasformazioni lineari.



Siano  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  due vettori linearmente indipendenti. Allora il parallelogramma  $P$  generato da  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  ha area  $\left| \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \right|$ .

Infatti, se  $\theta$  è l'angolo compreso tra  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ , allora

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

e l'area del parallelogramma è data da

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| |\sin \theta| &= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sqrt{1 - \left( \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right)^2} \\ &= \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2} = \sqrt{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2)^2} \\ &= \sqrt{u_1^2 v_1^2 + u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 - u_1^2 v_1^2 - u_2^2 v_2^2 - 2u_1 v_1 u_2 v_2} \\ &= \sqrt{(u_1 v_2 - u_2 v_1)^2} = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \right|. \end{aligned}$$

Chiamiamo  $U$  la matrice  $\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ , cosicché  $\text{area}(P) = |\det U|$ .

Applichiamo ora una trasformazione lineare, legata alla matrice invertibile  $L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ .

Il trasformato secondo la mappa  $L$  del parallelogramma  $P$  generato dai vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  è ancora un parallelogramma, che chiamiamo  $L(P)$  e è generato dai vettori  $L\mathbf{u}$  e  $L\mathbf{v}$ . Quindi l'area di  $L(P)$  è data da  $|\det(L\mathbf{u} \ L\mathbf{v})|$ . D'altra parte

$$\begin{aligned} \text{area}(L(P)) &= \left| \det \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 & a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 & a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{pmatrix} \right| = |\det(LU)| \\ &= |\det L| \text{area}(P). \end{aligned}$$

Quindi la trasformazione lineare associata alla matrice  $L$  dilata le aree di un fattore  $|\det L|$ .

Se consideriamo la trasformazione che si ottiene facendo seguire alla trasformazione lineare associata alla matrice  $L$  una traslazione, ancora otteniamo una trasformazione che dilata le aree di un fattore  $|\det L|$ , perché le traslazioni non variano le aree.

Esaminiamo ora il problema del cambiamento di variabile in un integrale.

Supponiamo innanzi tutto di considerare una trasformazione lineare invertibile, ovvero legata come prima alla matrice  $L$  di determinante non nullo,

$$\begin{cases} x = \varphi(s, t) = a_{11}s + a_{12}t \\ y = \psi(s, t) = a_{21}s + a_{22}t. \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

e approssimiamo l'integrale con una sua somma (ad esempio superiore). Se  $\Omega$  è contenuto nel rettangolo  $R$  e  $\tilde{f}$  è l'estensione di  $f$  a  $R$  come nella 4.1, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f &= \int_R \tilde{f} \simeq \sum_{k,j} \left( \sup_{(x,y) \in R_{kj}} \tilde{f}(x, y) \right) \text{area}(R_{kj}) \\ &= \sum_{k,j} \left( \sup_{(x,y) \in R_{kj}} \tilde{f} \circ L \circ L^{-1}(x, y) \right) \text{area}(R_{kj}) \\ &= \sum_{k,j} \left( \sup_{(s,t) \in L^{-1}R_{kj}} \tilde{f} \circ L(s, t) \right) \text{area}(R_{kj}) \end{aligned}$$

indichiamo con  $P_{kj} = L^{-1}R_{kj}$  il parallelogramma trasformato a partire da  $R_{kj}$ ; siccome  $L$  è lineare,  $\text{area}(P_{kj}) = |\det(L^{-1})| \text{area}(R_{kj}) = |\det L|^{-1} \text{area}(R_{kj})$  e si ottiene

$$\begin{aligned} &= \sum_{k,j} \left( \sup_{(s,t) \in P_{kj}} \tilde{f} \circ L(s, t) \right) |\det L| \text{area}(P_{kj}) \\ &\simeq \int_{L^{-1}(R)} \tilde{f} \circ L(s, t) |\det L| \, ds \, dt \\ &= \int_{L^{-1}(\Omega)} f \circ L(s, t) |\det L| \, ds \, dt. \end{aligned}$$

Consideriamo ora cambiamenti di variabili più generali, ovvero supponiamo che  $A$  sia un insieme aperto limitato e  $T : A \rightarrow T(A) \subseteq \mathbb{R}^2$  una mappa biunivoca (cioè iniettiva e suriettiva). La mappa  $T$  è una funzione a valori vettoriali  $T(s, t) = (\varphi(s, t), \psi(s, t))$  e la pensiamo come il cambiamento di variabile

$$(4.2) \quad \begin{cases} x = \varphi(s, t) \\ y = \psi(s, t). \end{cases}$$

Sia ora  $\Omega$  un sottoinsieme di  $T(A) \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e integrabile su  $\Omega$ . Desideriamo sapere come si trasforma l'integrale  $\int_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy$  operando il cambiamento di variabili  $T$  dato dalla formula (4.2).

Ci aspettiamo che diventi un integrale esteso alla regione  $T^{-1}(\Omega)$  della funzione  $g(s, t) = f(\varphi(s, t), \psi(s, t))$ .

Per capire come si trasforma l'elemento che "misura le aree" (cioè  $dx \, dy$ ), immaginiamo di fissare un punto  $(s_0, t_0)$  e un piccolo intorno di forma quadrata  $Q$  di questo punto e valutare

come si trasforma l'area di  $Q$ . Approssimiamo le funzioni  $\varphi$  e  $\psi$  con i loro sviluppi del primo ordine centrati in  $(s_0, t_0)$

$$\begin{aligned}\varphi(s, t) &\simeq \varphi(s_0, t_0) + \partial_1\varphi(s_0, t_0)(s - s_0) + \partial_2\varphi(s_0, t_0)(t - t_0) \\ \psi(s, t) &\simeq \psi(s_0, t_0) + \partial_1\psi(s_0, t_0)(s - s_0) + \partial_2\psi(s_0, t_0)(t - t_0).\end{aligned}$$

Il secondo membro dell'ultima formula è una trasformazione lineare  $L$  composta con traslazioni. In formule,  $L$  è associata alla matrice

$$J_T(s_0, t_0) = \begin{pmatrix} \partial_1\varphi(s_0, t_0) & \partial_2\varphi(s_0, t_0) \\ \partial_1\psi(s_0, t_0) & \partial_2\psi(s_0, t_0) \end{pmatrix},$$

che si chiama matrice jacobiana della trasformazione  $T$ , calcolata in  $(s_0, t_0)$ . Pertanto, per quanto visto sulle trasformazioni lineari,

$$dxdy \simeq \text{area}(T(Q)) \simeq \text{area}(L(Q)) = |\det(J_T(s_0, t_0))| \text{area}(Q) \simeq |\det(J_T(s, t))| dsdt.$$

Questo è una parziale giustificazione del

**TEOREMA 4.8** (di cambiamento di variabili). *Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^2$  e  $T : A \rightarrow T(A) \subseteq \mathbb{R}^2$  una mappa biunivoca di classe  $C^1(A)$ , ovvero le funzioni  $\varphi$  e  $\psi$  abbiano derivate parziali continue in  $A$ . Sia inoltre  $\det J_T \neq 0$  in  $A$  e sia  $\Omega$  un dominio semplice rispetto a uno degli assi contenuto in  $T(A)$ . Allora se  $f$  è una funzione continua e integrabile in  $\Omega$ , vale*

$$\int_{\Omega} f(x, y) dxdy = \int_{T^{-1}(\Omega)} f(\varphi(s, t), \psi(s, t)) |\det(J_T(s, t))| dsdt.$$

Un esempio molto importante di cambiamento di variabili è la mappa  $T(r, \theta)$  descritta dalle relazioni

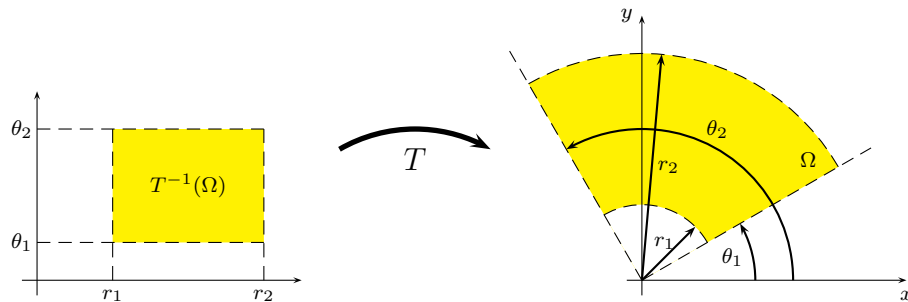
$$\begin{cases} x = \varphi(r, \theta) = r \cos \theta \\ y = \psi(r, \theta) = r \sin \theta, \end{cases}$$

con  $A = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ , ovvero il passaggio a coordinate polari. In tal caso,  $\det(J_T) = r$ . Quindi

$$(4.3) \quad \int_{\Omega} f(x, y) dxdy = \int_{T^{-1}(\Omega)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta,$$

tutte le volte che  $\Omega$  è un sottoinsieme di  $T(A) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ .





Notiamo anche che avremmo potuto definire la stessa trasformazione  $T(r, \theta)$  e considerare come aperto  $A$  l'insieme  $A' = (0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$ . In questo caso, la formula (4.3) sarebbe stata valida per  $\Omega$  sottoinsieme di  $T(A) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$ . In realtà nella formula (4.3) l'insieme  $\Omega$  può essere un qualsiasi sottoinsieme limitato e unione finita di domini normali rispetto a uno degli assi. Infatti possiamo scrivere  $\int_{\Omega} f$  come somma  $\int_{\Omega'} f + \int_{\Omega''} f$ , dove  $\Omega'$  è l'intersezione di  $\Omega$  con l'asse delle ascisse:  $\Omega' = \Omega \cap \{(x, 0) : x \geq 0\}$  e  $\Omega'' = \Omega \setminus \Omega'$ . D'altra parte  $\int_{\Omega'} f = 0$ , perché rappresenta il volume di un cilindro con base di area nulla.

ESEMPIO 4.9. Calcolare il volume di un cono circolare retto di base un cerchio di raggio 2 e altezza 3. Possiamo pensare al cono come alla differenza tra il cilindro

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 3, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

che ha volume  $12\pi$  e il sottoinsieme

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq \frac{3}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$

Calcoliamo il volume di  $S$ . Si ha

$$\begin{aligned} \text{vol}(S) &= \int_{\{x^2+y^2 \leq 4\}} \frac{3}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = \frac{3}{2} \int_{\{0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta < 2\pi\}} r \, r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^2 r^2 \, dr \int_0^{2\pi} d\theta = 8\pi. \end{aligned}$$

Quindi il volume del cono risulta  $12\pi - 8\pi = 4\pi$ .

ESEMPIO 4.10. Calcolare  $\int_{\mathcal{T}} e^{\frac{y-x}{x+y}} \, dx \, dy$ , dove  $\mathcal{T}$  è il parallelogramma delimitato dagli assi e dalle rette  $x + y = 1$ ,  $x + y = 2$ . Possiamo scrivere

$$\mathcal{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, \max(1 - x, 0) \leq y \leq 2 - x\},$$

ma gli integrali da calcolare sarebbero difficili. La funzione suggerisce le sostituzioni  $s = y - x$ ,  $t = x + y$ . Questa trasformazione è lineare e biunivoca, perché associata alla matrice  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Il parallelogramma  $\mathcal{T}$  diventa la regione  $\mathcal{S} = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq t \leq 2, -t \leq s \leq t\}$ .

Quindi, poiché  $|\det J| = \left| \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}$ , si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{T}} e^{\frac{y-x}{x+y}} dx dy &= \int_{\mathcal{S}} e^{\frac{s}{t}} \frac{1}{2} ds dt = \frac{1}{2} \int_1^2 \left( \int_{-t}^t e^{\frac{s}{t}} ds \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 (et - e^{-1}t) dt = \frac{3}{4} \left( e - \frac{1}{e} \right). \end{aligned}$$

ESEMPIO 4.11. Gli integrali doppi si possono utilizzare per calcolare aree: l'area di una certa regione  $\Omega$  del piano, unione finita di domini normali rispetto agli assi, non è altro che  $\int_{\Omega} 1 dx dy$ .

Calcoliamo, ad esempio, l'area dell'ellisse  $\mathcal{E}$  di equazione  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ , con  $a, b > 0$ . Si ha

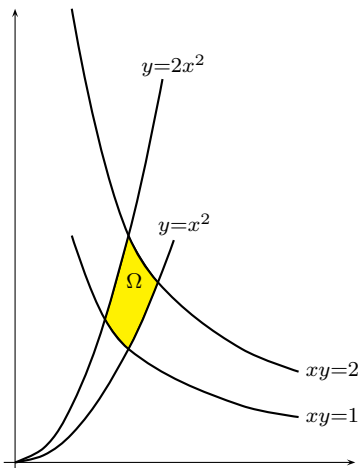
$$\text{area}(\mathcal{E}) = \int_{\mathcal{E}} 1 dx dy.$$

Con la sostituzione  $s = x/a$ ,  $t = y/b$ , dato che  $|\det J| = \left| \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right| = ab$ , otteniamo

$$\begin{aligned} &= \int_{s^2+t^2 \leq 1} 1 ab ds dt \\ &= \pi ab. \end{aligned}$$

Potevamo anche calcolare l'ultimo integrale passando in coordinate polari  $\int_{s^2+t^2 \leq 1} 1 ds dt = \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) r dr = \pi$ , ma perché fare tanta fatica, quando si tratta semplicemente dell'area del cerchio di raggio 1.

ESEMPIO 4.12. Calcolare  $\int_{\Omega} xy^2 dx dy$ , dove  $\Omega$  è la regione di piano compresa tra i grafici delle funzioni  $1/x$ ,  $2/x$ ,  $x^2$ ,  $2x^2$ , come disegnato in figura.



Conviene una trasformazione che rettifichi le curve in figura: consideriamo pertanto il cambiamento di variabili

$$s = \frac{x^2}{y} \quad t = xy.$$

Tale trasformazione risulta biunivoca, con inversa data da

$$x = \sqrt[3]{st} \quad y = \sqrt[3]{\frac{t^2}{s}}.$$

Inoltre

$$\det J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{t}{s^2}} & \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{s}{t^2}} \\ -\frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{t^2}{s^4}} & \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{st}} \end{pmatrix} = \frac{1}{3s}.$$

Allora, notando che  $\frac{1}{2} \leq s = \frac{x^2}{y} \leq 1$  e  $1 \leq t = xy \leq 2$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} xy^2 dx dy &= \int_{\left[\frac{1}{2}, 1\right] \times [1, 2]} t^{5/3} s^{-1/3} \frac{1}{3s} ds dt \\ &= \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 s^{-4/3} ds \int_1^2 t^{5/3} dt \\ &= \frac{3}{8} \left( \sqrt[3]{2} - 1 \right) \left( 4\sqrt[3]{4} - 1 \right). \end{aligned}$$

**2.1. Complementi sulle funzioni a valori vettoriali.** Nella parte precedente del corso non abbiamo mai focalizzato l'attenzione sulle funzioni a valori vettoriali: nel calcolo dei limiti abbiamo semplicemente detto che, siccome possiamo effettuare i conti sulle singole componenti, ci basta trattare le funzioni a valori reali; nel calcolo differenziale la nostra attenzione si è rivolta a problemi di massimo e di minimo, quindi abbiamo considerato solo funzioni a valori reali (solo per queste ha senso porsi il problema di trovare un valore massimo/minimo). Tuttavia la nozione di differenziabilità (nel senso dell'approssimazione con una funzione lineare) ha senso anche per funzioni a valori vettoriali.

**DEFINIZIONE 4.4.** Si dice che  $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è differenziabile (o derivabile Frechét) nel punto  $\mathbf{x}_0$  interno al dominio di  $\mathbf{F}$  se esiste una matrice  $\mathbf{D}$  di tipo  $m \times n$  e una funzione  $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$  definita in un intorno  $U_0$  di  $\mathbf{x}_0$  in  $\mathbb{R}^n$  a valori in  $\mathbb{R}^m$  tali che

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{D}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \Omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in U_0$$

con  $\lim_{\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{0}} \Omega(\mathbf{t}) = \Omega(\mathbf{0}) = 0$ .

Ricordiamo che i vettori che consideriamo sono vettori colonna. In particolare notiamo che il prodotto della matrice  $\mathbf{D} = (d_{ij})$  con il vettore  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  è un prodotto righe per colonne, ovvero

$$\mathbf{D}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{01} \\ x_2 - x_{02} \\ \vdots \\ x_n - x_{0n} \end{pmatrix}.$$

La matrice  $\mathbf{D}$  dipende sia da  $\mathbf{F}$  sia da  $\mathbf{x}_0$  e si chiama matrice Jacobiana di  $\mathbf{F}$  in  $\mathbf{x}_0$ ; nelle formule si indica con il simbolo  $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)$ .

Si può dimostrare facilmente che se le funzioni  $f_1, \dots, f_m$  sono differenziabili in  $\mathbf{x}_0$ , allora anche  $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_m)$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  e che la matrice Jacobiana di  $\mathbf{F}$  ha come righe

$\nabla f_j(\mathbf{x}_0)$ , ossia

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\mathbf{x}_0) \\ \nabla f_2(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(\mathbf{x}_0) & \partial_2 f_1(\mathbf{x}_0) & \cdots & \partial_n f_1(\mathbf{x}_0) \\ \partial_1 f_2(\mathbf{x}_0) & \partial_2 f_2(\mathbf{x}_0) & \cdots & \partial_n f_2(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(\mathbf{x}_0) & \partial_2 f_m(\mathbf{x}_0) & \cdots & \partial_n f_m(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

(e viceversa, se  $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_m)$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  allora tutte le funzioni  $f_1, \dots, f_m$  sono differenziabili in  $\mathbf{x}_0$ ).

In particolare, se  $n = m = 1$  allora la matrice Jacobiana si riduce alla derivata di  $f$  in  $x_0$ .

Se  $\mathbf{F}$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ , la formula

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \Omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in U_0$$

con  $\lim_{\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{0}} \Omega(\mathbf{t}) = \Omega(\mathbf{0}) = 0$ , fornisce lo sviluppo di Taylor di  $\mathbf{F}$  centrato in  $\mathbf{x}_0$  di ordine 1.

Diamo ora una versione più generale del teorema della funzione composta: supponiamo che  $\mathbf{G} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\mathbf{F} : B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  tali che  $\mathbf{G}(A) \subseteq B$ , in modo da poter considerare la funzione composta  $\mathbf{F} \circ \mathbf{G} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

**TEOREMA 4.13** (della funzione composta). *Sia  $\mathbf{x}_0$  un punto interno a  $A$  e sia  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{G}(\mathbf{x}_0)$  un punto interno a  $B$ . Se  $\mathbf{G}$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{F}$  è differenziabile in  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{G}(\mathbf{x}_0)$ , allora  $\mathbf{F} \circ \mathbf{G}$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  e*

$$J_{\mathbf{F} \circ \mathbf{G}}(\mathbf{x}_0) = J_{\mathbf{F}}(\mathbf{y}_0) J_{\mathbf{G}}(\mathbf{x}_0) = J_{\mathbf{F}}(\mathbf{G}(\mathbf{x}_0)) J_{\mathbf{G}}(\mathbf{x}_0).$$

Si intende che la matrice  $J_{\mathbf{F} \circ \mathbf{G}}(\mathbf{x}_0)$  (che è di tipo  $k \times n$ ) si ottiene facendo il prodotto righe per colonne della matrice  $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{y}_0)$  (che è di tipo  $k \times m$ ) per la matrice  $J_{\mathbf{G}}(\mathbf{x}_0)$  (che è di tipo  $m \times n$ ).

Nel paragrafo precedente abbiamo considerato in particolare i cambi di variabile in  $\mathbb{R}^2$ , ossia funzioni a valori vettoriali in cui  $n = m$  biunivoche. In questo caso la matrice Jacobiana, come abbiamo visto, è quadrata.

**2.2. Invertibilità e matrice Jacobiana.** Nel caso di una variabile, per sapere se una funzione regolare  $f : (a, b) \rightarrow f(a, b)$  è biunivoca, ci basta controllare che abbia derivata non nulla in ogni punto di  $(a, b)$ . Questo corrisponde a dire che in ogni punto l'approssimante lineare di  $f$  è una mappa invertibile.

Nel caso di più variabili, dire che l'approssimante lineare (in un punto) di  $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{F}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$  è una mappa invertibile vuol dire che la matrice Jacobiana di  $\mathbf{F}$  in quel punto ha determinante non nullo. Infatti, nel punto  $\mathbf{x}_0$  l'approssimazione lineare è

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Proviamo a invertirla, ovvero, dato  $\mathbf{y}$  in  $\mathbf{F}(A)$  cerchiamo  $\mathbf{x}$  tale che

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{y}.$$

Deve risultare  $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{y} - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ . Questo è un sistema lineare, che ammette sempre soluzione se e solo se  $\det J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0) \neq 0$ .

Tuttavia, se  $n > 1$ , non è detto che una funzione  $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{F}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$  con determinante Jacobiano non nullo in ogni punto di  $A$  sia biunivoca. Ad esempio

$$\mathbf{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad \mathbf{F}(\rho, \theta) = (e^\rho \cos \theta, e^\rho \sin \theta)$$

ha determinante Jacobiano  $\det J_{\mathbf{F}}(\rho, \theta) = e^\rho$  sempre non nullo, ma  $\mathbf{F}$  non è iniettiva ( $\mathbf{F}(\rho, \theta) = \mathbf{F}(\rho, \theta + 2\pi)$ ).

Si può dimostrare che se  $\det J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0) \neq 0$ , allora  $\mathbf{F}$  è “localmente” invertibile in  $\mathbf{x}_0$ , ossia esiste un intorno  $U$  di  $\mathbf{x}_0$  tale che  $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbf{F}(U)$  sia biunivoca.

Ricordiamo che il viceversa di queste affermazioni non è vero: ossia non è detto che se  $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{F}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$  è biunivoca, allora il suo determinante Jacobiano è non nullo in ogni punto di  $A$  (neanche per  $n = 1$ , ad esempio  $x \mapsto x^3$  su  $A = \mathbb{R}$  è biunivoca ma ha derivata nulla in  $x = 0$ ).

ESEMPIO 4.14. Sappiamo che  $\int_{x^2+y^2 \leq 1} 1 \, dx \, dy = \pi$ . Immaginiamo di voler calcolare questo integrale effettuando il cambio di variabili

$$\mathbf{T} \begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv \end{cases} \quad \text{con matrice Jacobiana} \quad J_{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ -2v & 2u \end{pmatrix}$$

Il trasformato del cerchio diventa  $(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 \leq 1$  cioè  $(u^2 + v^2)^2 \leq 1$ , ancora il cerchio unitario. Pertanto

$$\pi = \int_{x^2+y^2 \leq 1} 1 \, dx \, dy = \int_{u^2+v^2 \leq 1} 4(u^2 + v^2) \, du \, dv = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 4r^2 r \, dr \, d\theta = 2\pi.$$

Dove è l'errore?

### 3. Integrali impropri (con $n = 2$ )

Trattiamo inizialmente e più diffusamente il caso in cui il dominio di integrazione  $\Omega$  non è limitato e  $f$  è una funzione continua e **non negativa**.

Segue il caso in cui il dominio di integrazione  $\Omega$  è limitato,  $f$  è non negativa, ma non è limitata.

**3.1. Funzioni continue su domini non limitati.** Sia quindi  $\Omega$  un insieme unione finita di domini normali rispetto a uno degli assi, ma non limitato. Indichiamo con  $B_R(0)$  il cerchio centrato nell'origine di raggio  $R$ , ossia

$$B_R(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Allora  $\Omega \cap B_R(0)$  è un insieme limitato e unione finita di domini normali rispetto agli assi. Sia  $f$  una funzione non negativa che sia continua in  $\Omega$  (o anche solamente integrabile in  $\Omega \cap B_R(0)$  per ogni  $R > 0$ ).

DEFINIZIONE 4.5. Diremo che  $f$  è integrabile in senso improprio in  $\Omega$  se esiste finito il

$$(4.4) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Omega \cap B_R(0)} f(x, y) \, dx \, dy.$$

In tal caso poniamo

$$\int_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Omega \cap B_R(0)} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Osserviamo che avremmo potuto anche “tagliare  $\Omega$ ” con una famiglia di sottoinsiemi che non necessariamente siano cerchi. Ad esempio, avremmo potuto considerare una famiglia composta da quadrati sempre più grandi, ponendo

$$Q_R(0) = \{(x, y) : |x| \leq R, |y| \leq R\}$$

e usando i quadrati  $Q_R(0)$  al posto dei cerchi  $B_R(0)$ .

Ebbene, avremmo ottenuto lo stesso risultato, ovvero: esiste finito il limite della formula (4.4) se e solo se esiste finito  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Omega \cap Q_R(0)} f \, dx \, dy$  e sono uguali. Questo succede perché le famiglie dei cerchi e dei quadrati sono “confrontabili”, ossia ogni quadrato è contenuto in un cerchio di raggio opportuno e, viceversa, ogni cerchio è contenuto in un quadrato di ampiezza opportuna.

ESEMPIO 4.15. Per quali  $\alpha > 0$  risulta integrabile in senso improprio sulla corona circolare  $\Omega = \{x^2 + y^2 > 1\}$  la funzione  $f_\alpha(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}}$ ? La funzione  $f_\alpha$  è continua in  $\Omega$ , unione di due domini normali rispetto agli assi. Passando in coordinate polari otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \cap B_R(0)} f_\alpha(x, y) \, dx \, dy &= \int_{1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} \, dx \, dy \\ &= \int_{[1, R] \times [0, 2\pi)} \frac{1}{r^\alpha} r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^R r^{1-\alpha} \, dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} 2\pi \left[ \frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right]_1^R & \alpha \neq 2 \\ 2\pi [\log r]_1^R & \alpha = 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{2\pi}{2-\alpha} (R^{2-\alpha} - 1) & \alpha \neq 2 \\ 2\pi \log R & \alpha = 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Quindi: se  $0 < \alpha \leq 2$ , allora  $\int_{\Omega \cap B_R(0)} f_\alpha(x, y) dx dy \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} +\infty$ , ovvero  $f_\alpha$  non risulta integrabile in  $\Omega$ .

Se invece  $\alpha > 2$ , allora  $\int_{\Omega \cap B_R(0)} f_\alpha(x, y) dx dy \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{\alpha-2}$ , quindi  $f_\alpha$  è integrabile in  $\Omega$  e

$$\int_{\Omega} f_\alpha(x, y) dx dy = \frac{2\pi}{\alpha-2}.$$

Se  $f$  non fosse non negativa, scriviamo  $f^+ = \max(f, 0)$  e  $f^- = -\min(f, 0)$ . Diremo che  $f = f^+ - f^-$  è integrabile in senso improprio su  $\Omega$  se  $f^\pm$  lo sono e poniamo

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\Omega} f^+(x, y) dx dy - \int_{\Omega} f^-(x, y) dx dy.$$

C'è un facile criterio per stabilire se una funzione sia integrabile, analogo al criterio del confronto asintotico visto l'anno scorso per integrali impropri di una variabile.

**TEOREMA 4.16 (del confronto).** *Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua nella corona  $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$ .*

i) *Supponiamo che esistano  $\alpha > 2$  e  $C \geq 0$  tali che*

$$|f(x, y)| \leq C \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} \quad \forall (x, y) \in \Omega,$$

*allora  $f$  è integrabile in  $\Omega$ .*

ii) *Se esistono  $\alpha \leq 2$  e  $C > 0$  tali che*

$$f(x, y) \geq C \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} \quad \forall (x, y) \in \Omega,$$

*allora  $f$  non è integrabile in  $\Omega$ .*

**ESEMPIO 4.17.** (Importante) Calcolare  $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy$ . Siccome la funzione  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/2}$  soddisfa banalmente le ipotesi del Teorema 4.16, allora  $f$  è integrabile in  $\mathbb{R}^2$ , che è un dominio normale rispetto agli assi. Cerchiamo di calcolare questo integrale. Innanzi tutto, abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R(0)} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy$$

e, passando in coordinate polari, otteniamo

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[0,R] \times [0,2\pi)} e^{-r^2/2} r \, dr \, d\theta \\
 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \left( \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r \, d\theta \right) dr \\
 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R 2\pi e^{-r^2} r \, dr \\
 &= 2\pi.
 \end{aligned}$$

Allo stesso risultato dobbiamo pervenire adoperando la famiglia dei quadrati  $Q_R(0)$ .

$$\begin{aligned}
 2\pi &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} \, dx \, dy \\
 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{Q_R(0)} e^{-(x^2+y^2)/2} \, dx \, dy \\
 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \left( \int_{-R}^R e^{-x^2/2} e^{-y^2/2} \, dx \right) dy \\
 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \int_{-R}^R e^{-x^2/2} \, dx \right) \left( \int_{-R}^R e^{-y^2/2} \, dy \right) \\
 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \int_{-R}^R e^{-x^2/2} \, dx \right)^2 \\
 &= \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \, dx \right)^2.
 \end{aligned}$$

Questo conto porta a una formula molto importante per i probablisti:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \, dx = \sqrt{2\pi}.$$

Il prossimo esempio mostra come il Teorema 4.16 del confronto, parte ii) non funzioni qualora l'insieme non sia una corona (o almeno un settore di una corona).

**ESEMPIO 4.18.** Sia  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, 0 < y < e^{-x}\}$ . Verificare che  $f(x, y) = 1$  è integrabile in  $\Omega$  (sebbene non sia neanche infinitesima). Calcoliamo questo integrale, utilizzando la famiglia dei quadrati. Innanzi tutto, abbiamo

$$\int_{\Omega} 1 \, dx \, dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{Q_R(0) \cap \Omega} 1 \, dx \, dy$$



siccome, per  $R$  grande,  $Q_R(0) \cap \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < R, 0 < y < e^{-x}\}$ , otteniamo

$$\begin{aligned} &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \int_0^{e^{-x}} dy dx \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{-x} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} (1 - e^{-R}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

**3.2. Funzioni non limitate superiormente: singolarità isolate.** Supponiamo che  $\Omega$  sia una regione limitata,  $f$  sia non negativa e non risulti limitata in  $\Omega$ , ma sia continua al di fuori di un insieme di misura bidimensionale nulla (come un insieme finito di punti, oppure un segmento).

Indichiamo con  $B_R(x_0, y_0)$  il cerchio centrato in un punto  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  di raggio  $R$  e con  $Q_R(x_0, y_0)$  il quadrato centrato in  $(x_0, y_0)$  di semilato  $R$ , ossia

$$\begin{aligned} B_R(x_0, y_0) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2\} \\ Q_R(x_0, y_0) &= \{(x, y) : |x - x_0| \leq R, |y - y_0| \leq R\}. \end{aligned}$$

Il caso più facile è quello in cui  $f$  presenta una singolarità isolata in  $(x_0, y_0)$ . In questo caso diremo che  $f$  è integrabile in  $\Omega$  quando esiste finito

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus B_R(x_0, y_0)} f(x, y) dx dy.$$

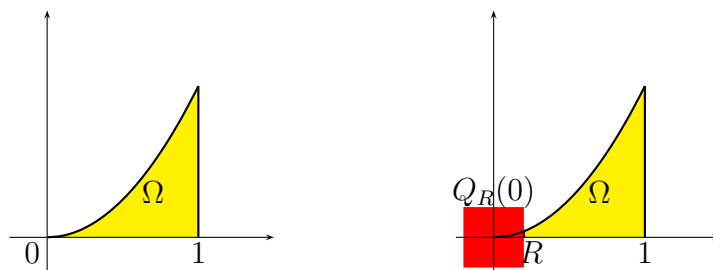
In tal caso poniamo

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{R \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus B_R(x_0, y_0)} f(x, y) dx dy.$$

Equivalentemente,

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{R \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus Q_R(x_0, y_0)} f(x, y) dx dy.$$

**ESEMPIO 4.19.** Dire se  $f(x, y) = \frac{1}{(x+y)^2}$  è integrabile in senso improprio sull'insieme  $\Omega = \{(x, y) : x \in (0, 1], 0 < y < x^2\}$ .



La funzione  $f$  è continua in  $\Omega$ , ma presenta nell'origine una singolarità. Si ha  $\Omega \setminus Q_R(0) = \{(x, y) : x \in (R, 1], 0 < y < x^2\}$  e valutiamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus Q_R(0)} f(x, y) dx dy &= \int_R^1 \int_0^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2} dy dx \\ &= \int_R^1 -\frac{1}{(x+y)} \Big|_0^{x^2} dx \\ &= \int_R^1 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+x^2} \right) dx \\ &= \int_R^1 \frac{1}{x+1} dx \\ &= \log 2 - \log(1+R) \xrightarrow{R \rightarrow 0} \log 2. \end{aligned}$$

Quindi  $f$  è integrabile in senso improprio in  $\Omega$  e  $\int_{\Omega} f = \log 2$ .

ESEMPIO 4.20. Dire se  $f(x, y) = \frac{1}{xy}$  è integrabile in senso improprio sull'insieme  $\Omega = \{(x, y) : x \in (0, 1), x^2 < y < x\}$ . La funzione  $f$  è continua in  $\Omega$ , ma presenta nell'origine una singolarità. Si ha  $\Omega \setminus Q_R(0) = \{(x, y) : x \in (R, 1), x^2 < y < x\}$  e valutiamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus Q_R(0)} f(x, y) dx dy &= \int_R^1 \int_{x^2}^x \frac{1}{xy} dy dx \\ &= \int_R^1 \frac{1}{x} \log y \Big|_{x^2}^x dx \\ &= \int_R^1 -\frac{\log x}{x} dx \\ &= -\int_{\log R}^0 t dt \\ &= \frac{\log^2(R)}{2} \xrightarrow{R \rightarrow 0} +\infty. \end{aligned}$$

Quindi  $f$  non è integrabile in senso improprio in  $\Omega$ .

ESEMPIO 4.21. Per quali  $\alpha > 0$  risulta integrabile in senso improprio sulla corona circolare  $\Omega = \{0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$  la funzione  $f_{\alpha}(x, y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}$ ? La funzione  $f_{\alpha}$  è continua in  $\Omega$ , unione di due domini normali rispetto agli assi, ma non è superiormente limitata perché ha una singolarità isolata nell'origine. Passando in coordinate polari otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus B_R(0)} f_{\alpha}(x, y) dx dy &= \int_{[R, 1] \times [0, 2\pi]} \frac{1}{r^{\alpha}} r dr d\theta = 2\pi \int_R^1 r^{1-\alpha} dr \\ &= \begin{cases} 2\pi \left[ \frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right]_R^1 & \alpha \neq 2 \\ 2\pi [\log r]_R^1 & \alpha = 2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2\pi}{2-\alpha} (1 - R^{2-\alpha}) & \alpha \neq 2 \\ -2\pi \log R & \alpha = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi: se  $0 < \alpha < 2$ , allora  $\int_{\Omega \setminus B_R(0)} f_\alpha(x, y) dx dy \xrightarrow{R \rightarrow 0} \frac{2\pi}{2-\alpha}$ , quindi  $f_\alpha$  è integrabile in  $\Omega$  e

$$\int_{\Omega} f_\alpha(x, y) dx dy = \frac{2\pi}{2-\alpha}.$$

Se invece  $\alpha \geq 2$ , allora  $\int_{\Omega \cap B_R(0)} f_\alpha(x, y) dx dy \xrightarrow{R \rightarrow 0} +\infty$ , ovvero  $f_\alpha$  non risulta integrabile nella corona  $\Omega$ .

Come nel caso precedente ricaviamo il seguente criterio.

**TEOREMA 4.22** (del confronto). *Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua nella corona  $\Omega = \{(x, y) : 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < 1\}$ .*

i) *Supponiamo che esistano  $\alpha < 2$  e  $C \geq 0$  tali che*

$$|f(x, y)| \leq C \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} \quad \forall (x, y) \in \Omega,$$

*allora  $f$  è integrabile in senso improprio in  $\Omega$ .*

ii) *Se esistono  $\alpha \geq 2$  e  $C > 0$  tali che*

$$f(x, y) \geq C \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} \quad \forall (x, y) \in \Omega,$$

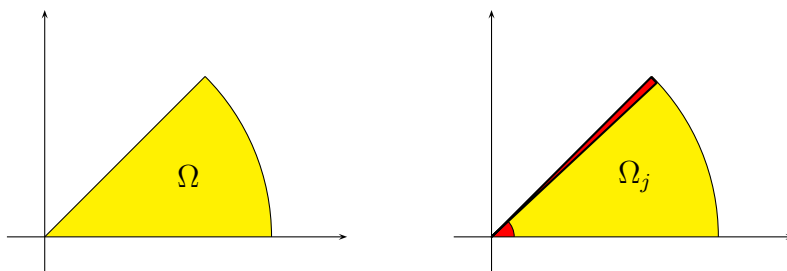
*allora  $f$  non è integrabile in  $\Omega$ .*

**3.3. Funzioni non limitate superiormente: singolarità non isolate.** Più complicato è il caso in cui la singolarità non sia isolata, eventualmente su  $\Omega$  non limitato (è il caso ad esempio della funzione  $f(x, y) = \frac{1}{y-x^2}$  in  $\Omega = \{(x, y) : |x| \leq y\}$ ).

In questo caso si ricorre a una successione crescente di sottoinsiemi  $\Omega_j$  di  $\Omega$  tali che  $f$  sia integrabile su ogni  $\Omega_j$  e  $\Omega = \cup_{j=1}^{+\infty} \Omega_j$  (a meno di un insieme di misura nulla) e si valuta  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_j} f$ . Qualora questo limite esista, si può dimostrare che non dipende dalla scelta della successione  $\Omega_j$  e si pone, qualora sia finito,

$$\int_{\Omega} f = \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_j} f.$$

**ESEMPIO 4.23.** Dire se  $f(x, y) = \frac{1}{x-y}$  è integrabile in  $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, 0 < y < x\}$ .



La funzione  $f$  non è limitata, perché presenta una singolarità sui punti del tipo  $y = x$ . Scegliamo

$$\Omega_j = \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta) : \frac{1}{j} < r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{4} - \frac{1}{j} \right\}$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_j} f &= \int_{1/j}^1 \int_0^{\pi/4 - 1/j} \frac{1}{r(\cos \theta - \sin \theta)} d\theta r dr \\ &= \left(1 - \frac{1}{j}\right) \left( \int_0^{\pi/4 - 1/j} \frac{\sqrt{2}}{\sin(\pi/4 - \theta)} d\theta \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{j}\right) \left( \int_{\pi/4}^{1/j} -\frac{\sqrt{2}}{\sin(u)} du \right) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} +\infty, \end{aligned}$$

perché  $u \mapsto 1/\sin u$  è un infinito di ordine 1 in 0.

Quindi  $f$  non è integrabile in senso improprio in  $\Omega$ .

Se  $f$  non è non negativa, si ragiona come prima sulla sua parte positiva e sulla parte negativa.

#### 4. Integrali $n$ -dimensionali

La teoria sviluppata nelle sezioni precedenti nel caso  $n = 2$  si può estendere al caso di dimensioni maggiori. La definizione di integrale sui rettangoli viene sostituita dall'integrazione sugli  $n$ -intervalli, ovvero insiemi del tipo  $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ . In particolare, nel caso  $n = 3$ , si considerano i parallelepipedi. In maniera del tutto analoga si definiscono somme superiori, inferiori e quindi si dà senso all'integrale  $n$ -dimensionale.

Vale ancora un analogo del Teorema 4.2 di riduzione, che ci permette di scrivere un integrale su un rettangolo come iterazione di due integrali 1-dimensionali. In dimensione maggiore esistono vari modi di ordinare e raggruppare le variabili. Ad esempio, se  $n = 3$ , potremmo voler fissare  $(x, y)$  e integrare prima lungo un filo  $a_3 \leq z \leq b_3$ , oppure possiamo fissare  $z$  e integrare prima su uno strato bidimensionale  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ . Inoltre si potrebbe anche cambiare l'ordine delle variabili, ad esempio tenendo fisse  $(x, z)$  e integrando su un filo  $a_2 \leq y \leq b_2$ .

In ogni caso, il Teorema di riduzione per integrali  $n$ -dimensionali afferma che se  $f$  è una funzione continua su un  $n$ -intervallo  $I$ , allora è possibile scrivere l'integrale di  $f$  su  $I$  riducendolo al prodotto di un integrale  $k$ -dimensionale per un integrale  $n - k$  dimensionale, prendendo le variabili in qualsiasi ordine, ad esempio

$$\int_I f = \int_{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k]} \left( \int_{[a_{k+1}, b_{k+1}] \times \cdots \times [a_n, b_n]} f(x_1, \dots, x_n) dx_{k+1} \cdots dx_n \right) dx_1 \cdots dx_k.$$

Ci soffermeremo maggiormente sul caso  $n = 3$ . In questo caso si parla talvolta di integrali tripli e ad esempio

$$\begin{aligned} \int_I f &= \iint_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} \left( \int_{[a_3, b_3]} f(x, y, z) dz \right) dx dy \\ &= \iint_{[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]} \left( \int_{[a_1, b_1]} f(x, y, z) dx \right) dy dz \\ &= \int_{[a_2, b_2]} \left( \iint_{[a_1, b_1] \times [a_3, b_3]} f(x, y, z) dx dz \right) dy. \end{aligned}$$

Le prime due formule sono esempi di integrazioni per fili; l'ultima è un'integrazione per strati.

ESEMPIO 4.24. Calcolare  $\int_{[0,1] \times [2,3] \times [-1,1]} f$  dove  $f(x, y, z) = x + y + z$ . Si ha

$$\begin{aligned} \int_{[0,1] \times [2,3] \times [-1,1]} (x + y + z) dx dy dz &= \int_{[0,1] \times [2,3]} \left( \int_{-1}^1 (x + y + z) dz \right) dy dx \\ &= \int_{[0,1] \times [2,3]} (2x + 2y) dx dy \\ &= \int_0^1 \left( \int_2^3 (2x + 2y) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 (2x + 5) dx = 6. \end{aligned}$$

Potremo integrare su domini anche più generali dei 3-intervalli. Ad esempio, per  $n = 3$ , risultano domini normali rispetto all'asse  $z$  quei sottoinsiemi della forma

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y), (x, y) \in \Omega\}$$

con  $\Omega$  unione finita di domini 2-dimensionali e normali rispetto all'asse  $x$  o all'asse  $y$  e  $g_1, g_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni continue.

In modo analogo si definiscono i domini normali rispetto all'asse  $x$  o all'asse  $y$ .

Risultano integrabili le funzioni continue su tutti gli insiemi più conosciuti della geometria: cilindri, poliedri, ... In particolare, questo fatto ci permette di calcolare volumi di questi insiemi  $E$  calcolando  $\iiint_E 1$ .

Ci sono analoghi del Teorema 4.5 per il calcolo di integrali su domini normali rispetto a uno degli assi e del Teorema 4.8 di cambiamento di variabili. In un dominio normale rispetto all'asse  $z$  possiamo integrare per fili:

**TEOREMA 4.25.** *Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua su un dominio  $E$  normale rispetto all'asse  $z$ . Allora*

$$\iiint_E f = \int_{\Omega} \left( \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dx dy$$

**ESEMPIO 4.26.** Calcolare il volume del solido  $E$  ottenuto tagliando il cilindro di raggio 1 dato da  $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 1\}$  con i piani  $z = 0$  e  $z + y = 2$ . Il solido  $E$  è un dominio normale rispetto all'asse  $z$ , infatti, se poniamo  $B_1(0) = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , abbiamo

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2 - y, (x,y) \in B_1(0)\}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \text{volume}(E) &= \int_E 1 dx dy dz = \int_{B_1(0)} \left( \int_0^{2-y} 1 dz \right) dx dy \\ &= \int_{B_1(0)} (2 - y) dx dy \\ &= \int_{B_1(0)} 2 dx dy = 2\pi. \end{aligned}$$

**ESEMPIO 4.27.** Calcolare il volume del solido  $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 3 - 2y\}$ , ovvero del solido che si ottiene tagliando il paraboloido  $z = x^2 + y^2$  con il piano  $z = 3 - 2y$ .

Il primo problema è descrivere meglio l'insieme come normale rispetto all'asse  $z$ : occorre calcolare la proiezione sul piano  $z = 0$ . Dovrà risultare  $x^2 + y^2 \leq 3 - 2y$ , quindi  $x^2 + (y+1)^2 \leq 4$  e

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 3 - 2y, (x,y) \in B_2(0,-1)\}.$$

Quindi, passando in coordinate polari centrate in  $(-1, 0)$ ,

$$\begin{aligned} \text{vol}(E) &= \iiint_E 1 dx dy dz = \iint_{B_2(0,-1)} \int_{x^2+y^2}^{3-2y} dz dx dy \\ &= \iint_{B_2(0,-1)} (4 - x^2 - (y+1)^2) dx dy = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4 - r^2) r d\theta dr \\ &= \pi \int_4^0 -t dt = 8\pi. \end{aligned}$$

**ESEMPIO 4.28.** Si calcoli il volume dell'intersezione di due cilindri di uguale raggio che si tagliano ortogonalmente, ovvero, a meno di una rotazione, calcoliamo il volume di  $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2, x^2 + z^2 \leq r^2\}$ .

Possiamo procedere per strati. Infatti, tagliando il solido a  $x$  costante otteniamo il quadrato  $Q_x$  di lato  $2\sqrt{r^2 - x^2}$  e quindi

$$\begin{aligned} \text{vol}(E) &= \iiint_E 1 \, dx \, dy \, dz = \int_{-r}^r \text{area}(Q_x) \, dx \\ &= \int_{-r}^r 4(r^2 - x^2) \, dx = 16r^3/3. \end{aligned}$$

Un cambiamento di variabili è una mappa  $T$  biunivoca definita da  $T(s_1, \dots, s_n) = (x_1, \dots, x_n)$  con

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(s_1, \dots, s_n) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(s_1, \dots, s_n) \end{cases}$$

Ad esso si associa la matrice jacobiana

$$J_T = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi_1 & \partial_2 \varphi_1 & \dots & \partial_n \varphi_1 \\ \partial_1 \varphi_2 & \partial_2 \varphi_2 & \dots & \partial_n \varphi_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 \varphi_n & \partial_2 \varphi_n & \dots & \partial_n \varphi_n \end{pmatrix}.$$

Anche in questo caso il suo determinante è il fattore di dilatazione infinitesima richiesto per il

**TEOREMA 4.29** (di cambiamento di variabili). *Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $T : A \rightarrow T(A) \subseteq \mathbb{R}^n$  una mappa biunivoca di classe  $C^1(A)$ , ovvero le componenti  $\varphi_j$  abbiano derivate parziali continue in  $A$ . Sia inoltre  $\det J_T \neq 0$  in  $A$  e sia  $\Omega$  un dominio semplice rispetto a uno degli assi contenuto in  $T(A)$ . Allora se  $f$  è una funzione continua e integrabile in  $\Omega$ , vale*

$$\int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \cdots dx_n = \int_{T^{-1}(\Omega)} f \circ T(s_1, \dots, s_n) |\det(J_T(s_1, \dots, s_n))| \, ds_1 \cdots ds_n.$$

Nel caso  $n = 3$  sono particolarmente utilizzati i cambiamenti di coordinate seguenti.

**4.1. Coordinate cilindriche in  $\mathbb{R}^3$ .** Questo sistema di coordinate mantiene la coordinata cartesiana  $z$  inalterata e introduce coordinate polari nel piano  $xy$ . In formule, si tratta della trasformazione  $T(r, \theta, z) : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  data da

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

per cui

$$|\det J| = \left| \begin{pmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x & \partial_z x \\ \partial_r y & \partial_\theta y & \partial_z y \\ \partial_r z & \partial_\theta z & \partial_z z \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = r.$$

In questo caso  $A = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$  e  $T(A) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$ . Come nel caso delle coordinate polari nel piano, stiamo escludendo un insieme cui competerebbe comunque un volume nullo. Pertanto se  $\Omega$  è un dominio in  $\mathbb{R}^3$  (e non occorre che  $\Omega \subset T(A)$ ) si ha

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{T^{-1}(\Omega)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

Le coordinate cilindriche sono utili quando il dominio di integrazione presenta una simmetria rispetto all'asse  $z$ , oppure quando il dominio di integrazione è delimitato da superfici del tipo  $z = \text{costante}$  (cioè un piano parallelo al piano  $xy$ ), oppure  $\theta = \text{costante}$  (cioè un semipiano perpendicolare al piano  $xy$  generato nel piano dai punti con argomento  $\theta$ ), oppure da  $r = \text{costante}$  (cioè da un cilindro infinito di raggio  $r$ ).

**ESEMPIO 4.30.** Calcolare il volume di un toro  $\mathbb{T}$ , ovvero di un solido ottenuto mediante rotazione attorno all'asse  $z$  di un cerchio del piano  $xz$  non contenente l'origine e con centro sull'asse  $x$ . Supponiamo che il cerchio sia  $\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + z^2 \leq 1\}$ . I piani  $z = \text{costante}$ , variabile tra  $-1$  e  $1$ , intersecano il toro in corone circolari di raggio interno  $2 - \sqrt{1 - z^2}$  e raggio esterno  $2 + \sqrt{1 - z^2}$ .

Possiamo scrivere il toro generato da questo cerchio in coordinate cilindriche

$$T^{-1}(\mathbb{T}) = \left\{ (r, \theta, z) : -1 \leq z \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi, 2 - \sqrt{1 - z^2} \leq r \leq 2 + \sqrt{1 - z^2} \right\}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \text{volume}(\mathbb{T}) &= \int_{\mathbb{T}} 1 dx dy dz = \int_{T^{-1}(\mathbb{T})} 1 r dr d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 dz \int_{2 - \sqrt{1 - z^2}}^{2 + \sqrt{1 - z^2}} r dr = 2\pi \int_{-1}^1 \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{2 - \sqrt{1 - z^2}}^{2 + \sqrt{1 - z^2}} \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 2\sqrt{1 - z^2} dz = 8\pi \int_0^1 \sqrt{1 - z^2} dz = 2\pi \end{aligned}$$

Infatti l'ultimo integrale è l'area di un quarto del cerchio unitario.

**ESEMPIO 4.31.** Si calcoli il volume della regione  $E$  interna alla sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$  e sopra al paraboloido  $z = x^2 + y^2$ .

Adoperando coordinate cilindriche, possiamo descrivere l'insieme

$$T^{-1}(E) = \{(r, \theta, z) : 0 \leq \theta < 2\pi, z^2 \leq 6 - r^2, r^2 \leq z\}.$$



Le ultime due disequazioni implicano che  $z \geq 0$  e che  $r^4 \leq 6 - r^2$ , quindi  $(r^2 + 3)(r^2 - 2) \leq 0$ , ovvero  $r < \sqrt{2}$ . Quindi il volume richiesto è

$$\begin{aligned} \iiint_E 1 dx dy dz &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} dz r dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (\sqrt{6-r^2} - r^2) r dr \\ &= \pi \left( - \int_6^4 (\sqrt{u} du - 2 \int_0^{\sqrt{2}} r^3 dr) \right) \\ &= \pi \left( \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_4^6 - 2 \right) \\ &= \pi(4\sqrt{6} - 22/3) = 2\pi(2\sqrt{6} - 11/3). \end{aligned}$$

**4.2. Volume di un solido di rotazione.** Sia data la funzione  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  non negativa e continua. Con solido di rotazione attorno all'asse  $z$  intendiamo il solido  $S$  generato dalla rotazione attorno all'asse  $z$  del trapezoide compreso tra l'asse  $z \in [a, b]$  e il grafico della funzione  $x = \varphi(z)$ .

Possiamo procedere in due modi. Per strati, a  $z$  fissato, l'intersezione tra il piano a quota  $z$  e il solido è un cerchio  $C_z$  di raggio  $\varphi(z)$ . Pertanto il volume è

$$\text{vol}(S) = \int_a^b \text{area}(C_z) dz = \int_a^b \pi [\varphi(z)]^2 dz.$$

Oppure descriviamo  $S$  in coordinate cilindriche

$$T^{-1}(S) = \{(r, \theta, z) : z \in [a, b], \theta \in [0, 2\pi), 0 < r \leq \varphi(z)\}$$

da cui, come prima,

$$\text{vol}(S) = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{\varphi(z)} r dr d\theta dz = \int_a^b \pi [\varphi(z)]^2 dz.$$

**ESEMPIO 4.32.** Si calcoli il volume del solido  $S$  generato dalla rotazione del trapezoide  $\{(x, 0, z) : 0 \leq x \leq e^{-z} : z \in [0, 2]\}$  attorno all'asse  $z$ . Si calcoli inoltre  $\int_S |y| dx dy dz$ .

Si ha

$$\text{vol}(S) = \int_0^2 \pi e^{-2z} dz = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-4}).$$

Usando la descrizione di  $S$  in coordinate cilindriche

$$\begin{aligned} \int_S |y| dx dy dz &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{e^{-z}} r^2 |\sin \theta| dr d\theta dz \\ &= 2 \int_0^2 \int_0^{e^{-z}} r^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta dr dz = 4 \int_0^2 \int_0^{e^{-z}} r^2 dr dz \\ &= 4 \int_0^2 e^{-3z}/3 dz = \frac{4}{9}(1 - e^{-6}). \end{aligned}$$

**4.3. Coordinate sferiche in  $\mathbb{R}^3$ .** In questo sistema di coordinate a ogni punto  $P = (x, y, z)$  di  $\mathbb{R}^3$  corrisponde una terna  $(r, \theta, \phi) \in [0, +\infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi)$  tramite la legge

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

La coordinata  $r$  rappresenta la distanza dall'origine del punto  $P = (x, y, z)$ , quindi le superfici corrispondenti a  $r = \text{costante}$  sono le sfere centrate nell'origine. La coordinata  $\phi$  rappresenta l'angolo formato dal vettore  $(x, y, 0)$  con l'asse  $x$ . Le superfici corrispondenti a  $\phi = \text{costante}$  sono semipiani ortogonali al piano  $xy$  e l'intersezione tra la sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  e  $\phi = \text{costante}$  sono i meridiani della sfera; in questo senso,  $\phi$  è la longitudine. La coordinata  $\theta$  invece rappresenta l'angolo che il vettore  $(x, y, z)$  forma con l'asse  $z$ . Le superfici corrispondenti a  $\theta = \text{costante}$  sono coni con punta nell'origine e l'intersezione tra la sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  e  $\theta = \text{costante}$  sono i paralleli della sfera; in questo senso,  $\theta$  è la latitudine e varia tra 0 al polo nord e  $\pi$  al polo sud.

Calcoliamo ora il determinante della matrice jacobiana di questa trasformazione.

$$|\det J| = \left| \begin{pmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x & \partial_\phi x \\ \partial_r y & \partial_\theta y & \partial_\phi y \\ \partial_r z & \partial_\theta z & \partial_\phi z \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \right| = r^2 \sin \theta.$$

Scegliendo  $A = (0, +\infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ , si ha  $T(A) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$ . Di nuovo, l'insieme che escludiamo in questa trasformazione ha volume nullo, quindi possiamo dire che se  $\Omega$  è un dominio in  $\mathbb{R}^3$  (e non occorre che sia contenuto in  $T(A)$ ) si ha

$$\int_\Omega f(x, y, z) dx dy dz = \int_{T^{-1}(\Omega)} f(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi.$$

**ESEMPIO 4.33.** Calcolare la massa di una semisfera (solida) di raggio 3, sapendo che la densità è due volte la distanza dall'origine (massa=densità per volume).

Possiamo pensare che la semisfera sia

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0\}$$

e che la densità sia regolata dalla funzione  $f(x, y, z) = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Allora la massa è

$$\int_S 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$$

In coordinate sferiche tale integrale diventa

$$\int_{\{0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}} 2r r^2 \sin \theta = 2 \int_0^3 r^3 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = 81\pi.$$

ESEMPIO 4.34. Si calcoli il volume di un “cono gelato”, ovvero dell’insieme

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$

In coordinate sferiche si ha

$$T^{-1}(E) = \{(r, \theta, \phi) : r \leq 1, \phi \in [0, 2\pi), \theta \leq \pi/4\}$$

quindi

$$\text{vol}(E) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr = 2\pi/3(1 - \sqrt{2}/2).$$

ESEMPIO 4.35. Si calcoli  $\int_T \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2} dx dy dz$  dove  $T$  è la differenza tra la sfera  $S_2$  di raggio 2 e centro  $(0, 0, 2)$  e la sfera  $S_1$  di raggio 1 e centro  $(0, 0, 1)$ .

Si possono usare coordinate sferiche (ma anche cilindriche). Utilizzando quelle sferiche, le sfere sono descritte da

$$\begin{aligned} T^{-1}(S_2) &= T^{-1} \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4\} = \{(r, \theta, \phi) : r^2 - 4r \cos \theta \leq 0\} \\ T^{-1}(S_1) &= T^{-1} \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1\} = \{(r, \theta, \phi) : r^2 - 2r \cos \theta \leq 0\} \end{aligned}$$

Quindi

$$T^{-1}(S_2 \setminus S_1) = \{(r, \theta, \phi) : 2 \cos \theta < r \leq 4 \cos \theta\}$$

da cui necessariamente  $\theta \in [0, \pi/2]$  e

$$\begin{aligned} \int_T \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2} dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \int_{2 \cos \theta}^{4 \cos \theta} \frac{1}{1+r^2} r^2 \sin \theta dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 \int_{2u}^{4u} \left(1 - \frac{1}{1+r^2}\right) dr du \\ &= 2\pi \int_0^1 (2u - \arctan(4u) + \arctan(2u)) du \\ &= 2\pi \left(1 - \arctan(4) + \frac{\log(17)}{8} + \arctan(2) - \frac{\log(5)}{4}\right). \end{aligned}$$

**4.4. Coordinate sferiche in  $\mathbb{R}^n$ .** In  $\mathbb{R}^n$  il passaggio a coordinate polari è definito da

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta_1 \\ x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \cos \phi \\ x_n = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \sin \phi \end{cases} \quad r \in [0, +\infty), \theta_j \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi).$$

Si può dimostrare che il determinante jacobiano di questa trasformazione è

$$\det(J_T) = r^{n-1} (\sin \theta_1)^{n-2} (\sin \theta_2)^{n-3} \cdots \sin \theta_{n-2}.$$

In particolare, se  $f$  è una funzione che dipende solo dalla distanza dall'origine, cioè  $f(\mathbf{x}) = f_0(\|\mathbf{x}\|)$ , allora

$$\int_{\|\mathbf{x}\| < R} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \omega_n \int_0^R f_0(r) r^{n-1} \, dr,$$

dove  $\omega_n$  è un numero che dipende solo dalla dimensione dello spazio e rappresenta l'area della sfera di raggio 1 in  $\mathbb{R}^n$  (ad esempio, per  $n = 2$ , si ottiene la lunghezza della circonferenza:  $\omega_2 = 2\pi$ ; per  $n = 3$  si ottiene l'usuale area della sfera  $\omega_3 = 4\pi$ ; in ogni caso, si intende l'area della superficie della sfera  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}$  come oggetto  $(n - 1)$ -dimensionale).

**4.5. Integrazione impropria in  $\mathbb{R}^n$ .** Analogamente a quanto visto per  $n = 2$ , possiamo definire l'integrale improprio di una funzione continua  $f$  anche nel caso in cui il dominio di integrazione non è limitato e  $f$  è una funzione continua e non negativa. Le definizioni sono le stesse viste nella sezione 3 qualora si considerino funzioni definite su  $\mathbb{R}^n$  e i cerchi o i quadrati vengano sostituiti con i loro analoghi  $n$ -dimensionali. Indicheremo ancora con  $B_R(0)$  la "palla" di  $\mathbb{R}^n$  centrata nell'origine

$$B_R(0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| < R\}$$

e con  $Q_R(0)$  l'ipercubo centrato nell'origine

$$Q_R(0) = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_j| < R \quad \forall j = 1, \dots, n\}.$$

**ESEMPIO 4.36.** Per quali  $\alpha > 0$  risulta integrabile in senso improprio sulla corona circolare  $\Omega = \{\|\mathbf{x}\| > 1\}$  la funzione  $f_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^\alpha}$ ? La funzione  $f_\alpha$  è continua in  $\Omega$ . Passando in

coordinate polari otteniamo

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega \cap B_R(0)} f_\alpha(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_{1 \leq \|\mathbf{x}\| \leq R} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^\alpha} \, d\mathbf{x} = \omega_n \int_1^R \frac{1}{r^\alpha} r^{n-1} \, dr \\
 &= \omega_n \int_1^R r^{n-1-\alpha} \, dr \\
 &= \begin{cases} \omega_n \left[ \frac{r^{n-\alpha}}{n-\alpha} \right]_1^R & \alpha \neq n \\ \omega_n [\log r]_1^R & \alpha = n \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{\omega_n}{n-\alpha} (R^{n-\alpha} - 1) & \alpha \neq n \\ \omega_n \log R & \alpha = n. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Quindi: se  $0 < \alpha \leq n$ , allora  $\int_{\Omega \cap B_R(0)} f_\alpha(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} +\infty$ , ovvero  $f_\alpha$  non risulta integrabile in  $\Omega$ .

Se invece  $\alpha > n$ , allora  $\int_{\Omega \cap B_R(0)} f_\alpha(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \frac{\omega_n}{\alpha-n}$ , quindi  $f_\alpha$  è integrabile in  $\Omega$  e

$$\int_{\Omega} f_\alpha = \frac{\omega_n}{\alpha - n}.$$

Il criterio per stabilire se una funzione sia integrabile diventa

**TEOREMA 4.37** (del confronto). *Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua nella corona  $\Omega = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| > 1\}$ .*

i) *Supponiamo che esistano  $\alpha > n$  e  $C \geq 0$  tali che*

$$|f(\mathbf{x})| \leq C \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^\alpha} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

*allora  $f$  è integrabile in  $\Omega$ .*

ii) *Se  $f$  è non negativa ed esistono  $\alpha \leq n$  e  $C > 0$  tali che*

$$f(\mathbf{x}) \geq C \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^\alpha} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

*allora  $f$  non è integrabile in  $\Omega$ .*

### 5. La funzione Gamma di Eulero

L'integrale improprio  $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$  risulta convergente per ogni  $t > 0$ . Pertanto è ben definita e con dominio  $(0, +\infty)$  la funzione

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx,$$

che è detta funzione Gamma.

In Analisi, molte sono le proprietà interessanti della funzione Gamma. Innanzi tutto, calcoliamo alcuni valori di questa funzione. È immediato controllare che  $\Gamma(1) = 1$ . Un altro valore importante si ottiene per  $t = \frac{1}{2}$ . Infatti, con la sostituzione  $y = (2x)^{1/2}$  si ottiene  $dy = (2x)^{-1/2} dx$  e quindi

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx \\ &= \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{2} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} dy \\ &= \sqrt{2} \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} = \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo visto che

$$(4.5) \quad \Gamma(1) = 1 \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

La proprietà fondamentale della funzione Gamma è la formula

$$(4.6) \quad \Gamma(t+1) = t\Gamma(t) \quad \forall t > 0,$$

di facile verifica.<sup>1</sup>

---

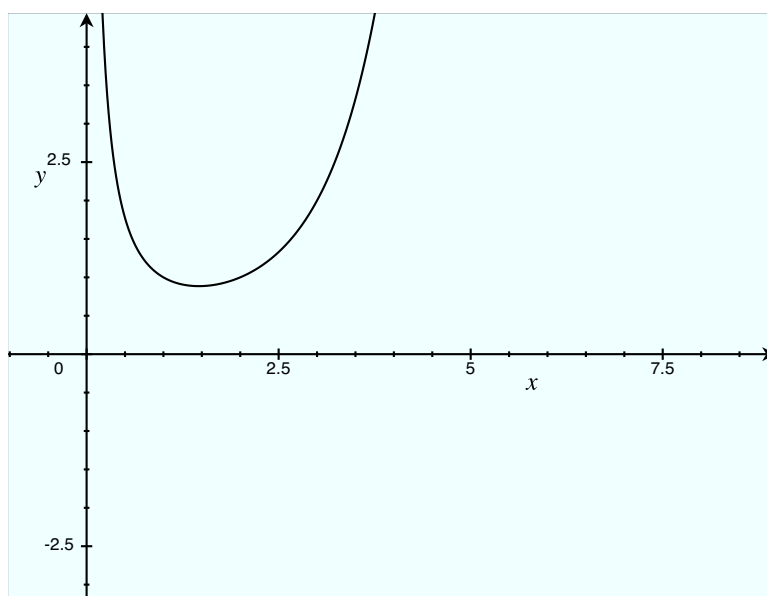
<sup>1</sup> Con una integrazione per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \Gamma(t+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^t dx \\ &= [-e^{-x} x^t]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} t x^{t-1} dx \\ &= t \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx = t\Gamma(t). \end{aligned}$$

Altri valori particolari si ricavano mediante le formule (4.6) e (4.5): per ogni  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) \\ &= \dots = n(n-1)\cdots 1\Gamma(1) \\ &= n! \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(n - \frac{1}{2} + 1\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - 1 + \frac{1}{2}\right) \\ &= \dots = \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

La funzione Gamma (**gamma** per MATLAB) ha grafico



e tende a  $+\infty$  a  $+\infty$ . Si può dimostrare che tende a  $+\infty$  per  $t \rightarrow +\infty$  come  $t^t\sqrt{t}e^{-t}$ : è il contenuto del

**TEOREMA 4.38** (Formula di Stirling). *Si ha*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(t+1)}{t^t \sqrt{2\pi t} e^{-t}} = 1.$$

*In particolare*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n \sqrt{2\pi n} e^{-n}} = 1.$$

**5.1. Area e volume delle sfere in  $\mathbb{R}^n$ .** L'idea per calcolare l'area della sfera in  $\mathbb{R}^n$  è quella di calcolare

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\mathbf{x}\|^2/2} d\mathbf{x}$$

in due modi diversi.

Innanzitutto, l'integrale improprio è convergente e

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\mathbf{x}\|^2/2} d\mathbf{x} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{Q_R(0)} e^{-\|\mathbf{x}\|^2/2} d\mathbf{x} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R(0)} e^{-\|\mathbf{x}\|^2/2} d\mathbf{x}.$$

Ricordando che  $\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ , si ha

$$\begin{aligned} \int_{Q_R(0)} e^{-\|\mathbf{x}\|^2/2} d\mathbf{x} &= \int_{-R}^R e^{-x_1^2/2} dx_1 \int_{-R}^R e^{-x_2^2/2} dx_2 \cdots \int_{-R}^R e^{-x_n^2/2} dx_n \\ &= \left( \int_{-R}^R e^{-x^2/2} dx \right)^n \\ &\xrightarrow{R \rightarrow +\infty} (\sqrt{2\pi})^n. \end{aligned}$$

L'altro modo che abbiamo per calcolare l'integrale è quello di vederlo come limite degli integrali sulle palle e passare in coordinate polari:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\mathbf{x}\|^2/2} d\mathbf{x} &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R(0)} e^{-\|\mathbf{x}\|^2/2} d\mathbf{x} \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \omega_n \int_0^R e^{-r^2/2} r^{n-1} dr \\ &= \omega_n \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{-s} (2s)^{\frac{n}{2}-1} ds \\ &= 2^{\frac{n}{2}-1} \omega_n \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{\frac{n}{2}-1} ds \\ &= 2^{\frac{n}{2}-1} \omega_n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right). \end{aligned}$$

Il risultato deve essere lo stesso; questo vuol dire che

$$(\sqrt{2\pi})^n = 2^{\frac{n}{2}-1} \omega_n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

quindi

$$\omega_n = \frac{2(\pi)^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Se  $n$  è pari, allora  $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2} - 1\right)!$  Se invece  $n$  è dispari, allora  $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{n-1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{n}{2} - 1\right) \left(\frac{n}{2} - 2\right) \cdots \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$ . Quindi la sfera di  $\mathbb{R}^n$  con  $n = 2k$

$$\omega_{2k} = \frac{2(\pi)^k}{k!}$$



mentre in dimensione dispari  $n = 2k + 1$

$$\omega_{2k+1} = \frac{2^k (\pi)^k}{(2k-1)!!}$$

dove  $(2k-1)!! = (2k-1)(2k-3)\cdots 1$ .

Infine, il volume della sfera piena  $B_R(0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq R\}$  vale

$$\begin{aligned} \text{vol}(B_R(0)) &= \omega_n \int_0^R r^{n-1} dr \\ &= \omega_n \frac{R^n}{n}. \end{aligned}$$

## 6. Esercizi

1) Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{[0,2] \times [0,1]} (x+y) dx dy \quad \int_{\{x^2+y^2 \leq 1, y \geq 0\}} (x^3 + xy^2) dx dy \quad \int_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} \frac{\arctg y}{x^2 + y^4 + 2} dx dy$$

$$\int_{\Omega} xy dx dy \quad \text{dove il bordo di } \Omega \text{ è formato da } y = x^2, x = y^2$$

$$\int_{\Omega} \frac{x}{y} e^y dx dy \quad \text{dove } \Omega = \{0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\} \quad (\text{attenzione, è improprio})$$

$$\int_{\Omega} \log x dx dy \quad \text{dove il bordo di } \Omega \text{ è formato da } x > 0, y > 0, 2x + 2y = 5, xy = 1$$

$$\int_{\Omega} (x+y) dx dy \quad \text{dove } \Omega \text{ è il quadrilatero di vertici } (2, 2), (1, -1), (-2, -2), (-1, 1)$$

$$\int_T \frac{x^2}{1+xy} dx dy \quad \text{dove } T \text{ è il triangolo di vertici } (0, 0), (1, 1), (1, 0)$$

$$\int_{\Omega} xy dx dy \quad \text{dove } \Omega = \{x \geq 0, y \geq 0, x^2 + 4y^2 \leq 4\}$$

$$\int_{\Omega} (x-1)y dx dy \quad \text{dove } \Omega = \{y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2x, x^2 + y^2 + 3 \geq 4x\}$$

$$\int_{\Omega} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} dx dy \quad \text{dove } \Omega = \{x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$$

2) Adoperando le sostituzioni indicate, oppure passando in coordinate polari, calcolare

$$\int_C xy \, dx \, dy \quad \text{dove } C \text{ è il quarto della corona circolare di raggi 1 e 2 nel primo quadrante}$$

$$\int_S \sqrt{4 - x^2 - y^2} \, dx \, dy \quad \text{dove } S = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$\int_{\{|x|+|y|\leq 1\}} e^{x+y} \, dx \, dy \quad (\text{elaborato})$$

$$\int_P (x^2 + y^2) \, dx \, dy \quad \text{dove } P \text{ è il parallelogramma delimitato da } \begin{cases} x + y = 1, & x + y = 2, \\ 3x + 4y = 5, & 3x + 4y = 6 \end{cases}$$

(porre  $s = x + y$ ,  $t = 3x + 4y$ )

$$\int_D \frac{x^2 y}{1 + xy} \, dx \, dy \quad \text{dove } D \text{ è il triangolo di vertici } (0, 0), (1, 0), (0, 1)$$

(può essere utile porre  $x = s(1 + t)$ ,  $y = s(1 - t)$ )

3) Calcolare l'area della regione piana racchiusa dalla curva  $\gamma(t) = (2 \cos^3 t, 3 \sin^3 t)$  con  $t \in [0, 2\pi]$ .

4) Calcolare  $\int_D x^2 \, dx \, dy$  dove  $D$  è la regione piana definita dalle disequazioni

$$y \leq -x^2 + \frac{1}{2}x + 3, \quad y \geq -x^2 - x, \quad y \geq -x^2 + 2x.$$

5) Disegnare l'insieme

$$A = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq e^z, \quad 0 \leq z \leq 1\}.$$

Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando l'insieme

$$A' = \{(x, 0, z) : (x, z) \in A\}$$

attorno all'asse  $z$ .

6) Calcolare il volume del solido di rotazione attorno all'asse  $z$  generato da

$$\{(y, z), z \geq y^2, z \leq \frac{1}{y}, z \leq 1 + 2y, y \geq 0\}.$$

7) Calcolare  $\int_\Omega f$  dove

$$f(x, y, z) = e^{x^2} \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, -1 \leq z \leq 4\}$$

$$f(x, y, z) = 1 \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2|y| + |z| \leq 1 - x^2\}$$

$$f(x, y, z) = x \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, -x^2 \leq z \leq 2 - x - y\}$$

**Argomenti di anni passati**



## APPENDICE A

### I numeri complessi

È noto che l'equazione  $x^2 + 1 = 0$  non ha soluzioni reali. Costruiamo un ampliamento dell'insieme dei numeri reali in modo che anche questa equazione possa avere soluzione.

Introduciamo  $i$ , talvolta chiamato unità immaginaria, come un nuovo numero. Desidereremmo che fosse tale che

$$i^2 + 1 = 0,$$

rispetto alle operazioni di somma e prodotto che estendano quelle dei numeri reali.

DEFINIZIONE A.1. Un numero complesso è un'espressione della forma

$$a + ib$$

dove  $a$  e  $b$  sono numeri reali e  $i$  è l'unità immaginaria. Si denota con  $\mathbb{C}$  l'insieme dei numeri complessi.

Quindi

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Due numeri complessi  $a_1 + ib_1$  e  $a_2 + ib_2$  sono uguali se e solo se  $a_1 = a_2$  e  $b_1 = b_2$ . Pertanto, se  $z$  è un numero complesso, allora  $z = a + ib$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  univocamente determinati;  $a$  è detto parte reale di  $z$  e  $b$  parte immaginaria. In formule:

$$z = a + ib \quad a = \operatorname{Re}(z) \quad b = \operatorname{Im}(z).$$

Possiamo pensare a  $\mathbb{R}$  come al sottoinsieme di  $\mathbb{C}$  costituito dai numeri complessi con parte immaginaria nulla. I numeri del tipo  $ib$  con  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  si dicono immaginari puri.

ESEMPIO A.1. Sono numeri complessi  $3 + i2$  (3 è la parte reale e 2 è la parte immaginaria),  $0 + i\pi = i\pi$  (0 è la parte reale e  $\pi$  è la parte immaginaria),  $e + i0 = e$  ( $e$  è la parte reale e 0 è la parte immaginaria).

Estendiamo le regole di somma e prodotto di numeri reali in maniera naturale ai numeri complessi.

**Somma:** Siano  $a_1 + ib_1$  e  $a_2 + ib_2$  due numeri complessi. Definiamo

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$$

**Prodotto:** Siano  $a_1 + ib_1$  e  $a_2 + ib_2$  due numeri complessi. Definiamo

$$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1).$$

Si noti che, se  $b \in \mathbb{R}$ , allora  $ib = bi$  e nel seguito scriveremo quindi indifferentemente  $ib$  e  $bi$ . Ad esempio  $2i$  oppure  $i2$  sono lo stesso numero complesso.

ESEMPIO A.2. Siano  $z = 1 + 8i$  e  $w = -9 + 3i$ . Allora

$$z + w = (1 + 8i) + (-9 + 3i) = (1 - 9) + i(8 + 3) = -8 + 11i$$

$$z \cdot w = (1 + 8i) \cdot (-9 + 3i) = -9 + 3i - 72i + 24i^2 = -9 + 3i - 72i - 24 = -33 - 69i$$

Inoltre possiamo verificare che  $(0 + i)(0 + i) = i^2 = -1$ .

Valgono le proprietà di somma e prodotto analoghe a quelle dei numeri reali:

### 1. Proprietà della somma:

- 1.1 (proprietà associativa): per ogni  $z, w, v \in \mathbb{C}$  vale  $(z + w) + v = z + (w + v)$ ;
- 1.2 (proprietà commutativa): per ogni  $z, w \in \mathbb{C}$  vale  $z + w = w + z$ ;
- 1.3 (esistenza elemento neutro): esiste un elemento, che indichiamo con  $0$  tale che per ogni  $z \in \mathbb{C}$  vale  $z + 0 = z$ ;
- 1.4 (esistenza opposto): per ogni  $z \in \mathbb{C}$  esiste un elemento, che indichiamo con  $-z$  tale che  $z + (-z) = 0$ .

### 2. Proprietà del prodotto:

- 2.1 (proprietà associativa): per ogni  $z, w, v \in \mathbb{C}$  vale  $(z \cdot w) \cdot v = z \cdot (w \cdot v)$ ;
- 2.2 (proprietà commutativa): per ogni  $z, w \in \mathbb{C}$  vale  $z \cdot w = w \cdot z$ ;
- 2.3 (esistenza elemento neutro): esiste un elemento, che indichiamo con  $1$  tale che per ogni  $z \in \mathbb{C}$  vale  $z \cdot 1 = z$ ;
- 2.4 (esistenza inverso): per ogni  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  esiste un elemento, che indichiamo con  $\frac{1}{z}$  tale che  $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ .

### 3. Proprietà della somma e del prodotto:

(proprietà distributiva): per ogni  $z, w, v \in \mathbb{C}$  vale  $(z + w) \cdot v = z \cdot v + w \cdot v$ .

La verifica delle proprietà 1.1, 1.2, 2.1, 2.2 e 3 è abbastanza semplice. A titolo di esempio, controlliamo la 1.2: siano  $z, w$  due numeri complessi della forma  $z = a + ib$  e  $w = a' + ib'$  con  $a, a', b, b'$  reali. Allora per la definizione della somma di due numeri complessi e per la proprietà commutativa della somma dei numeri reali,

$$\begin{aligned} z + w &= (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b') \\ &= (a' + a) + i(b' + b) = (a' + ib') + (a + ib) \\ &= w + z. \end{aligned}$$

Per la 1.3, si osservi innanzi tutto che se  $0$  e  $0'$  sono due elementi neutri per la somma, allora sono uguali, perché  $0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$ . Quindi si noti che l'elemento neutro per la

somma è  $0 = 0 + i0$ . Infatti, per ogni  $z = a + ib$  si ha

$$\begin{aligned} z + 0 &= (a + ib) + (0 + i0) = (a + 0) + i(b + 0) \\ &= a + ib = z. \end{aligned}$$

Analogamente, per la 2.3, si noti che l'elemento neutro per il prodotto è  $1 + i0$ .

Per la 1.4, si noti che l'opposto di  $a + ib$  è  $-(a + ib) = -a - ib$ .

L'unica proprietà meno banale è la 2.4: determineremo ora l'inverso di  $z$ , numero complesso non nullo. Premettiamo due definizioni.

**DEFINIZIONE A.2.** Sia  $z = a + ib$  un numero complesso. Si definisce il numero complesso coniugato di  $z$  come il numero  $a - ib$ . Il numero complesso coniugato di  $z$  si indica con  $\bar{z}$ .

**PROPRIETÀ.** Sia  $z = a + ib$  un numero complesso. Allora:

1) La parte reale e la parte immaginaria soddisfano

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i};$$

2)  $z$  è reale se e solo se  $b = 0$  se e solo se  $z = \bar{z}$ ;

3)  $z$  è immaginario puro se e solo se  $a = 0$  e  $b \neq 0$  se e solo se  $z = -\bar{z}$  e  $z \neq 0$ ;

4)  $\bar{\bar{z}} = z$ ;

5)  $z \cdot \bar{z} = [\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2 = a^2 + b^2$ ;

6) se  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , allora

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

**DEFINIZIONE A.3.** Sia  $z = a + ib$  un numero complesso. Si definisce il modulo di  $z$  come il numero (reale e nonnegativo)  $\sqrt{a^2 + b^2}$ . Il modulo di  $z$  si indica con  $|z|$ .

**PROPRIETÀ.** Sia  $z = a + ib$  un numero complesso. Allora:

1)  $|z| = |\bar{z}|$ ;

2)  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ ;

3)  $z = 0$  se e solo se  $|z| = 0$ ;

4) se  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , allora

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

A questo punto verifichiamo che vale la proprietà 2.4: l'inverso di  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  è  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ .

Infatti,  $z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z \cdot \bar{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1$ .

**ESEMPIO A.3.** Scrivere in forma cartesiana  $\frac{5+9i}{2-i}$ . Si ha

$$\frac{5 + 9i}{2 - i} = (5 + 9i) \cdot \frac{1}{2 - i} = (5 + 9i) \cdot \frac{2 + i}{|2 - i|^2} = \frac{(5 + 9i) \cdot (2 + i)}{4 + 1} = \frac{1 + 23i}{5} = \frac{1}{5} + i \frac{23}{5}.$$

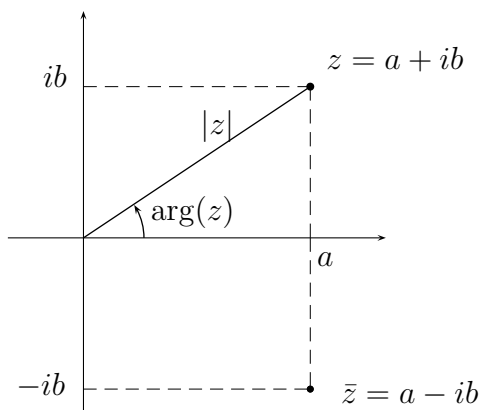
Talvolta si dice impropriamente che  $i = \sqrt{-1}$ ; impropriamente, perché bisogna essere attenti a come si maneggiano le radici dei numeri complessi:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i^2 = -1????$$

Vedremo maggiori dettagli in seguito.

### 1. Rappresentazione geometrica dei numeri complessi

Un numero complesso  $z = a + ib$  si può identificare con la coppia  $(a, b)$  di numeri reali. È quindi naturale rappresentare il numero complesso  $z = a + ib$  nel piano con il punto corrispondente alle coordinate  $(a, b)$ . Il piano identificato con i numeri complessi è chiamato piano di Argand–Gauss.



Scrivere  $z = a + ib$  è dare la forma “cartesiana” di  $z$ , ovvero scrivere  $z$  in coordinate cartesiane. Si noti che  $\bar{z}$  è simmetrico di  $z$  rispetto all’asse delle ascisse e  $|z|$  rappresenta la distanza di  $z$  dall’origine.

DEFINIZIONE A.4. Sia  $z \in \mathbb{C}$ . Un angolo  $\theta$  per cui

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

è detto argomento di  $z$  (si denota anche  $\arg(z)$ ) e la rappresentazione precedente si dice rappresentazione polare.

Se  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  l’argomento di  $z$  è determinato a meno di multipli di  $2\pi$ . Il valore di  $\theta$  in  $(-\pi, \pi]$  è detto valor principale dell’argomento. Un’altra scelta di uso frequente è lasciar variare  $\theta$  in  $[0, 2\pi)$ .

Nella rappresentazione polare il numero complesso 0 è caratterizzato dall’aver  $|z| = 0$  e argomento arbitrario.

ESEMPIO A.4. Scrivere in forma polare  $1 + i\sqrt{3}$ . Si ha  $|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + 3} = 2$ . Bisogna poi determinare  $\theta$  in modo che  $1 + i\sqrt{3} = 2(\cos \theta + i \sin \theta)$ , ovvero

$$\begin{cases} 1 = 2 \cos \theta \\ \sqrt{3} = 2 \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = 1/2 \\ \sin \theta = \sqrt{3}/2 \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \pi/3 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

L’argomento principale è  $\pi/3$  ed è quello che solitamente si adopera. Una forma polare di  $1 + i\sqrt{3}$  è quindi  $2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ .



Le coordinate polari sono “comode” nel valutare il prodotto di numeri complessi. È semplice verificare che se  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$  e  $w = |w|(\cos \phi + i \sin \phi)$ , allora

$$(A.1) \quad z \cdot w = |z| |w| (\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi));$$

basta usare pazientemente le formule di addizione di seno e coseno.

DEFINIZIONE A.5. Sia  $z = a + ib$  un numero complesso, con  $a, b \in \mathbb{R}$ . Si definisce  $e^z$  ponendo

$$e^z = e^{a+ib} = e^a (\cos b + i \sin b).$$

Si noti che questo estende la definizione della funzione esponenziale ai numeri complessi. Inoltre è semplice verificare che

$$e^{z+w} = e^z e^w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

Usando questa definizione, possiamo rappresentare il numero complesso  $z$  in una nuova forma, detta forma esponenziale: se  $z$  è un numero complesso e  $\theta$  è un suo argomento, allora

$$z = |z| e^{i\theta}.$$

La formula del prodotto descritta in (A.1) diventa semplicemente:

$$z \cdot w = |z| e^{i\theta} \cdot |w| e^{i\phi} = |z| |w| e^{i(\theta+\phi)}$$

e (magia!) le formule di addizione di seno e coseno seguono facilmente dalla regola di moltiplicazione di  $e^{i\theta}$  e  $e^{i\phi}$ .

ESEMPIO A.5. Per calcolare  $(1 + i)^7$  in forma cartesiana, abbiamo sostanzialmente due possibilità: una è quella di usare lo sviluppo del binomio di Newton e affrontare una marea di calcoli. L'altra è usare la forma polare oppure quella esponenziale di  $1 + i$  e notare che

$$\begin{aligned} (1 + i)^7 &= (\sqrt{2} e^{i\pi/4})^7 = (\sqrt{2})^7 e^{7i\pi/4} \\ &= (\sqrt{2})^7 (\cos(7\pi/4) + i \sin(7\pi/4)) = (\sqrt{2})^7 (\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2) \\ &= 8 - 8i. \end{aligned}$$

PROPRIETÀ. Sia  $z \in \mathbb{C}$ . Valgono le seguenti proprietà:

- (1)  $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$ , in particolare  $e^z \neq 0$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$ ;
- (2)  $\operatorname{Im}(z)$  è un argomento di  $e^z$ ;
- (3)  $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ .

## 2. Il Teorema fondamentale dell'algebra

Un polinomio a coefficienti in  $\mathbb{C}$  di grado  $n$  è un'espressione della forma

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,$$

dove i coefficienti  $a_j$  sono in  $\mathbb{C}$  per ogni  $j = 0, \dots, n$  e  $a_n \neq 0$ .

TEOREMA A.6 (Teorema fondamentale dell'algebra). *Ogni polinomio di grado maggiore o uguale a uno a coefficienti complessi ha almeno uno zero in  $\mathbb{C}$ .*

Quindi ogni polinomio di grado  $n$  ha esattamente  $n$  zeri complessi (contati con la loro molteplicità). Osserviamo inoltre che se  $P$  è un polinomio a coefficienti reali, allora  $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$ . Quindi se  $z_0$  è uno zero del polinomio  $P$ , allora anche  $\bar{z}_0$  lo è. Ne deduciamo che un polinomio a coefficienti reali di grado dispari deve avere almeno uno zero reale (cosa che già avevamo notato l'anno scorso a partire dal Teorema degli zeri).

Come trovare radici di polinomi? Ad esempio, si determinino gli zeri di  $z^3 - z + iz$ . Uno zero è senz'altro 0. Gli altri si trovano ponendo  $z^2 - 1 + i = 0$ , ovvero  $z^2 = 1 - i$ . Ci troviamo col problema di determinare radici quadrate di un numero complesso.

### 3. Radici ennesime di un numero complesso

Sia  $n$  un numero naturale, diverso da 0, 1. Se  $z$  è un numero complesso, una sua radice  $n$ -esima  $w$  è un numero complesso  $w$  tale che  $w^n = z$ .

Se  $\theta$  è un argomento di  $z$  e  $\phi$  è un argomento di  $w$  la relazione  $w^n = z$  diventa

$$|w|^n e^{in\phi} = |z| e^{i\theta}.$$

Uguagliando i moduli, ricaviamo subito che se  $z = 0$ , allora  $w = 0$ . Se poi  $z \neq 0$ , allora  $|w| = \sqrt[n]{|z|}$  (radice nel senso reale). Inoltre gli argomenti dovranno essere uguali, a meno di multipli di  $2\pi$ . Quindi  $n\phi = \theta + 2k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ .

Abbiamo quindi ottenuto che una radice  $n$ -esima di  $z$  è necessariamente del tipo

$$w = \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

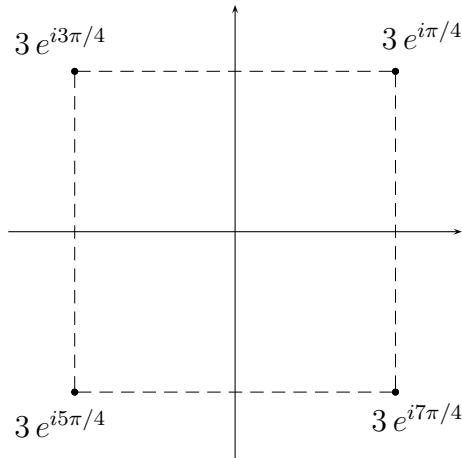
Viceversa, un numero complesso della forma precedente è una radice  $n$ -esima di  $z$ .

In sintesi:

$$w \in \left\{ \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

e non è difficile convincersi che l'insieme precedente consiste di  $n$  numeri complessi distinti, che si ottengono ponendo  $k = 0, \dots, n-1$ . Questi numeri sono vertici di un poligono regolare di  $n$  lati.

ESEMPIO A.7. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione  $z^4 = -81$ .



Si scrive  $-81$  in forma esponenziale, ovvero

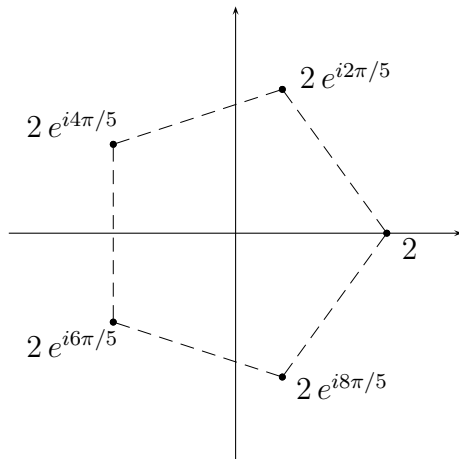
$$-81 = 81 e^{\pi i}$$

e si calcola  $\sqrt[4]{81} = 3$ . Pertanto le radici quarte di  $-81$  sono della forma  $3 e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$  :  $k \in \mathbb{Z}$ , ovvero sono

$$3 e^{i\pi/4}, \quad 3 e^{i3\pi/4}, \quad 3 e^{i5\pi/4}, \quad 3 e^{i7\pi/4}.$$

Esse si dispongono ai vertici di un quadrato, come indicato in figura.

ESEMPIO A.8. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione  $z^5 = 32$ .



Si scrive  $32$  in forma esponenziale, ovvero  $32 = 32 e^{i0}$  e si calcola  $\sqrt[5]{32} = 2$ . Le radici quinte di  $32$  sono della forma  $2 e^{i\frac{0+2k\pi}{5}}$  :  $k \in \mathbb{Z}$ , ovvero sono

$$2, \quad 2 e^{i2\pi/5}, \quad 2 e^{i4\pi/5}, \quad 2 e^{i6\pi/5}, \quad 2 e^{i8\pi/5}.$$

Esse si dispongono ai vertici di un pentagono regolare, come indicato in figura.

ESEMPIO A.9. Si possono risolvere anche altri tipi di equazioni. Ad esempio, cerchiamo i numeri complessi  $z$  tali che

$$a) \quad z^2 + i \operatorname{Im}(z) + 2\bar{z} = 0 \quad b) \quad z^3 - |z| = 0 \quad c) \quad (\bar{z})^4 = i |z|$$

Per l'equazione a), si scriva  $z = a + ib$  con  $a, b$  reali e si noti che

$$\begin{aligned} 0 &= z^2 + i \operatorname{Im}(z) + 2\bar{z} = (a + ib)^2 + ib + 2(a - ib) \\ &= a^2 - b^2 + 2a + i(2ab - b). \end{aligned}$$

Siccome un numero complesso è 0 se e solo se sia la sua parte reale sia la sua parte immaginaria sono nulle, abbiamo

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 2a = 0 \\ 2ab - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 2a = 0 \\ (2a - 1)b = 0 \end{cases}$$

Nella seconda equazione abbiamo due possibilità:  $b = 0$  (che sostituita nella prima equazione dà  $a^2 + 2a = 0$ , quindi  $a = 0$  oppure  $a = -2$ ) oppure  $a = 1/2$  (che sostituita nella prima

equazione dà  $-b^2 + 5/4 = 0$ , quindi  $b = \sqrt{5}/2$  oppure  $b = -\sqrt{5}/2$ ). Concludendo, le soluzioni della prima equazione sono:

$$0, \quad -2, \quad 1/2 + i\sqrt{5}/2, \quad 1/2 - i\sqrt{5}/2.$$

Per le equazioni b) e c) conviene adoperare le coordinate esponenziali. Se  $z = r e^{i\theta}$  allora

$$0 = z^3 - |z| = r^3 e^{3i\theta} - r = r(r^2 e^{3i\theta} - 1).$$

Quindi o accade che  $r = 0$  (e questo vuol dire che  $z = 0$ ) oppure  $r^2 e^{3i\theta} - 1 = 0$ , cioè  $r^2 e^{3i\theta} = 1$ . Quindi, se  $r \neq 0$ , si deduce che  $r = 1$  e  $3\theta = 2k\pi$ , al variare di  $k$  in  $\mathbb{Z}$ . Le soluzioni di b) sono:

$$0, \quad 1, \quad e^{i2/3\pi}, \quad e^{i4/3\pi}.$$

Infine nella c)  $\bar{z} = r e^{-i\theta}$ , quindi

$$0 = r^4 e^{-4i\theta} - i r = r(r^3 e^{-4i\theta} - i),$$

da cui, o accade che  $r = 0$  o accade che  $r^3 e^{-4i\theta} - 1 = 0$ . Il che vuol dire che o  $z = 0$  oppure  $r^3 e^{-4i\theta} = i = e^{i\pi/2}$ , ovvero  $r = 1$  e  $-4\theta = \pi/2 + 2k\pi$ , al variare di  $k$  in  $\mathbb{Z}$ . Le soluzioni di c) sono allora:

$$0, \quad e^{-i\pi/8}, \quad e^{i3\pi/8}, \quad e^{i7\pi/8}, \quad e^{i11\pi/8}.$$

#### 4. Alcuni comandi Maple

- (1) Il comando `complex` vi “rende” un numero complesso. Ad esempio,

$$\text{complex}(2)=2\text{I} \qquad \text{complex}(2,3)=2+3\text{I}$$

- (2) I comandi `Re`, `Im`, `conjugate` vi permettono di trovare parte reale, immaginaria e il complesso coniugato. Ad esempio

$$\text{Re}(2+3*\text{I})=2 \qquad \text{Im}(2+3*\text{I})=3 \qquad \text{conjugate}(2+3*\text{I})=2-3\text{I}$$

- (3) Il comando `abs` vi fa trovare il modulo del numero complesso. Ad esempio

$$\text{abs}(-2)=2 \qquad \text{abs}(3-4*\text{I})=5$$

- (4) Il comando `argument` vi fa trovare l’argomento in  $(-\pi, \pi]$ . Ad esempio

$$\text{argument}(-2)=\pi \qquad \text{argument}(-1+\text{I})=\frac{3}{4}\pi$$

- (5) Il comando `polar` converte in coordinate polari.

$$\text{polar}(3+4*\text{I})=\text{polar}(5,\text{arctan}(4/3))$$

Nel risultato, 5 è il modulo e  $\text{arctan}(4/3)$  l’argomento. Lo stesso si ottiene con il comando `convert(z,polar)`.

Tenete presente che potete scrivere il numero complesso  $r e^{ia}$  in coordinate esponenziali scrivendo `polar(r,a)`. Ad esempio il risultato di

$$\text{polar}(2,5)*\text{polar}(3,-1):\text{simplify}(\%);$$

è `polar(6,4)`.

(6) Il comando che userete di più è `solve`. Ad esempio

`solve(x^2+x+1,x);`

vi permette di trovare le soluzioni dell'equazione  $x^2+x+1=0$ . La risposta di Maple è

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{3}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{3}$$

Per memorizzare in una sequenza le soluzioni di una equazione e ottenerle poi in forma polare potete scrivere

`a:=solve(z^3+8*I,z); b:=seq(polar(a[i]),i=1..3);`

La risposta di Maple è

$$-I + \sqrt{3}, -I - \sqrt{3}, 2I$$

$$\text{polar}(2, -\frac{1}{6}\pi), \text{polar}(2, -\frac{5}{6}\pi), \text{polar}(2, \frac{1}{2}\pi)$$

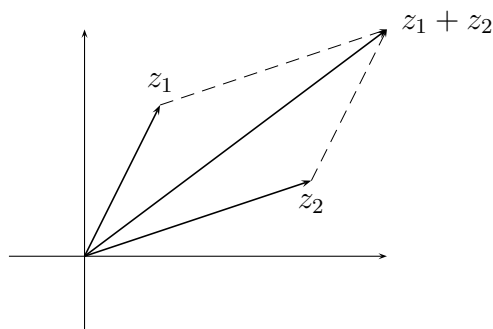
## 5. Esercizi

1) Calcolare

$$\bar{5}; \quad \overline{2+8i}; \quad \overline{2e^{-i\pi/6}}; \quad 2+3i - (4-5i); \quad 2+3i - \overline{4-5i}; \quad 2-i + 6e^{i\pi/2};$$

$$\frac{1-7i}{-i}; \quad \frac{2+i}{4+3i}; \quad (-\sqrt{3}+i)^6; \quad \text{Re}((4-i)(5+2i)); \quad |7-24i|; \quad |2e^{-i\pi/6}|.$$

2) Siano  $z_1 = 1 + 2i$  e  $z_2 = 3 + i$ . Calcolare  $z_1 + z_2$ . Rappresentare nel piano complesso i numeri  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_1 + z_2$ .



3) Siano  $z_1$  e  $z_2$  due numeri complessi. Dare una interpretazione geometrica della somma di  $z_1$  e  $z_2$  e dedurre che  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .

4) Rappresentare nel piano complesso gli insiemi

$\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \pi/3\}$	$\{z \in \mathbb{C} :  z - i  = 3\}$	$\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 1\}$
$\{z \in \mathbb{C} :  z  = 3\}$	$\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) = e\}$	$\{z \in \mathbb{C} : \bar{z} = z\}$
$\{z \in \mathbb{C} : 1 <  z  \leq 2\}$	$\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Re}(z) \leq 1\}$	$\{z \in \mathbb{C} : \arg z \in (\pi/3, \pi/2)\}$ .

5) Per quali  $z$  complessi non nulli vale  $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$ ?

6) Verificare che per ogni  $n$  in  $\mathbb{N}$  e  $\theta \in \mathbb{R}$  vale

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Dedurre le formule di duplicazione e triplicazione di un angolo.

7) Trovare l'insieme delle soluzioni (e rappresentarlo nel piano complesso) delle equazioni

$$\begin{array}{lll} z^3 = -8i & z^8 = -1 & z^2 - 2\operatorname{Re}(z(1+i)) - i = 0 \\ z^4 + 1 - i\sqrt{3} = 0 & z = |z|^2 & z^3 - \bar{z}^2 = 0. \end{array}$$

## APPENDICE B

### Equazioni differenziali e alle differenze

Introduciamo le equazioni differenziali e alle differenze partendo da un semplice problema: quello di studiare la crescita di una popolazione. Indichiamo con  $p(t)$  il numero di individui di una popolazione fissata (ad esempio, tutti i cittadini italiani, ma anche tutti i batteri di una coltura, ecc.) al tempo  $t$ . Supponiamo che, in un intervallo (piccolo) di tempo  $h$ , l'aumento del numero degli individui di una popolazione sia proporzionale al tempo trascorso e al numero di individui all'istante iniziale. Questo si esprime dicendo che per una certa costante di proporzionalità  $a$  vale

$$p(t+h) - p(t) = a h p(t) \quad h \neq 0,$$

o anche,

$$\frac{p(t+h) - p(t)}{h} = a p(t) \quad h \neq 0.$$

Passando al limite per  $h \rightarrow 0$  nella relazione precedente otteniamo

$$p'(t) = a p(t).$$

Questo è un esempio di equazione differenziale; l'incognita è la funzione  $p(t)$  e l'equazione esprime una condizione sulla derivata prima della funzione  $p(t)$ . La costante  $a$  si può interpretare come il tasso di crescita (istantaneo) della popolazione.

A questo punto mi dovrete obiettare che la funzione  $p$  assume solo valori discreti, quindi non è derivabile. In realtà il problema ha interesse quando la popolazione è molto grande, quindi fluttuazioni di una unità possono essere pensate come molto piccole. Lo stesso tipo di equazione si incontra anche in chimica (decadimento radioattivo), fisica (circuiti LC),...

Qualora fossimo più interessati a rilevazioni annuali del numero di individui (o comunque a intervalli di tempo prefissati), non avrebbe senso passare al limite per  $h \rightarrow 0$ . L'equazione  $p(t+h) - p(t) = a h p(t)$  può essere riscritta pensando che la rilevazione sia fatta anno per anno ( $h = 1$  anno, previsione per i prossimi anni):

$$p(n+1) - p(n) = a p(n) \quad n = 2004, 2005, \dots$$

In questo modo abbiamo ottenuto una equazione alle differenze.

## 1. Equazioni differenziali

Una equazione in una incognita è un'espressione del tipo  $f(x) = 0$ , dove  $f$  è una funzione assegnata di una variabile reale. Una soluzione dell'equazione è un  $x_0$  tale che  $f(x_0) = 0$ . Nelle equazioni differenziali ordinarie l'incognita è una funzione di una variabile reale, che di solito si indica con  $y(x)$ ; l'equazione coinvolge la funzione  $y$  e alcune delle sue derivate. Il termine ordinarie si riferisce al fatto che la funzione incognita dipende solo da una variabile e quindi le derivate che compaiono sono derivate ordinarie. Ci sono altri tipi di equazioni differenziali in cui le incognite sono funzioni di due o più variabili e nell'equazione compaiono la funzione incognita e alcune delle sue derivate parziali.

Una equazione differenziale di ordine  $n$  è un'espressione del tipo

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0,$$

dove  $F$  è un'espressione che coinvolge  $n + 2$  variabili, ossia una funzione definita in un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^{n+2}$ . In parole più povere, un'equazione differenziale di ordine  $n$  è un'equazione che coinvolge la funzione, le sue derivate fino a quella di ordine  $n$  e la variabile indipendente.

Una soluzione dell'equazione differenziale è una funzione  $y(x)$  definita e derivabile  $n$  volte in un **intervallo**  $I \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto tale che per ogni  $x \in I$  si abbia  $(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in \text{dom } F$  e

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Si chiama integrale generale dell'equazione l'insieme di tutte le sue soluzioni.

L'equazione si dice in forma normale se è possibile esplicitare nell'equazione la derivata di ordine più alto, ovvero se può essere messa nella forma:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)),$$

dove  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione.

Nell'equazione compare la funzione incognita  $y(x)$  insieme alle sue derivate, tutte calcolate nello stesso punto  $x$ . Siccome il punto è sempre lo stesso, talvolta si omette la dipendenza da  $x$  e si scrive semplicemente

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

**ESEMPIO B.1.** L'equazione  $xy' = y$  non è in forma normale, perché non è possibile scrivere  $y' = y/x$ , a meno di non sapere che  $x$  è sempre diverso da 0.

Una equazione non in forma normale potrebbe non avere soluzioni, come  $(y')^2 + y^2 + 1 = 0$ .

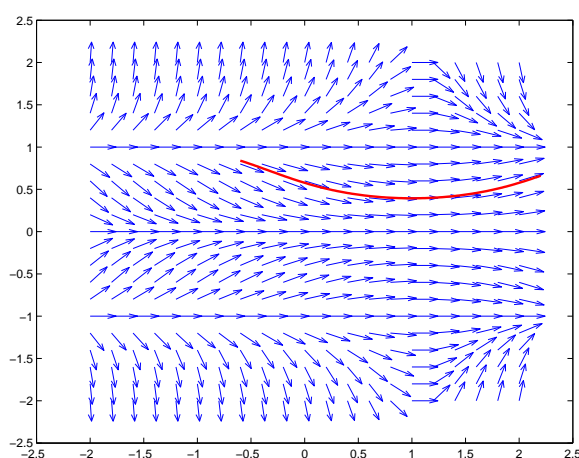
Tratteremo solo tre tipi di equazioni in forma normale: del primo ordine a variabili separabili, del primo ordine lineari, del secondo ordine lineari omogenee a coefficienti costanti.



In particolare, un'equazione di primo ordine in forma normale è del tipo

$$y'(x) = f(x, y(x));$$

una sua soluzione è una funzione  $y(x)$  definita e derivabile in un **intervallo**  $I \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto e tale che per ogni  $x \in I$  si abbia  $(x, y(x)) \in \text{dom } f$  e  $y'(x) = f(x, y(x))$ . Graficamente, possiamo pensare che con l'equazione differenziale assegniamo in ogni punto il valore della derivata (cioè della pendenza che deve avere la tangente alla funzione incognita se passante per il punto  $(x, y)$  del piano).



In questa figura abbiamo considerato la funzione

$$f(x, y) = (x - 1)(y^3 - y);$$

in blu è rappresentata la “derivata” in ogni punto e in rosso il grafico di una soluzione limitatamente all'intervallo  $(-0.5, 2.1)$ .

Si notino anche le (probabili) soluzioni costanti  $y = 0$ ,  $y = 1$ ,  $y = -1$  (a queste altezze, la tangente è orizzontale).

L'esempio più semplice di equazione differenziale del primo ordine che sappiamo già risolvere in molti casi è

$$y'(x) = f(x)$$

con  $f$  funzione assegnata e continua su un intervallo  $J$ . Risolvere questa equazione differenziale significa trovare tutte le primitive della funzione  $f$  sull'intervallo  $J$ . Come sappiamo, non ci sarà una sola soluzione, ma ce ne saranno infinite, in dipendenza da una costante arbitraria. Sarà invece unica la soluzione che assume un certo valore prefissato  $y_0$  in un punto assegnato  $x_0$  dell'intervallo  $J$ .

**ESEMPIO B.2.** Trovare l'integrale generale dell'equazione  $y'(x) = x^2$ . Determinare la soluzione tale che  $y(3) = 1$ .

Si ha  $y(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$ , al variare di  $c \in \mathbb{R}$ .

Quella soluzione tale che  $y(3) = 1$  si ottiene dall'equazione  $1 = y(3) = 9 + c$ , ovvero  $y(x) = \frac{x^3}{3} - 8$ . Un altro modo di procedere per trovare la soluzione particolare è quello di calcolare  $y(x) = 1 + \int_3^x \int t^2 dt$ .

Con un poco più di fatica, sappiamo risolvere anche l'equazione differenziale del secondo ordine

$$y''(x) = f(x)$$

con  $f$  funzione assegnata e continua su un intervallo  $J$ , ripetendo due volte il procedimento di integrazione definita. In tal modo otterremo infinite soluzioni, in dipendenza da due costanti arbitrarie. Sarà invece unica la soluzione che assume un certo valore prefissato  $y_0$  in un punto assegnato  $x_0$  dell'intervallo  $J$  e la cui derivata assume il valore prefissato  $y_1$  in un punto  $x_1$  di  $J$ .

ESEMPIO B.3. Trovare l'integrale generale dell'equazione  $y''(x) = x^2$ .

Si ha  $y'(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c_1$ , al variare di  $c_1 \in \mathbb{R}$ . Ma allora  $y(x) = \int \left(\frac{x^3}{3} + c_1\right) dx = \frac{x^4}{12} + c_1x + c_2$ , al variare di  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

ESEMPIO B.4. Trovare l'integrale generale dell'equazione  $y'(x) = x^{-1}$  nell'intervallo  $J = (0, +\infty)$ . La precisazione in questo caso è d'obbligo, perché la funzione  $\frac{1}{x}$  è continua sul suo dominio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , che è unione di due intervalli disgiunti.

In  $J$  si ha  $y(x) = \int x^{-1} dx = \log x + c$ , al variare di  $c \in \mathbb{R}$ .

Osserviamo che in  $J' = (-\infty, 0)$  l'integrale generale sarebbe stato l'insieme delle funzioni del tipo  $y(x) = \int x^{-1} dx = \log(-x) + c$ , al variare di  $c \in \mathbb{R}$ .

## 2. Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili

Queste sono equazioni differenziali della forma

$$(B.1) \quad y'(x) = f(x)g(y(x))$$

o, più brevemente,  $y' = f(x)g(y)$ , dove  $f$  e  $g$  sono funzioni continue.

Cerchiamo di sviluppare un metodo che ci permetta di trovare tutte le soluzioni.

Iniziamo col determinare gli zeri della funzione  $g$ , ovvero determinare le soluzioni dell'equazione (algebraica)  $g(y) = 0$ . Se  $g(y_0) = 0$ , allora è immediato verificare che la funzione  $y(x) = y_0$  è soluzione dell'equazione (B.1), perché  $y'(x) = 0$  per ogni  $x$ .

Supponiamo ora di sapere che la funzione  $y$  in un qualche punto assuma un certo valore che non sia uno zero di  $g$ . Allora ci sarà un intervallo  $J$  in cui  $y(x)$  non è mai uno zero di  $g$  e quindi in tale intervallo ha senso riscrivere l'equazione differenziale (B.1) nella forma:

$$(B.2) \quad \frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$$

Siano ora  $F(x)$  una primitiva di  $f(x)$  e  $G(t)$  una primitiva di  $\frac{1}{g(t)}$ . Per la regola di derivazione della funzione composta,

$$(G(y(x)))' = G'(y(x)) y'(x) = \frac{1}{g(y(x))} y'(x).$$

Quindi la (B.2) ci dice che  $F(x)$  e  $G(y(x))$  sono funzioni che hanno la stessa derivata nell'intervallo  $J$ . Allora dovrà esistere una costante  $c \in \mathbb{R}$  tale che

$$G(y(x)) = F(x) + c.$$

Il problema è quello ora di ricavare  $y(x)$  nella formula precedente. Notiamo che in teoria il procedimento dovrebbe poter essere portato a termine: la derivata  $G'(y) = \frac{1}{g(y)}$  non è mai nulla nell'intervallo  $J$ , ovvero sempre positiva o sempre negativa; quindi  $G$  è strettamente crescente o strettamente decrescente, quindi invertibile e

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + c)$$

fornisce una soluzione dell'equazione (B.1).

Inoltre si noti che se  $g$  non si annulla, è unica la soluzione passante per un punto  $(x_0, y_0)$  fissato.

Ricapitoliamo quanto detto nel risultato seguente.

**TEOREMA B.5.** *Siano  $I, J$  due intervalli,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni continue con  $g(y) \neq 0$  per ogni  $y \in J$ . Siano  $x_0 \in I$  e  $y_0 \in J$ . Allora il problema*

$$\begin{cases} y'(x) = f(x) g(y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

*ha un'unica soluzione.*

**ESEMPIO B.6.** (modello di crescita di una popolazione) Trovare l'integrale generale dell'equazione  $y'(x) = a y(x)$ , dove  $a \in \mathbb{R}$  è il tasso di crescita (o decrescita se negativo).

Si tratta di un'equazione a variabili separabili, in cui  $f(x) = a$  e  $g(y) = y$ , per esempio.

Determiniamo dapprima gli zeri di  $g$ :  $g(y) = y$  si annulla solo per  $y = 0$ , quindi c'è la soluzione costante  $y(x) = 0$ .

Supponiamo ora che  $y(x)$  non sia sempre nulla e applichiamo il ragionamento precedente. Una primitiva della funzione  $f(x)$  è la funzione  $F(x) = ax$ ; una primitiva della funzione  $1/g(y) = 1/y$  è la funzione  $G(y) = \log |y|$ . Pertanto per un  $c \in \mathbb{R}$

$$G(y(x)) = \log(|y(x)|) = ax + c,$$

da cui, chiamando per brevità  $k = e^c$ ,

$$|y(x)| = e^{ax+c} = k e^{ax}.$$

Siccome  $y$  deve essere derivabile in tutti i punti, dovrà essere

$$y(x) = k e^{ax} \quad \text{oppure} \quad y(x) = -k e^{ax}$$

per ogni  $x$ . Notando che  $k = e^c > 0$ , possiamo scrivere tutte le soluzioni nella forma

$$y_k(x) = k e^{ax} \quad k \in \mathbb{R}$$

Così facendo abbiamo recuperato anche la soluzione costante  $y(x) = 0$ , che corrisponde a prendere  $k = 0$ .

L'evoluzione di una popolazione, che all'istante iniziale  $x = 0$  vale  $k > 0$  è la seguente: la popolazione si mantiene costante se  $a = 0$ , cresce diventando infinitamente grande se  $a > 0$ , si estingue se  $a < 0$ .

**ESEMPIO B.7.** Trovare tutte le soluzioni dell'equazione  $y'(x) = x y(x)^2$ . Determinare poi la soluzione tale che  $y(1) = 2$  e il suo dominio.

Si tratta di una equazione a variabili separabili, in cui  $f(x) = x$  e  $g(y) = y^2$ . Le soluzioni costanti si ottengono trovando gli zeri della funzione  $g$ : in questo caso la funzione costante  $y(x) = 0$  per ogni  $x$  è soluzione dell'equazione differenziale.

Altre soluzioni si trovano supponendo  $y \neq 0$  e calcolando primitive di  $f$  e  $1/g$ . Una primitiva di  $f$  è  $F(x) = \frac{x^2}{2}$ . Una primitiva di  $1/g(y) = 1/y^2$  è  $G(y) = -\frac{1}{y}$ . Pertanto per un  $c \in \mathbb{R}$

$$G(y(x)) = -\frac{1}{y(x)} = \frac{x^2}{2} + c,$$

da cui

$$y(x) = -\frac{2}{x^2 + 2c}.$$

L'integrale generale dell'equazione è quindi l'insieme formato dalle funzioni  $y_{\text{cost}}(x) = 0$  e  $y_c(x) = -\frac{2}{x^2 + 2c}$ , al variare di  $c \in \mathbb{R}$ . Si noti che il dominio delle soluzioni del tipo  $y_{\text{cost}}$  e  $y_c$  con  $c > 0$  è tutto  $\mathbb{R}$ . Invece, se  $c \leq 0$  il dominio di  $y_c$  è un intervallo, che può essere scelto, per ora arbitrariamente, tra gli intervalli (se non vuoti)  $(-\infty, -\sqrt{-2c})$ ,  $(-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c})$  e  $(\sqrt{-2c}, +\infty)$ .

In particolare la soluzione tale che  $y(1) = 2$  si ottiene (dopo aver scartato la soluzione costante, che non verifica questa proprietà) determinando  $c$  in modo che

$$y_c(1) = -\frac{2}{1 + 2c} = 2.$$

Si ottiene  $c = -1$ , quindi la soluzione è  $y_{-1}$  con dominio l'intervallo che contiene il punto 1, ossia  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .

Infine, vediamo come possono essere svolti gli stessi conti in maniera più immediata. Dopo aver determinato le soluzioni costanti, si scriva l'equazione nella forma

$$\frac{dy}{dx} = x y^2.$$

Supponiamo che a primo membro si tratti di un vero e proprio quoziente e portiamo a sinistra tutto quanto contiene la variabile  $y$  e a destra tutto quanto contiene la variabile  $x$

$$\frac{dy}{y^2} = x dx$$

Ora introduciamo il segno di integrale indefinito in ambo i membri

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int x dx$$

e, calcolando gli integrali indefiniti, arriviamo alle stesse conclusioni.

ESEMPIO B.8. Trovare l'integrale generale dell'equazione  $y'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}y(x)(y(x) - 2)$ .

Iniziamo col determinare soluzioni costanti. Queste si trovano risolvendo l'equazione (algebraica)  $y(y - 2) = 0$ , da cui  $y = 0$  e  $y = 2$ . Le soluzioni costanti sono le funzioni  $y(x) = 0$  e  $y(x) = 2$  per ogni  $x \geq 0$  (deve aver senso l'equazione differenziale, che contiene  $\sqrt{x}$ ).

Se invece in un qualche punto si ha  $y(x) \neq 0, 2$  allora dovrà essere

$$\int \frac{dy}{y(y-2)} = \int \frac{3}{2}\sqrt{x} dx.$$

L'integrale a secondo membro è immediato:  $\int \frac{3}{2}\sqrt{x} dx = \frac{3}{2} \frac{x^{3/2}}{3/2} + C$ . Ripassiamo come ottenere una primitiva della funzione razionale a primo membro: occorre scrivere la frazione  $\frac{1}{y(y-2)}$  come combinazione lineare di due frazioni semplici del tipo  $\frac{1}{y}$  e  $\frac{1}{y-2}$ , quindi determiniamo  $a, b \in \mathbb{R}$  in modo che

$$\frac{1}{y(y-2)} = \frac{a}{y} + \frac{b}{y-2}.$$

Questo vuol dire che  $1 = a(y-2) + by$ , da cui si ricava  $a = -1/2$ ,  $b = 1/2$ . Ma allora

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y(y-2)} &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy + \frac{1}{2} \int \frac{1}{y-2} dy \\ &= -\frac{1}{2} \log |y| + \frac{1}{2} \log |y-2| + C' = \frac{1}{2} \log \left| \frac{y-2}{y} \right| + C'. \end{aligned}$$

Quindi per un  $c \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2} \log \left| \frac{y-2}{y} \right| = x^{3/2} + c$$

da cui, ponendo  $k = e^{2c}$

$$\left| \frac{y-2}{y} \right| = k e^{2x^{3/2}}.$$

Ragionando come nell'esempio B.6, possiamo concludere che

$$\frac{y-2}{y} = k e^{2x^{3/2}}, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}$$

(per  $k = 0$  recuperiamo la soluzione costante  $y = 2$ ). Esplicitiamo  $y$  e otteniamo che l'integrale generale è formato da funzioni del tipo

$$y(x) = \frac{2}{1 - k e^{2x^{3/2}}},$$

al variare di  $k \in \mathbb{R}$  e dalla soluzione costante  $y(x) = 0$  (volendo, si può notare che questa soluzione si ottiene per  $k \rightarrow \infty$ ). Se  $k \leq 0$ , le soluzioni sono definite su  $[0, +\infty)$ ; se  $k > 0$  il dominio risulta più piccolo.

**ESEMPIO B.9.** Trovare tutte le soluzioni dell'equazione  $y'(x) = (e^x - 1)/(e^{y(x)} + 1)$ . Qui il problema è che non si riesce a esplicitare (anche se teoricamente possibile) la soluzione. Infatti, separando le variabili, otteniamo

$$\begin{aligned} e^x - x + c &= \int (e^x - 1) dx \\ &= \int (e^y + 1) dy = e^y + y + k \end{aligned}$$

e, anche se la funzione  $y \mapsto e^y + y$  è invertibile, non sappiamo scriverne l'inversa.

Il problema dell'unicità della soluzione verrà discusso in seguito (si veda l'esempio B.12).

### 3. Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Queste sono le equazioni differenziali del tipo

$$(B.3) \quad y'(x) = a(x)y(x) + b(x),$$

dove  $a$  e  $b$  sono funzioni continue in un intervallo fissato  $J$ .

Nel caso in cui la funzione  $b(x)$  sia identicamente nulla, l'equazione (B.3) si dice omogenea.

Un'equazione lineare e omogenea è a variabili separabili (con  $g(y) = y$  e  $f(x) = a(x)$ ) e si risolve come indicato nella sezione precedente. Innanzi tutto, si trova la soluzione costante  $y = 0$ . Separando le variabili, otteniamo

$$\int \frac{dy}{y} = \int a(x) dx$$

e quindi, indicando con  $A(x)$  una primitiva di  $a(x)$  sull'intervallo  $J$

$$\log |y| = A(x) + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

Risolviendo rispetto a  $y$  otteniamo

$$y = \pm e^c e^{A(x)}.$$

Si noti che  $\pm e^c$  assume ogni valore reale diverso da zero e che  $y = 0$  è soluzione. Possiamo quindi scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea nella forma

$$(B.4) \quad y(x) = k e^{A(x)} \quad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

Se invece l'equazione non è omogenea ( $b(x) \neq 0$ ), cerchiamo una soluzione della forma

$$(B.5) \quad y(x) = k(x) e^{A(x)},$$

dove  $k(x)$  è una funzione incognita. Questo metodo è chiamato metodo di variazione delle costanti, perché la costante  $k$  che compare nella formula (B.4), che fornisce la soluzione dell'equazione omogenea associata, diventa qui una funzione.

Sostituendo la (B.5) nell'equazione differenziale (B.3), otteniamo condizioni sulla funzione  $k(x)$ . Precisamente, siccome  $A'(x) = a(x)$ , dalla (B.5) si ottiene

$$y'(x) = k'(x) e^{A(x)} + k(x) e^{A(x)} a(x).$$

Sostituendo nella (B.3), abbiamo

$$k'(x) e^{A(x)} + k(x) e^{A(x)} a(x) = a(x) k(x) e^{A(x)} + b(x),$$

da cui

$$k'(x) = b(x) e^{-A(x)}$$

e infine

$$k(x) = \int b(x) e^{-A(x)} dx.$$

Abbiamo quindi ottenuto che ogni soluzione è della forma

$$y(x) = e^{A(x)} \int b(x) e^{-A(x)} dx,$$

dove  $A$  è una primitiva di  $a$  nell'intervallo dato  $J$ . È nascosta nella formula precedente una costante arbitraria, implicita nel simbolo di integrale indefinito.

**ESEMPIO B.10.** (il debito di ossigeno) Quando corriamo o facciamo uno sforzo, consumiamo più ossigeno rispetto a quanto ne consumeremmo in condizioni normali di riposo. In particolare, se corriamo velocemente, il nostro corpo brucia una quantità di ossigeno superiore a quella che riesce a immettere respirando. Si crea quello che chiamiamo “debito di ossigeno”. Quando ci fermiamo, il nostro corpo continua a immettere ossigeno in quantità maggiore di quanto servirebbe normalmente in una situazione di riposo, per cercare di recuperare e saldare il debito di ossigeno.

Indichiamo con  $t$  il tempo e con  $y(t)$  il debito di ossigeno al tempo  $t$ . Il debito  $y(t)$  varia principalmente in seguito a due condizioni: nell'unità di tempo, cresce in maniera proporzionale alla potenza, cioè al lavoro che dobbiamo compiere nell'unità di tempo; decresce in maniera proporzionale alla velocità con cui respiriamo, che è determinata dal fabbisogno di ossigeno. Possiamo quindi scrivere

$$y'(t) = -a y(t) + b p(t),$$

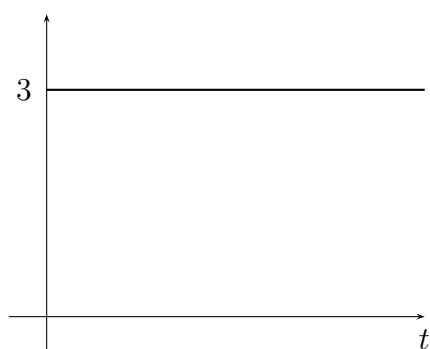
dove  $a, b$  sono costanti positive (legate al singolo individuo, ad esempio la capacità dei suoi polmoni, il suo peso, ecc.) e  $p(t)$  indica la potenza da esplicare (nota).

Partendo da una situazione di riposo  $y(0) = 0$  e dovendo effettuare un lavoro uniforme nel tempo (cioè  $p(t) = \text{costante}$ , ad esempio  $p(t) = 3$ ), il debito di ossigeno soddisfa

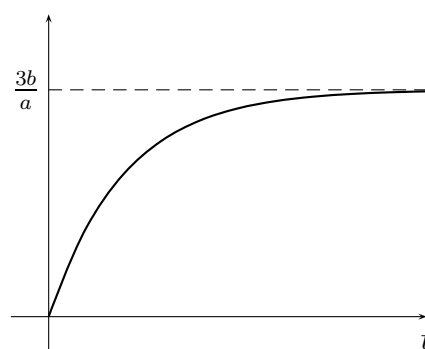
$$y'(t) = -a y(t) + 3b, \quad y(0) = 0.$$

Risolviendo questa equazione, con il metodo della separazione delle variabili oppure con la formula risolutiva delle equazioni lineari, otteniamo

$$y(t) = \frac{3b}{a}(1 - e^{-at}).$$



La funzione  $p(t) = 3$



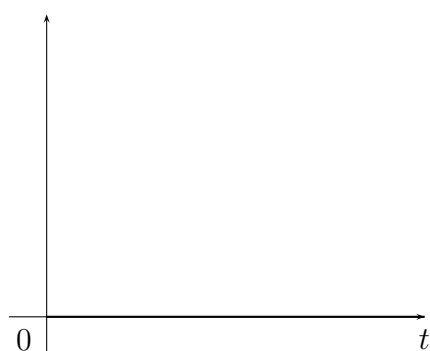
Il relativo debito di ossigeno  $y(t)$

Invece, mettendoci a riposo ( $p(t) = 0$ ) dopo una corsa che ha prodotto un debito di ossigeno pari a  $y_0$ ,

$$y'(t) = -a y(t), \quad y(0) = y_0,$$

che ha soluzione

$$y(t) = y_0 e^{-at}.$$



La funzione  $p(t) = 0$



Il relativo debito di ossigeno  $y(t)$

In generale, supponendo di passare gradatamente da una situazione di sforzo a una di riposo, otterremo una sorta di avvicendamento delle situazioni precedenti: supponiamo che

$$p(t) = \begin{cases} 3 & t \in [0, 1] \\ 3(2 - t) & t \in (1, 2) \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$

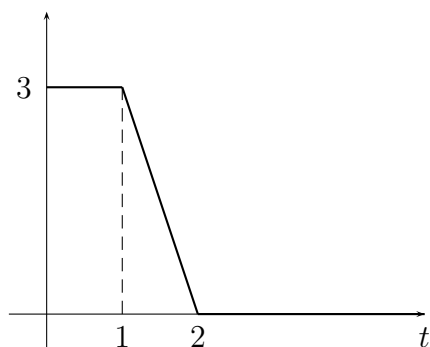
allora la soluzione di

$$y'(t) = -a y(t) + b p(t), \quad y(0) = 0$$

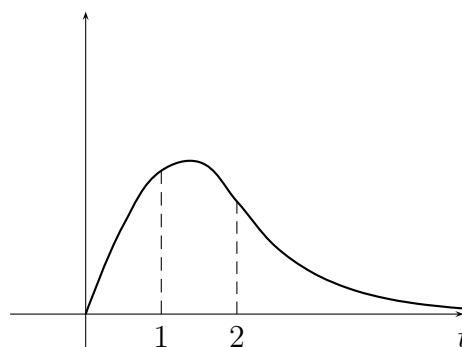


è data da

$$y(t) = \begin{cases} \frac{3b}{a}(1 - e^{-at}) & t \in [0, 1] \\ \frac{3b}{a^2}(1 + 2a - at - (a + e^a)e^{-at}) & t \in (1, 2) \\ \frac{3b}{a^2}e^{-at}(e^{2a} - e^a - a) & t \geq 2 \end{cases}$$



La funzione  $p(t)$



Il relativo debito di ossigeno  $y(t)$

#### 4. Il problema di Cauchy

Ci sono criteri abbastanza generali per potere stabilire se una equazione differenziale ammetta o meno una soluzione. Particolare attenzione è rivolta al problema di Cauchy, in cui l'equazione differenziale è accoppiata a un valore iniziale:

$$(B.6) \quad \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Supponiamo che  $f$  sia una funzione continua in un rettangolo aperto (=lati esclusi)  $A$  di  $\mathbb{R}^2$  e che il rettangolo  $R_{a,b}$  centrato in  $(x_0, y_0)$  e di lati di lunghezze  $2a$  e  $2b$  sia contenuto in questo aperto. Vedremo in seguito cosa vuol dire che una funzione di due variabili è continua, ma possiamo immaginare che questo significa che in punti “vicini” i valori di  $f$  non siano “troppo diversi”.

In formule:

$$R_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} \subset A.$$

Poniamo  $M = \max \{|f(x, y)| : (x, y) \in R_{a,b}\}$ . Supponiamo inoltre che esista una costante  $L > 0$  tale che per ogni coppia di punti del tipo  $(x, y_1), (x, y_2)$  in  $R_{a,b}$

$$(B.7) \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|.$$

**TEOREMA B.11** (di esistenza e unicità). *In queste ipotesi, esiste una e una sola soluzione del problema (B.6), definita e con derivata prima continua nell'intervallo  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , con  $\delta = \min \{a, \frac{b}{M}\}$ .*

In particolare, se l'equazione è a variabili separabili, della forma  $y'(x) = h(x)g(y(x))$ , le ipotesi del teorema di esistenza e unicità si traducono nei fatti:

1. la funzione  $h(x)$  è continua sull'intervallo  $[x_0 - a, x_0 + a]$ ;
2. la funzione  $g(y)$  è continua sull'intervallo  $[y_0 - b, y_0 + b]$ ;
3. esiste una costante  $L'$  tale che  $|g(y_1) - g(y_2)| \leq L' |y_1 - y_2|$  per ogni scelta di punti  $y_1, y_2$  in  $[y_0 - b, y_0 + b]$ .

In queste ipotesi, per il teorema di Weierstrass, le funzioni  $h$  e  $g$  sono limitate, quindi esistono due numeri  $M_h$  e  $M_g$  tali che per ogni  $(x, y)$  in  $R_{a,b}$

$$|h(x)| \leq M_h \quad |g(y)| \leq M_g.$$

Allora possiamo concludere che

$$|h(x)g(y)| \leq M_h M_g \quad \text{e} \quad |h(x)g(y_1) - h(x)g(y_2)| \leq M_h L' |y_1 - y_2|$$

e quindi c'è esistenza e unicità della soluzione nell'intervallo  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , con  $\delta = \min \left\{ a, \frac{b}{M_h M_g} \right\}$ .

Si noti inoltre che l'ipotesi 3. è senz'altro verificata se la funzione  $g$  è anche derivabile con continuità sull'intervallo  $[y_0 - b, y_0 + b]$ . Infatti, in questo caso, per il Teorema di Weierstrass anche  $g'$  risulta limitata. Poniamo  $L' = \max \{|g'(y)| \mid y \in [y_0 - b, y_0 + b]\}$ . Siano ora  $y_1, y_2$  in  $[y_0 - b, y_0 + b]$ ; dal Teorema di Lagrange, esiste un punto  $c$  nell'intervallo aperto di estremi  $y_1$  e  $y_2$  tale che  $g(y_1) - g(y_2) = g'(c)(y_1 - y_2)$ . Quindi

$$|g(y_1) - g(y_2)| = |g'(c)| |y_1 - y_2| \leq L' |y_1 - y_2|.$$

Nel prossimo esempio, mostriamo che la soluzione potrebbe non essere unica se le ipotesi del teorema non sono soddisfatte.

ESEMPIO B.12. Il problema

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{|y(x)|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ha come soluzione la funzione costante  $y(x) = 0$ , ma anche la funzione

$$y(x) = \begin{cases} x^2/4 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

In questo caso  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  e la funzione  $f(x, y) = \sqrt{|y|}$  non verifica la proprietà (B.7) in nessun rettangolo che contiene l'origine. Infatti, dato  $b > 0$ , se esistesse  $L > 0$  tale che

$$|\sqrt{|y_1|} - \sqrt{|y_2|}| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in [-b, b],$$

allora, prendendo in particolare  $y_2 = 0$ , dovrebbe valere che

$$\sqrt{|y_1|} \leq L|y_1| \quad \forall y_1 \in [-b, b] \quad \text{quindi} \quad \frac{\sqrt{|y_1|}}{|y_1|} \leq L \quad \forall y_1 \in [-b, b].$$

Ma questo è impossibile, perché  $\lim_{y_1 \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|y_1|}}{|y_1|} = +\infty$ .

Si noti che, come nell'esempio B.7 il dominio della soluzione potrebbe essere più piccolo della proiezione sull'asse delle ascisse del dominio di  $f$ : il problema di Cauchy trattato in quell'esempio

$$\begin{cases} y'(x) = x y(x)^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

ha come soluzione la funzione  $y(x) = -\frac{2}{x^2-2}$  con dominio  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ , mentre  $f(x, y) = x y^2$  è definita e regolare su tutto  $\mathbb{R}^2$ .

Scopo dei prossimi esempi è mostrare l'importanza del fatto che l'equazione differenziale sia in forma normale.

ESEMPIO B.13. Si considerino i seguenti problemi

$$(P1) \begin{cases} x y'(x) = y(x) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (P2) \begin{cases} x y'(x) = y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (P3) \begin{cases} x y'(x) = y(x) \\ y(2) = 4 \end{cases}$$

in cui l'equazione differenziale non è in forma normale. La differenza importante che possiamo notare fra questi problemi spicca subito quando proviamo a sostituire il dato iniziale dentro l'equazione.

Nel problema (P1) l'equazione diventa  $0y'(0) = 0$ , ossia l'identità  $0 = 0$ ; nel problema (P2) otteniamo l'equazione  $0y'(0) = 1$ , ossia  $0 = 1$  priva di soluzioni; nel problema (P3) otteniamo l'equazione  $2y'(0) = 4$ , che ha solo la soluzione  $y'(0) = 2$ .

Da quanto appena osservato deduciamo che il problema (P2) non ammette soluzioni. Invece i problemi (P1) e (P3) potrebbero avere soluzioni.

Occupiamoci prima del problema (P3). Siccome il nostro punto iniziale è 2, esiste un intorno di 2 in cui  $x \neq 0$ , quindi in tale intorno l'equazione differenziale è equivalente a

$$(B.8) \quad y'(x) = \frac{y(x)}{x}$$

che è a variabili separabili. Risolvendo questa equazione otteniamo soluzioni della forma  $y(x) = kx$ , con  $k$  in  $\mathbb{R}$ . Imponiamo la condizione iniziale  $y(2) = 4$  e otteniamo che  $y(x) = 2x$ . Il problema (P3) ha quindi come unica soluzione la funzione  $y(x) = 2x$  con dominio  $\mathbb{R}$ . L'unica differenza con la soluzione del problema (P3') scritto in forma normale

$$(P3') \begin{cases} z'(x) = \frac{z(x)}{x} \\ z(2) = 4 \end{cases}$$

è nel dominio della soluzione:  $z(x) = 2x$  con dominio  $(0, +\infty)$ .

Infine consideriamo il problema (P1). Nel punto iniziale l'equazione differenziale è sempre soddisfatta, indipendentemente dal valore della derivata della soluzione in questo punto.

Vediamo cosa può succedere se  $x \neq 0$ . In queste ipotesi ci riportiamo all'equazione in forma normale (B.8), che ha soluzione del tipo  $y(x) = kx$ , con  $k$  in  $\mathbb{R}$ . Tutte queste soluzioni verificano la condizione iniziale  $y(0) = 0$ . Quindi il problema (P1) ha infinite soluzioni.

## 5. Il metodo di Eulero

Qualora si sappia che una soluzione del problema (B.6) esiste ed è unica, è possibile approssimare tale soluzione con il metodo di Eulero. Con questo metodo, si ottengono i valori approssimati  $y_n$  dei valori della soluzione  $y(x)$ , calcolata nei punti

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \quad x_3 = x_0 + 3h, \quad \dots$$

dove  $h > 0$  è chiamato passo dell'approssimazione.

Il metodo di Eulero approssima la soluzione  $y(x)$  mediante una spezzata, in cui ogni segmento ha lunghezza orizzontale  $h$  e pendenza determinata dal valore di  $f(x, y)$  nell'estremo sinistro. In formule:

$$\begin{aligned} y_0 & \text{ (assegnato)} \\ y_1 & = y_0 + h f(x_0, y_0) \\ y_2 & = y_1 + h f(x_1, y_1) \\ & \dots \\ y_{n+1} & = y_n + h f(x_n, y_n) \end{aligned}$$

e si approssima il grafico di  $y(x)$  con i segmenti di estremi  $(x_n, y_n)$ .

Siano

$$K_1 = \max \{ |\partial_1 f(x, y)| : (x, y) \in R \} \quad K_2 = \max \{ |\partial_2 f(x, y)| : (x, y) \in R \}.$$

Si può dimostrare (ma va oltre i nostri scopi) che l'errore che si commette nell'intervallo  $(x_0, x_0 + \delta)$  è controllato da

$$h \frac{K_1}{2K_2} (e^{K_2 \delta} - 1),$$

ossia decresce linearmente al decrescere del passo  $h$ .

Questo metodo è abbastanza crudo e può essere migliorato nel modo seguente. Anziché fissare la pendenza del segmento approssimante tramite il valore di  $f(x, y)$  nell'estremo sinistro, potremmo pensare di usare il suo valor medio, ovvero:

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})}{2}.$$

Purtroppo questa formula nella maggior parte dei casi è inservibile, perché  $y_{n+1}$  compare anche nel membro di destra; tuttavia, ad esso possiamo sostituire il suo valore approssimato che troveremmo con il metodo di Eulero e ottenere

$$(B.9) \quad u_{n+1} = z_n + h f(x_n, z_n) \quad z_{n+1} = z_n + h \frac{f(x_n, z_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1})}{2},$$

Questo metodo è noto come metodo di Eulero migliorato. Si può dimostrare che l'errore tra la soluzione esatta  $y(x)$  e la soluzione approssimata che otteniamo congiungendo con segmenti i punti  $(x_n, z_n)$  dati dalle (B.9) migliora rispetto al precedente ed è controllato da

$$\frac{h^2}{4} \left( K' + \frac{K''}{3K_2} \right) \left( e^{K_2 \delta (1 + \frac{hK_2}{2})} - 1 \right),$$

dove  $K'$  e  $K''$  sono tali che

$$\begin{aligned} \max \left\{ \left| \frac{df(x, y(x))}{dx} \right| : x \in [x_0, x_0 + \delta] \right\} &\leq K' \\ \max \left\{ \left| \frac{d^2 f(x, y(x))}{dx^2} \right| : x \in [x_0, x_0 + \delta] \right\} &\leq K''. \end{aligned}$$

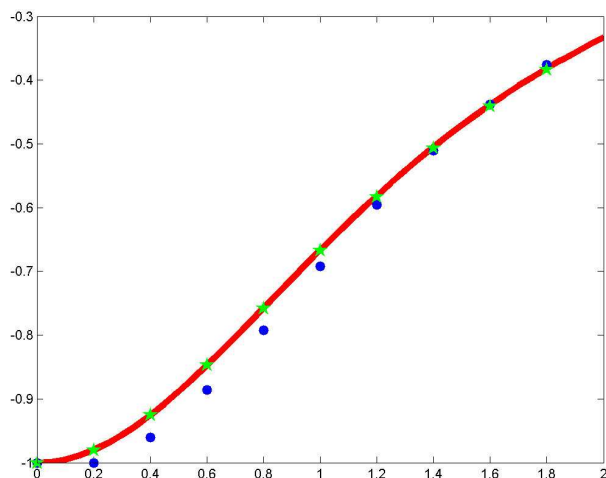
L'ordine di convergenza del metodo migliorato è quadratico in  $h$  e quindi ci aspettiamo che al decrescere di  $h$  con il metodo migliorato si debba ottenere una soluzione più simile a quella esatta.

ESEMPIO B.14. Abbiamo già trovato la soluzione del problema

$$\begin{cases} y'(x) = x y(x)^2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

che risulta essere data da  $y(x) = -\frac{2}{x^2+2}$  con dominio  $\mathbb{R}$ . Vediamo cosa avremmo ottenuto adoperando il metodo di Eulero o il metodo di Eulero migliorato sull'intervallo  $[0, 2]$  con passo 0.2. Scriviamo un semplice programmino

```
f:=(x,y)->x*y(x)^2:
x(1):=0:
y(1):=-1:
u(1):=-1:
z(1):=-1:
for j from 1 to 10 do
x(j+1):=x(1)+j*0.2:
y(j+1):=y(j)+0.2*f(x(j),y(j)):
u(j+1):=z(j)+0.2*f(x(j),z(j)):
z(j+1):=z(j)+0.5*0.2*(f(x(j),z(j))+f(x(j+1),u(j+1))):
end do;
data:=seq([x(j),y(j)],j=1..11);
datamigl:=seq([x(j),z(j)],j=1..11);
PLOT(POINTS(data,SYMBOL(_SOLIDDIAMOND),COLOR(RGB,0,0,1)),
      POINTS(datamigl,SYMBOL(_ASTERISK),COLOR(RGB,0,1,0)));
```



Il risultato del programma è la figura a fianco, in cui abbiamo aggiunto la linea rossa (il grafico della funzione soluzione).

Congiungendo i pallini blu otteniamo l'approssimazione del metodo di Eulero.

Congiungendo le stelle verdi otteniamo il grafico della soluzione fornita dal metodo migliorato, che pare essere una approssimazione migliore della soluzione esatta.

## 6. Equazioni differenziali del secondo ordine, lineari, omogenee, a coefficienti costanti

Una equazione differenziale lineare e omogenea del secondo ordine e a coefficienti costanti è del tipo

$$(B.10) \quad y''(x) + a y'(x) + b y(x) = 0,$$

dove  $a$  e  $b$  sono numeri reali.

Osserviamo innanzi tutto che se  $y_1$  e  $y_2$  sono soluzioni di questa equazione differenziale, anche  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$  è soluzione, comunque si scelgano  $c_1$  e  $c_2$  in  $\mathbb{R}$ .

È naturale cercare soluzioni di questa equazione della forma  $e^{\lambda x}$  con  $\lambda$  da determinarsi, perché le soluzioni delle equazioni del primo ordine lineari, omogenee e a coefficienti costanti sono di questo tipo (cfr. l'esempio B.6).

Dal momento che

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lambda e^{\lambda x} \\ y''(x) &= \lambda^2 e^{\lambda x}, \end{aligned}$$

sostituendo  $y(x) = e^{\lambda x}$  nell'equazione (B.10) abbiamo

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a \lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0.$$

Ricordando che  $e^{\lambda x}$  non si annulla mai e raccogliendolo, otteniamo l'equazione

$$(B.11) \quad \lambda^2 + a \lambda + b = 0.$$

Morale: se  $\lambda$  è radice dell'equazione (B.11), allora  $e^{\lambda x}$  è soluzione dell'equazione differenziale (B.10).

Si presentano **tre casi**, a seconda che il discriminante  $\Delta = a^2 - 4b$  dell'equazione (B.11) sia positivo, negativo, oppure nullo.

**Nel primo caso**, ovvero se  $\Delta = a^2 - 4b > 0$ , allora la (B.11) ha due radici reali e distinte,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . In questo caso possiamo dire che

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

è soluzione dell'equazione differenziale (B.10) per ogni scelta di  $c_1, c_2$  in  $\mathbb{R}$ . Inoltre, si potrebbe dimostrare (ma non lo facciamo) che la formula precedente fornisce tutte le soluzioni dell'equazione al variare di  $c_1, c_2$  in  $\mathbb{R}$ .

**ESEMPIO B.15.** Si trovi l'integrale generale di  $y'' - 4y' + \frac{7}{4}y = 0$  e la soluzione tale che  $y(0) = 1, y'(0) = 0$ .

Si ha

$$\lambda^2 - 4\lambda + \frac{7}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{7}{2} \text{ oppure } \lambda = \frac{1}{2}.$$

Quindi l'integrale generale, ossia l'insieme di tutte le soluzioni, è formato da funzioni del tipo

$$y(x) = c_1 e^{\frac{7}{2}x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x}$$

al variare di  $c_1, c_2$  in  $\mathbb{R}$ . In particolare, la soluzione tale che  $y(0) = 1, y'(0) = 0$  sarà di quella forma, con  $c_1$  e  $c_2$  soluzioni di

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ y'(0) = \frac{7}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ \frac{7}{2} - \frac{7}{2}c_2 + \frac{1}{2}c_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{6} \\ c_2 = \frac{7}{6} \end{cases}$$

Quindi la soluzione particolare richiesta è

$$y(x) = -\frac{1}{6} e^{\frac{7}{2}x} + \frac{7}{6} e^{\frac{1}{2}x}.$$

**Nel secondo caso**, ovvero se  $\Delta = a^2 - 4b < 0$ , allora la (B.11) ha due radici complesse coniugate, diciamo  $\lambda \pm i\mu$ . Ci ricordiamo che  $e^{(\lambda \pm i\mu)x} = e^{\lambda x} (\cos(\mu x) \pm i \sin(\mu x))$ . Questo ci suggerisce che  $y_1(x) = e^{\lambda x} \cos(\mu x)$  e  $y_2(x) = e^{\lambda x} \sin(\mu x)$  potrebbero essere soluzioni dell'equazione differenziale data. Sostituendo, non è difficile convincersi che questo è effettivamente vero. In sintesi, in questo caso possiamo dire che

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} \cos(\mu x) + c_2 e^{\lambda x} \sin(\mu x)$$

è soluzione dell'equazione differenziale (B.10), per ogni  $c_1, c_2$  in  $\mathbb{R}$ . Inoltre, si potrebbe dimostrare (ma non lo facciamo) che la formula precedente fornisce tutte le soluzioni dell'equazione, al variare di  $c_1, c_2$  in  $\mathbb{R}$ .

**ESEMPIO B.16.** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale  $y'' + y' + \frac{5}{2}y = 0$ .

Abbiamo

$$\lambda^2 + \lambda + \frac{5}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{-9}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i,$$

quindi tutte le soluzioni sono date da

$$y(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + c_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{3}{2}x\right).$$

Infine **nell'ultimo caso**, se  $\Delta = a^2 - 4b = 0$ , allora la (B.11) ha una sola radice  $\lambda = -a/2$ . Questo ci permette di concludere che in questo caso  $y(x) = k e^{-\frac{a}{2}x}$  è soluzione dell'equazione di partenza, per ogni  $k$  in  $\mathbb{R}$ . Tuttavia questa formula non fornisce tutte le soluzioni, come mostra il seguente esempio.

**ESEMPIO B.17.** Determinare una soluzione non nulla di  $y'' - 4y' + 4y = 0$  tale che  $y(0) = 0$ . Siccome  $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$  solo per  $\lambda = 2$ , allora possiamo dire che  $y(x) = k e^{2x}$  è soluzione. Ma, affinché sia  $y(0) = 0$ , occorre che  $k = 0$ . Tuttavia l'equazione differenziale ha anche la soluzione  $y(x) = x e^{2x}$ , che è non nulla e verifica la condizione iniziale data.

Per trovare tutte le soluzioni nel caso  $\Delta = 0$ , ci viene in aiuto il metodo di variazione delle costanti: immaginiamo che la (B.10) abbia non solo la soluzione  $y(x) = k e^{-\frac{a}{2}x}$ , dove  $k$  è una costante, ma più in generale una soluzione della forma  $y(x) = k(x) e^{-\frac{a}{2}x}$ , dove  $k(x)$  è una funzione, che adesso determiniamo.

Siccome

$$\begin{aligned} y'(x) &= k'(x) e^{-\frac{a}{2}x} - \frac{a}{2} k(x) e^{-\frac{a}{2}x} \\ y''(x) &= k''(x) e^{-\frac{a}{2}x} - a k'(x) e^{-\frac{a}{2}x} + \frac{a^2}{4} k(x) e^{-\frac{a}{2}x} \end{aligned}$$

sostituendo  $y(x) = k(x) e^{-\frac{a}{2}x}$  nell'equazione (B.10) abbiamo

$$k''(x) e^{-\frac{a}{2}x} - a k'(x) e^{-\frac{a}{2}x} + \frac{a^2}{4} k(x) e^{-\frac{a}{2}x} + a \left( k'(x) e^{-\frac{a}{2}x} - \frac{a}{2} k(x) e^{-\frac{a}{2}x} \right) + b k(x) e^{-\frac{a}{2}x} = 0.$$

Dal momento che  $\Delta = a^2 - 4b = 0$  e  $e^{-\frac{a}{2}x}$  non si annulla mai, l'equazione precedente diventa semplicemente

$$k''(x) = 0,$$

che ha come soluzioni i polinomi di primo grado. In sintesi, nel caso  $\Delta = a^2 - 4b = 0$ , tutte le soluzioni sono della forma

$$y(x) = e^{-\frac{a}{2}x} (c_1 x + c_2),$$

al variare di  $c_1, c_2$  in  $\mathbb{R}$ .

**ESEMPIO B.18.** Trovare tutte le soluzioni dell'equazione  $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$  e, in particolare, quella tale che  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -1$ .

Il polinomio associato all'equazione differenziale è  $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$  e quindi ha una sola radice  $\lambda = -1$ . Allora tutte le soluzioni dell'equazione sono date dalla formula

$$y(x) = e^{-x} (c_1 x + c_2),$$



al variare di  $c_1, c_2$  in  $\mathbb{R}$ . In particolare, quella che soddisfa le condizioni iniziali è tale che

$$\begin{cases} y(0) = c_2 = 1 \\ y'(0) = -c_2 + c_1 = -1 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 = 0. \end{cases}$$

Quindi la soluzione particolare richiesta è

$$y(x) = e^{-x}.$$

Riassumendo:

TEOREMA B.19. *Siano  $a$  e  $b$  numeri reali e  $\lambda_1, \lambda_2$  radici dell'equazione ausiliaria*

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

*Allora tutte le soluzioni dell'equazione differenziale*

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

*sono della forma:*

$$y(x) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} & \text{se } a^2 - 4b > 0 \text{ e quindi } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ c_1 e^{\operatorname{Re}(\lambda_1)x} \cos(\operatorname{Im}(\lambda_1)x) + c_2 e^{\operatorname{Re}(\lambda_1)x} \sin(\operatorname{Im}(\lambda_1)x) & \text{se } a^2 - 4b < 0 \text{ e quindi } \lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \\ e^{\lambda_1 x}(c_1 + c_2 x) & \text{se } a^2 - 4b = 0 \text{ e quindi } \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

## 7. Alcuni comandi Maple

Maple risolve molte equazioni differenziali, in particolare quelle a variabili separabili e quelle lineari.

Il comando è molto semplice: `dsolve`.

Ad esempio, supponiamo di voler risolvere l'equazione differenziale  $y' = 2y + x$ , che memorizziamo, per comodità, chiamandola `ed`. Scriviamo quindi

$$\text{ed} := \text{diff}(y(x), x) - 2*y(x) - x = 0;$$

Il successivo comando `dsolve(ed)`; permette di ottenere la risposta:

$$y(x) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x + e^{2x} C1$$

che vuol dire  $y(x) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x + C e^{2x}$ .

Si possono inserire anche le condizioni iniziali. Ad esempio,

$$\text{dsolve}(\text{ed}, y(0)=0, y(x));$$

risolve la precedente equazione con la condizione iniziale  $y(0) = 0$ .

Una derivata del secondo ordine si scrive come `diff(y(x), x, x)` e così via.

Inoltre si possono risolvere i problemi ai valori iniziali per via numerica, usando diversi metodi di approssimazione, anche più accurati del metodo di Eulero. I comandi

```
ed := diff(y(x),x) -2*y(x)-x= 0;
ic:= y(0) = 0.6713967071418030:
sol := dsolve({ed,ic}, numeric, range=0..1);
sol(0.5);
```

chiedono di risolvere per via numerica il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - 2y - x = 0 \\ y(0) = 0.6713967071418030 \end{cases}$$

nell'intervallo  $[0, 1]$ . Dopo chiediamo il valore approssimato della soluzione nel punto  $x = 0.5$ . la risposta di Maple è

$$[x = 0.5, y(x) = 2.00461547065071244]$$

Come nel caso del metodo di Eulero, possiamo poi disegnare un grafico approssimato.

## 8. Equazioni alle differenze

In questa sezione la funzione incognita, che indicheremo sempre con  $y$ , sarà definita su un insieme discreto, che solitamente rappresenta rilevazioni fatte a intervalli di tempo spaziatamente uniformemente. Un esempio in economia: la funzione  $y$  può rappresentare il capitale che, impiegato ad esempio in BTP, cresce grazie a una cedola che viene pagata ogni sei mesi; in questo caso, possiamo pensare la funzione  $y$  come definita sull'insieme discreto e spaziato uniformemente

$$\left\{0, \frac{1}{2}\text{anno}, 1\text{anno}, 1\text{anno e } \frac{1}{2}, 2\text{anni}, 2\text{anni e } \frac{1}{2}, \dots\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots\right\}.$$

Solitamente si prende l'intervallo temporale di lunghezza 1, quindi  $y$  è definita sull'insieme dei numeri naturali o un suo sottoinsieme. Una tale funzione si chiama successione. Solitamente, il valore in  $n \in \mathbb{N}$  della successione  $y$  si indica con  $y_n$  anziché con  $y(n)$ .

**8.1. Generalità.** Sia  $y : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . La derivata discreta della successione  $y$  rappresenta la variazione di questa funzione nell'unità di tempo. Pertanto definiamo la successione derivata discreta  $\Delta y$  della successione  $y$  come

$$(\Delta y)_n = y_{n+1} - y_n.$$

La derivata seconda discreta  $\Delta^2 y$  della successione  $y$  è la derivata discreta della derivata discreta. In formule:

$$(\Delta^2 y)_n = (\Delta(\Delta y))_n = (\Delta y)_{n+1} - (\Delta y)_n = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n.$$

ESEMPIO B.20. Calcolare derivata discreta e derivata seconda discreta delle successioni:

$$\begin{array}{ll} a) & y_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ c) & y_n = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ e) & y_n = 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{array} \quad \begin{array}{ll} b) & y_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ d) & y_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \\ f) & y_n = a^n \quad \forall n \in \mathbb{N}; a \in \mathbb{R} \text{ dato.} \end{array}$$

a) Si ha  $(\Delta y)_n = y_{n+1} - y_n = 1 - 1 = 0$  per ogni  $n$ . Facilmente si deduce che  $(\Delta^2 y)_n = \Delta(\Delta y)_n = 0$ .

b) Si ha  $(\Delta y)_n = y_{n+1} - y_n = n + 1 - n = 1$  per ogni  $n$ . Ricordando a), si deduce che  $(\Delta^2 y)_n = \Delta(\Delta y)_n = 0$ .

Sin qui, tutto è analogo al caso continuo: la derivata della funzione  $f(x)$  identicamente 1 è 0; la derivata di  $x$  è 1.

c) Si ha  $(\Delta y)_n = (n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$  e  $(\Delta^2 y)_n = 2$ .

Qui si intravede una piccola differenza col caso continuo: la derivata di  $x^2$  è semplicemente  $2x$ .

d) Si ha  $(\Delta y)_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)}$ . Inoltre  $(\Delta^2 y)_n = \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$ .

L'analogo continuo di questa successione è la funzione  $\frac{1}{x}$ , la cui derivata è  $-\frac{1}{x^2}$  e la cui derivata seconda è  $\frac{2}{x^3}$ .

e) Si ha  $(\Delta y)_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n$ . La successione  $2^n$  coincide pertanto con la sua derivata discreta (e quindi anche con le sue derivate di ordine successivo).

f) Si ha  $(\Delta y)_n = a^{n+1} - a^n = (a - 1)a^n$ . La successione  $a^n$  coincide pertanto con multiplo della sua derivata discreta. Da cui  $(\Delta^2 y)_n = (a - 1)^2 a^n$ .

Le funzioni del tipo  $a^n$  hanno quindi lo stesso comportamento delle “corrispondenti” funzioni esponenziali continue  $a^x$ , ma ci sono alcune differenze importanti: innanzi tutto, mentre  $a^n$  ha senso anche quando  $a \leq 0$ , le funzioni  $a^x$  si considerano solo quando la base  $a$  è positiva strettamente. Inoltre, nel caso continuo la base “privilegiata” è il numero di Nepero  $e$ ,  $((e^x)' = e^x)$ ; nel caso discreto, la successione del tipo  $a^n$  che coincide con la sua derivata discreta è  $2^n$ .

DEFINIZIONE B.1. Una equazione alle differenze di ordine  $k$  è una espressione del tipo

$$(B.12) \quad f(n, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

dove  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione. Una soluzione dell'equazione alle differenze è una successione  $y : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfa la (B.12).

Equivalentemente, possiamo pensare a un'equazione alle differenze di ordine  $k$  come a una espressione che contiene la funzione incognita  $y$  e le sue derivate discrete sino all'ordine  $k$ .

ESEMPIO B.21. L'equazione alle differenze

$$y_{n+1} - 2y_n = 0$$

può essere riscritta come  $(\Delta y)_n - y_n = 0$ . Ricordando l'esempio B.20e), oppure notando che ad ogni passo  $y_{n+1} = 2y_n$ , si ricava facilmente che le soluzioni di questa equazione alle differenze sono del tipo  $k 2^n$ , al variare di  $k \in \mathbb{R}$ .

ESEMPIO B.22. Verificare che la successione  $y_n = 1 - \frac{2}{n}$ , definita per  $n \geq 1$  è soluzione dell'equazione alle differenze

$$(n+1)y_{n+1} + ny_n = 2n - 3 \quad \forall n \geq 1.$$

Sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned} (n+1)y_{n+1} + ny_n &= (n+1)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + n\left(1 - \frac{2}{n}\right) \\ &= n+1 - 2 + n - 2 = 2n - 3, \end{aligned}$$

come volevasi.

Non tutte le equazioni alle differenze ammettono soluzioni.

ESEMPIO B.23. L'equazione alle differenze  $(y_n + y_{n+1})^2 + y_n^2 = -1$  non ammette alcuna soluzione (la somma di due quadrati non potrà mai essere  $-1$ ). Di nuovo, possiamo scrivere l'equazione come  $((\Delta y)_n + 2y_n)^2 + y_n^2 = -1$ , ovvero facendo comparire l'operatore derivata discreta.

Studieremo una importante classe di equazioni alle differenze: quelle lineari a coefficienti costanti, di ordini 1 e 2. Queste equazioni ammettono sempre soluzioni. Sono della forma

$$(B.13) \quad L(y_{n+2}, y_{n+1}, y_n) = b,$$

dove  $b$  è un numero reale  $L$  è una funzione lineare della forma

$$\begin{aligned} L(y_{n+2}, y_{n+1}, y_n) &= y_{n+1} + a y_n && \text{se l'ordine è 1,} \\ L(y_{n+2}, y_{n+1}, y_n) &= y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n && \text{se l'ordine è 2,} \end{aligned}$$

per certi  $a, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ .

È facile verificare che in entrambi i casi vale

$$L(\alpha y_{n+2} + \beta z_{n+2}, \alpha y_{n+1} + \beta z_{n+1}, \alpha y_n + \beta z_n) = \alpha L(y_{n+2}, y_{n+1}, y_n) + \beta L(z_{n+2}, z_{n+1}, z_n)$$

per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , per ogni  $y_n$  e  $z_n$  successioni (è la condizione di linearità di  $L$ ).

L'equazione alle differenze

$$(B.14) \quad L(y_{n+2}, y_{n+1}, y_n) = 0$$

si dice equazione omogenea associata all'equazione  $L(y_{n+2}, y_{n+1}, y_n) = b$ .

Due sono le proprietà fondamentali, vere in generale:

**TEOREMA B.24.** *Se la successione  $y_n^*$  è soluzione dell'equazione (B.13), allora ogni altra soluzione di (B.13) si scrive come somma di  $y_n^*$  e di una soluzione dell'equazione omogenea associata (B.14).*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $y_n^*$  è soluzione dell'equazione (B.13), allora  $L(y_{n+2}^*, y_{n+1}^*, y_n^*) = b$ . Inoltre se  $z_n$  è soluzione di (B.14), allora  $L(z_{n+2}, z_{n+1}, z_n) = 0$ . Quindi, sommando,

$$L(y_{n+2}^* + z_{n+2}, y_{n+1}^* + z_{n+1}, y_n^* + z_n) = L(y_{n+2}^*, y_{n+1}^*, y_n^*) + L(z_{n+2}, z_{n+1}, z_n) = b,$$

ovvero  $y_n^* + z_n$  è soluzione di (B.13).

Viceversa, se  $w_n$  è soluzione di (B.13), allora  $L(w_{n+2}, w_{n+1}, w_n) = b$ . Ma allora, per differenza,

$$L(w_{n+2} - y_{n+2}^*, w_{n+1} - y_{n+1}^*, w_n - y_n^*) = L(w_{n+2}, w_{n+1}, w_n) - L(y_{n+2}^*, y_{n+1}^*, y_n^*) = b - b = 0,$$

quindi  $z_n = w_n - y_n^*$  è soluzione di (B.14), ovvero  $w_n = y_n^* + z_n$ , con  $z_n$  soluzione dell'omogenea associata.  $\square$

**TEOREMA B.25.** *Se  $z_n$  e  $w_n$  sono soluzioni di (B.14), allora per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  anche  $\alpha z_n + \beta w_n$  è soluzione di (B.14).*

**DIMOSTRAZIONE.** Segue banalmente dalla linearità di  $L$ .  $\square$

**8.2. Equazioni alle differenze lineari a coefficienti costanti di ordine 1.** In questa sottosezione ci occupiamo di trovare tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze

$$(B.15) \quad y_{n+1} + a y_n = b \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

È evidente che una soluzione di questa equazione alle differenze risulta univocamente determinata una volta che si conosca il suo primo termine.

Iniziamo dallo studio dell'omogenea associata, ovvero di

$$y_{n+1} + a y_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ricordando il Teorema B.25, data una qualsiasi soluzione non banale di questa equazione, tutte le soluzioni si otterranno da questa moltiplicando per una costante.

Si cerca una soluzione del tipo  $y_n = \lambda^n$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$  da determinarsi. Sostituendo nell'equazione omogenea, otteniamo  $\lambda^{n+1} + a \lambda^n = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , ovvero

$$(B.16) \quad (\lambda + a) \lambda^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Siccome  $\lambda^0 = 1$  (con la convenzione che  $0^0 = 1$ ), necessariamente deve essere  $\lambda = -a$ . D'altra parte, se  $\lambda = -a$  tutte le equazioni (B.16) sono verificate (anche per  $n > 0$ ). Quindi tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_n = c (-a)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(con la convenzione che  $0^0 = 1$ ).

Ci occupiamo ora del caso non omogeneo, cioè  $b \neq 0$  e cerchiamo di determinare una soluzione  $y_n^*$  di questa equazione, della forma più semplice possibile. Tutte le soluzioni si troveranno poi sfruttando il Teorema B.24.

Visto che il secondo membro è costante, proviamo a vedere se la (B.15) può avere una soluzione costante. Quindi proviamo a capire se per qualche  $k \in \mathbb{R}$  la successione  $y_n = k$  può essere soluzione. Tale  $k$  deve verificare

$$y_{n+1} + a y_n = k + a k = b \quad \Leftrightarrow \quad k(1 + a) = b,$$

quindi se  $b \neq 0$  e  $1 + a = 0$  questa equazione non ha mai soluzioni; se invece  $1 + a \neq 0$ , allora si trova che  $k = b/(1 + a)$ .

Se poi  $1 + a = 0$ , cioè  $a = -1$ , si prova a trovare una soluzione della forma  $y_n = k n$ , con  $k$  da determinare sostituendo nell'equazione. Per  $a = -1$  si ha

$$y_{n+1} + a y_n = k(n + 1) - k n = k = b.$$

Riassumendo: **una** soluzione  $y_n^*$  di (B.15) è

$$y_n^* = \begin{cases} b/(1 + a) & a \neq -1 \\ b n & a = -1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

**tutte** le soluzioni sono della forma

$$y_n = y_n^* + c(-a)^n, \quad \text{al variare di } c \in \mathbb{R}$$

ricordando al solito che  $0^0 = 1$ .

**ESEMPIO B.26.** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze  $y_{n+1} + 3y_n = 8$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Cerchiamo dapprima tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata:  $y_{n+1} + 3y_n = 0$ . Immaginando una soluzione del tipo  $\lambda^n$  otteniamo che  $\lambda$  deve essere soluzioni di  $\lambda + 3 = 0$ , ovvero  $\lambda = -3$ . pertanto tutte le soluzioni dell'omogenea associata sono del tipo  $c(-3)^n$ , al variare di  $c \in \mathbb{R}$ .

Cerchiamo ora una soluzione  $y_n^*$  dell'equazione completa, della forma  $y_n^* = k$ , cioè costante. Tale costante deve verificare  $k + 3k = 8$ , quindi  $k = 2$ .

Quindi tutte le soluzioni dell'equazione sono date dalla formula

$$y_n = 2 + c(-3)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

al variare di  $c \in \mathbb{R}$ .

In particolare, la soluzione che verifica  $y_0 = 1$  si ottiene risolvendo  $1 = y_0 = 2 + c(-3)^0$ , che fornisce  $c = -1$ . Quindi la soluzione dell'equazione (completa) tale che  $y_0 = 1$  è

$$y_n = 2 - (-3)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

ESEMPIO B.27. Indichiamo con  $P_n$  la produzione di un determinato bene nel corso del mese  $n$  e con  $D_n$  la domanda relativa a quel bene. Possiamo modellizzare la relazione tra produzione e domanda con l'equazione

$$D_n = a - bP_n$$

dove  $a$  e  $b$  sono costanti reali positive ( $a$  rappresenta il massimo interesse del consumatore e al crescere della produzione ci sarà meno interesse verso quella merce).

L'offerta  $O_n$  nel mese  $n$  di quel determinato bene dipende dalla produzione del mese precedente (immaginando un mese per distribuire la nuova merce ai punti vendita) ossia

$$O_n = cP_{n-1}.$$

Una situazione di perfetto equilibrio si presenta quando la domanda uguaglia l'offerta. Questo accade quando

$$a - bP_n = cP_{n-1}.$$

Questa equazione ci dice quindi quanto si deve produrre per una situazione "ottimale" in cui la domanda uguaglia l'offerta. Otteniamo una equazione lineare e non omogenea:

$$P_{n+1} + \frac{c}{b}P_n = \frac{a}{b}.$$

Le soluzioni dell'omogenea associata sono multipli di  $(-\frac{c}{b})^n$ . Una soluzione particolare è la costante  $\frac{a}{b+c}$ . Quindi

$$P_n = \frac{a}{b+c} + \text{const} \left(-\frac{c}{b}\right)^n.$$

**8.3. Equazioni alle differenze lineari a coefficienti costanti di ordine 2.** In questa sottosezione ci occupiamo di trovare tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze

$$(B.17) \quad y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n = b \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Iniziamo dallo studio dell'omogenea associata, ovvero di

$$(B.18) \quad y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

È evidente che una soluzione  $y_n$  di questa equazione alle differenze risulta univocamente determinata una volta che si conoscano i suoi due primi termini  $y_0$  e  $y_1$ . Supponiamo di conoscere due soluzioni  $z_n$  e  $w_n$  di (B.18). Ricordando il Teorema B.25, per ogni  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  anche  $c_1 z_n + c_2 w_n$  è soluzione di (B.18). Quindi la soluzione  $y_n$  corrispondente alla scelta di  $y_0$  e  $y_1$  in  $\mathbb{R}$  coinciderà con la combinazione lineare  $c_1 z_n + c_2 w_n$  se  $c_1, c_2$  sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} c_1 z_0 + c_2 w_0 = y_0 \\ c_1 z_1 + c_2 w_1 = y_1. \end{cases}$$

Questo sistema ammette soluzioni per ogni possibile scelta di  $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$  se e solo se è di Cramer, ovvero se  $(z_0, z_1)$  e  $(w_0, w_1)$  sono indipendenti:

$$\det \begin{pmatrix} z_0 & w_0 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Occorre quindi trovare due soluzioni  $z_n$  e  $w_n$  per cui il determinante appena scritto non sia nullo.

Si cerca soluzione del tipo  $y_n = \lambda^n$ , con  $\lambda$  da determinarsi. Sostituendo nell'equazione (B.18), otteniamo  $\lambda^{n+2} + a_1 \lambda^{n+1} + a_2 \lambda^n = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , ovvero

$$(B.19) \quad (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) \lambda^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Siccome  $\lambda^0 = 1$  (con la convenzione che  $0^0 = 1$ ), necessariamente deve essere

$$(B.20) \quad \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0.$$

D'altra parte, se  $\lambda$  è radice di (B.20), allora tutte le equazioni della formula (B.19) sono verificate (anche per  $n > 0$ ).

Come nel caso delle equazioni differenziali, si presentano tre casi, a seconda del discriminante dell'equazione di secondo grado.

**Primo caso:** se  $\Delta = a_1^2 - 4a_2 > 0$ , allora il polinomio  $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2$  ha due radici reali e distinte, che chiamiamo  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Allora  $z_n = \lambda_1^n$  e  $w_n = \lambda_2^n$  risultano soluzioni dell'equazione omogenea (B.18) e verificano la condizione di indipendenza:

$$\det \begin{pmatrix} z_0 & w_0 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0.$$

Quindi tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

al variare di  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

**ESEMPIO B.28.** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze  $y_{n+2} - y_n = 0$ . Determinare poi la soluzione tale che  $y_0 = 0, y_1 = 2$ .

Cerchiamo una soluzione del tipo  $\lambda^n$ . tale  $\lambda$  dovrà verificare l'equazione  $\lambda^2 - 1 = 0$ , che ha due soluzioni reali e distinte  $\lambda = \pm 1$ . Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze sono date da

$$y_n = c_1 1^n + c_2 (-1)^n = c_1 + c_2 (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

al variare di  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

La soluzione tale che  $y_0 = 0, y_1 = 2$  corrisponde a scegliere  $c_1, c_2$  soluzioni di

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 - c_2 = 2,$$

ovvero  $c_1 = 1, c_2 = -1$ . Pertanto tale soluzione è

$$y_n = 1 + (-1)(-1)^n = 1 + (-1)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$



**Secondo caso:** se  $\Delta = a_1^2 - 4a_2 = 0$ , allora il polinomio  $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2$  ha una sola radice reale,  $\lambda = -a_1/2$ . Allora tutte le successioni del tipo  $k(-a_1/2)^n$  risultano soluzione dell'equazione omogenea (B.18) per ogni  $k$  in  $\mathbb{R}$ . Supponiamo per il momento che  $a_1 \neq 0$  e sfruttiamo il metodo di variazione delle costanti: immaginiamo che un'altra soluzione sia della forma  $w_n = k_n(-a_1/2)^n$ , con  $k_n$  successione da determinarsi.

Ricordando che  $a_1^2 = 4a_2$ , si ha

$$\begin{aligned} 0 &= w_{n+2} + a_1 w_{n+1} + a_2 w_n = k_{n+2} \left(-\frac{a_1}{2}\right)^{n+2} + a_1 k_{n+1} \left(-\frac{a_1}{2}\right)^{n+1} + \frac{a_1^2}{4} k_n \left(-\frac{a_1}{2}\right)^n \\ &= \left(-\frac{a_1}{2}\right)^{n+2} (k_{n+2} - 2k_{n+1} + k_n). \end{aligned}$$

D'altra parte  $k_{n+2} - 2k_{n+1} + k_n = \Delta^2 k_n = 0$  se  $k_n$  è della forma  $k_n = c_1 + c_2 n$ . In particolare, se scegliamo  $k_n = n$ , le successioni  $z_n = (-a_1/2)^n$  e  $w_n = n(-a_1/2)^n$  sono soluzioni dell'equazione alle differenze (B.18) e verificano la condizione di indipendenza:

$$\det \begin{pmatrix} z_0 & w_0 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_1/2 & -a_1/2 \end{pmatrix} = -a_1/2 \neq 0.$$

(tranne nel caso in cui  $a_1 = 0$ ). Quindi tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_n = c_1 (-a_1/2)^n + c_2 n (-a_1/2)^n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

al variare di  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . L'ulteriore caso in cui  $a_1 = 0$ , è banale: l'equazione è  $y_{n+2} = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , che ha come soluzione una qualsiasi successione nulla dal secondo termine in poi.

**Terzo caso:** se  $\Delta = a_1^2 - 4a_2 < 0$ , allora il polinomio  $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2$  ha due radici reali complesse coniugate; siano esse  $\lambda \pm i\mu$ . Allora possiamo dire che  $(\lambda + i\mu)^n$  e  $(\lambda - i\mu)^n$  sono soluzioni dell'equazione omogenea, però purtroppo sono successioni a valori complessi e, di solito, si è interessati a trovare soluzioni che siano successioni a valori reali. Se scriviamo  $\lambda \pm i\mu$  in forma esponenziale, sapremo meglio calcolare  $(\lambda \pm i\mu)^n$ . Se  $r = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$  e  $\theta$  è un argomento di  $\lambda + i\mu$ , allora

$$\lambda \pm i\mu = r e^{\pm i\theta}$$

quindi

$$(\lambda \pm i\mu)^n = r^n e^{\pm i n \theta} = r^n (\cos(n\theta) \pm i \sin(n\theta)).$$

Come nel caso delle equazioni differenziali, scopriamo che le successioni reali  $z_n = r^n \cos(n\theta)$  e  $w_n = r^n \sin(n\theta)$  sono ancora soluzioni dell'equazione (B.18). Inoltre verificano la condizione di indipendenza

$$\det \begin{pmatrix} z_0 & w_0 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r \cos(\theta) & r \sin(\theta) \end{pmatrix} = r \sin(\theta) \neq 0,$$

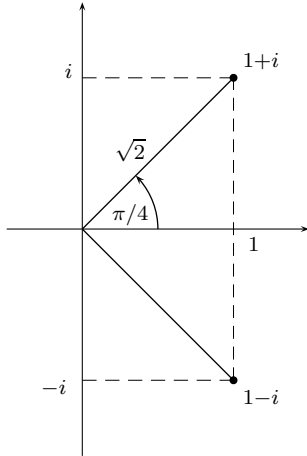
(si ricordi che  $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$ , dal momento che  $\mu \neq 0$ ). Quindi tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_n = c_1 r^n \cos(n\theta) + c_2 r^n \sin(n\theta) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

al variare di  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

ESEMPIO B.29. Determinare tutte le soluzioni di  $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_n = 0$ .

L'equazione associata a questa equazione alle differenze è  $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ , che ha due radici complesse coniugate  $1 \pm i$ .



Dobbiamo trovare la forma esponenziale di questi numeri complessi. La distanza dall'origine di  $1 \pm i$  è  $\sqrt{2}$ ; inoltre i triangoli rettangoli in figura sono isosceli, quindi un argomento è  $\pi/4$ . Possiamo scrivere

$$1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

$$1 - i = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}.$$

A questo punto abbiamo tutti gli elementi per poter scrivere tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze data. Esse sono

$$y_n = c_1 (\sqrt{2})^n \cos(n\pi/4) + c_2 (\sqrt{2})^n \sin(n\pi/4) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

al variare di  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Ci occupiamo ora del caso non omogeneo, cioè  $b \neq 0$  e cerchiamo di determinare una soluzione  $y_n^*$  di questa equazione, della forma più semplice possibile. Tutte le soluzioni si troveranno poi sfruttando il Teorema B.24.

Immaginiamo una soluzione che sia costante:  $y_n = k$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Allora  $k$  deve verificare

$$k + a_1 k + a_2 k = b \quad \Leftrightarrow \quad k(1 + a_1 + a_2) = b.$$

Questa equazione ammette soluzione quando  $1 + a_1 + a_2 \neq 0$  e quindi  $k = b/(1 + a_1 + a_2)$ .

Se poi  $1 + a_1 + a_2 = 0$ , immaginiamo una soluzione della forma  $y_n = kn$ . Un tale  $k$  dovrà verificare

$$k(n+2) + a_1 k(n+1) + a_2 kn = b \quad \Leftrightarrow \quad k(2 + a_1) = b.$$

Questa equazione ammette soluzione quando  $2 + a_1 \neq 0$  e quindi  $k = b/(2 + a_1)$ .

Infine, se  $1 + a_1 + a_2 = 0$  e  $2 + a_1 = 0$ , ovvero se  $a_1 = -2$  e  $a_2 = 1$ , immaginiamo una soluzione del tipo  $y_n = kn^2$ . Allora  $k$  dovrà verificare

$$k(n+2)^2 + a_1 k(n+1)^2 + a_2 kn^2 = b \quad \Leftrightarrow \quad 2k = b,$$

quindi  $k = b/2$ .

Riassumendo

$$y_n^* = \begin{cases} b/(1 + a_1 + a_2) & \text{se } 1 + a_1 + a_2 \neq 0 \\ bn/(2 + a_1) & \text{se } 1 + a_1 + a_2 = 0, 2 + a_1 \neq 0 \\ bn^2/2 & \text{se } 1 + a_1 + a_2 = 0, 2 + a_1 = 0. \end{cases}$$

ESEMPIO B.30. Determinare le soluzioni dell'equazione alle differenze  $y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 3$ .

Studiamo dapprima tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata, ovvero dell'equazione  $y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 0$ . Questa ha soluzioni della forma  $\lambda^n$  se il numero  $\lambda$  è radice di  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ , ovvero se  $\lambda = 1$ . Abbiamo quindi che tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze omogenea associata sono date da

$$z_n = c_1 1^n + c_2 n 1^n = c_1 + c_2 n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

al variare di  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Determiniamo ora una soluzione dell'equazione completa, della forma  $y_n^* = k$ . Tale costante  $k$  deve verificare  $k - 2k + k = 3$ , che però non ha soluzioni. Proviamo quindi con  $y_n^* = kn$  e troviamo di nuovo una equazione priva di soluzioni  $2k - 2k = 3$ . Infine con  $y_n^* = kn^2$  troviamo  $2k = 3$ . Quindi  $y_n^* = \frac{3}{2}n^2$  è soluzione dell'equazione completa.

Tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze sono quindi della forma

$$y_n = \frac{3}{2}n^2 + c_1 + c_2 n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

al variare di  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

ESEMPIO B.31. Sempre pensando a fenomeni economici, che solitamente non sono istantanei, ecco un altro esempio.

Indichiamo con  $P_n$  il prezzo di un certo bene al tempo  $n$ , con  $O_n$  l'offerta, con  $D_n$  la domanda.

L'equazione della domanda è del tipo

$$D_n = a - bP_n$$

dove  $a$  e  $b$  sono due costanti positive;  $a$  rappresenta il consumo massimo che si potrebbe avere di un dato bene posto che abbia costo nullo, mentre  $a/b$  rappresenta il prezzo che quel bene non deve superare (altrimenti il consumo diventerebbe nullo).

L'offerta segue invece la legge

$$O_{n+1} = -c + fP_n,$$

dove  $c \geq 0$  e  $f$  sono due costanti positive e si possono spiegare in questo modo: se il prezzo di un bene è nullo, allora nessuno lo produce; ma all'aumentare del prezzo, aumenta l'interesse del produttore, che nel periodo seguente aumenta anche la produzione.

Quando  $O_n = D_n$  ci troviamo nel caso più semplice, che porta a una equazione alle differenze di ordine uno per il prezzo  $P_n$ :

$$a - b P_{n+1} = D_{n+1} = O_{n+1} = -c + f P_n \quad \text{ovvero} \quad b P_{n+1} + f P_n = a + c$$

con soluzione

$$P_n = \frac{a+c}{b+f} + \left( P_0 - \frac{a+c}{b+f} \right) \left( -\frac{f}{b} \right)^n.$$

Il prezzo quindi oscilla (dato che  $-\frac{f}{b} < 0$ ) e, se  $\frac{f}{b} < 1$ , si stabilizza verso  $\frac{a+c}{b+f}$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Una situazione più complicata si presenta quando domanda e offerta non sono uguali e si generano delle scorte  $S_n$ .

Le scorte sono ovviamente l'invenduto dell'anno in corso e dei precedenti

$$S_n - S_{n-1} = O_n - D_n$$

e il prezzo cala al crescere dell'invenduto, ossia per  $g > 0$  si ha

$$P_{n+1} - P_n = -g(S_n - S_{n-1}) = -g(O_n - D_n).$$

Otteniamo quindi per il prezzo una equazione alle differenze del secondo ordine

$$P_{n+2} - (1 - bg) P_{n+1} + fg P_n = (a + c)g.$$

L'equazione completa ha come soluzione particolare quella costante  $P_n^* = \frac{a+c}{b+f}$  (che è la stessa di prima); le soluzioni dell'equazione omogenea associata dipendono dalle soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$P_{n+2} - (1 - bg) P_{n+1} + fg P_n = 0 \quad \lambda^2 - (1 - bg) \lambda + fg = 0$$

che possono essere reali oppure complesse. Se entrambe le radici (nel caso di discriminante nullo la radice) hanno modulo strettamente minore di uno, allora di nuovo il prezzo  $P_n$  tende all'equilibrio  $\frac{a+c}{b+f}$  per  $n \rightarrow \infty$ .

In ogni caso, il prodotto delle radici è  $fg > 0$ . Se  $fg > 1$  sicuramente almeno una delle radici ha modulo maggiore di uno e il prezzo non tende all'equilibrio. Si crea una situazione di instabilità: troppa avidità da parte del produttore ( $f$  grande) che cerca di sfruttare l'aumento del prezzo o troppa paura da parte del consumatore ( $g$  grande) che fa crollare il prezzo.

## 9. Esercizi

## Equazioni differenziali.

1) Sia data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{2e^x y^2}{(1 + e^x)^3}.$$

- a) Determinare le eventuali soluzioni costanti.
- b) Determinare la soluzione soddisfacente la condizione iniziale

$$y(0) = \frac{4}{5}.$$

2) Data l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{x+1}{x}y - 3x,$$

trovarne le soluzioni sulla semiretta  $x > 0$ .

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = 2y - y^2.$$

- a) Sia  $y_0$  un qualunque valore reale fissato. Si determini la soluzione tale che  $y(0) = y_0$ ;
- b) provare che se  $y_0 \in (0, 2)$  allora la soluzione è definita per ogni  $t \geq 0$  ed ammette limite finito per  $t \rightarrow +\infty$ . Calcolare il valore di tale limite;

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$x'(t) = \frac{1}{t} \sin(x+1).$$

- a) Se ne determinino le soluzioni costanti e l'integrale generale;
- b) si scriva la soluzione che verifica la condizione  $x(1) = 1$ .

5) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{t(4-y)}{(2+t)^2}.$$

Determinare quindi la soluzione particolare  $y = f(t)$  tale che  $f(0) = 4 + e^{-1}$ .

6) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{\alpha e^y - 1}{e^y}.$$

a) Per ogni valore di  $\alpha$ , individuare le soluzioni costanti e scrivere l'integrale generale dell'equazione;

b) fissare  $\alpha = 1$  e scrivere esplicitamente la soluzione che verifica la condizione  $y(0) = \log 2$ , identificandone il dominio.

7) Si scriva la soluzione del problema

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{e^{3x}}{1 + e^{3x}}y(x) + e^{3x} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

8) Risolvere l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{xy}{x+1} + e^{4x}$$

e determinare la soluzione particolare che verifica la condizione iniziale  $y(0) = 0$ .

9) Risolvere l'equazione differenziale

$$xy' = y^2 - 4y + 3.$$

Determinare quindi (se esistono) le soluzioni definite su tutto  $\mathbb{R}$ .

10) Si calcolino tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' - y = e^t.$$

Si indichi con  $y_0(t)$  quella particolare soluzione tale che  $y(0) = 1$ . Determinare la soluzione  $y_0(t)$ .

11) Confrontare le approssimazioni ottenute con il metodo di Eulero e il metodo di Eulero migliorato con passo 0.02 relative alla soluzione del problema (di cui sappiamo trovare la soluzione)

$$\begin{cases} y' = x - y \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

sull'intervallo  $[0, 1]$ .

12) Approssimare, con passo 0.02 nell'intervallo  $[1, 4]$  la soluzione del problema

$$\begin{cases} y' = \frac{x+y}{x-y} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

13) Approssimare, con passo 0.02 nell'intervallo  $[0, 5]$  la soluzione del problema

$$\begin{cases} y' = x e^{-y} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

14) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$y''(x) - 2y'(x) - 8y(x) = 0.$$

Determinare poi la soluzione tale che  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

15) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$y''(x) - 2y'(x) + 26y(x) = 0.$$

Determinare poi la soluzione tale che  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ .

16) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0.$$

Determinare poi la soluzione tale che  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

### Equazioni alle differenze.

1) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze

$$y_{n+1} + 3y_n = 8 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Determinare poi la soluzione tale che  $y_0 = 1$ .

2) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Determinare poi la soluzione tale che  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 3$ .

3) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze

$$4y_{n+2} + 4y_{n+1} + y_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Determinare poi la soluzione tale che  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 1$ .

4) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze

$$y_{n+2} + y_n = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$





## Riferimenti bibliografici

- [1] R. A. Adams. *Calcolo Differenziale vol. 1 e 2*. CEA, Milano, 2003.
- [2] P. Marcellini e C. Sbordone. *Istituzioni di matematica e applicazioni*. Liguori, Napoli, 1985.
- [3] A. Bacciotti e F. Ricci. *Analisi matematica, vol. 1*. Liguori, Napoli, 1994.
- [4] C. D. Pagani e S. Salsa. *Analisi Matematica, vol. 1 e 2*. Zanichelli, Bologna, 1990.
- [5] F. Parodi e T. Zolezzi. *Appunti di Analisi Matematica*. ECIG, Genova, 2002.
- [6] M. Bramanti, C. D. Pagani e S. Salsa. *Matematica. Calcolo infinitesimale e Algebra lineare*. Zanichelli, Bologna, 2004.