CAPITOLO 2

Equazioni differenziali e alle differenze

Introduciamo le equazioni differenziali e alle differenze partendo da un semplice problema: quello di studiare la crescita di una popolazione. Indichiamo con $p(t)$ il numero di individui di una popolazione fissata (ad esempio, tutti i cittadini italiani, ma anche tutti i batteri di una coltura, ecc.) al tempo t. Supponiamo che, in un intervallo (piccolo) di tempo h, l'aumento del numero degli individui di una popolazione sia proporzionale al tempo trascorso e al numero di individui all'istante iniziale. Questo si esprime dicendo che per una certa costante di proporzionalità a vale

$$p(t+h) - p(t) = a\, h\, p(t) \qquad h \neq 0,$$

o anche,

$$\frac{p(t+h) - p(t)}{h} = a\, p(t) \qquad h \neq 0.$$

Passando al limite per $h \to 0$ nella relazione precedente otteniamo

$$p'(t) = a\, p(t).$$

Questo è un esempio di equazione differenziale; l'incognita è la funzione $p(t)$ e l'equazione esprime una condizione sulla derivata prima della funzione $p(t)$. La costante a si può interpretare come il tasso di crescita (istantaneo) della popolazione.

A questo punto mi dovreste obiettare che la funzione p assume solo valori discreti, quindi non è derivabile. In realtà il problema ha interesse quando la popolazione è molto grande, quindi fluttuazioni di una unità possono essere pensate come molto piccole. Lo stesso tipo di equazione si incontra anche in chimica (decadimento radioattivo), fisica (circuiti LC),...

Qualora fossimo più interessati a rilevazioni annuali del numero di individui (o comunque a intervalli di tempo prefissati), non avrebbe senso passare al limite per $h \to 0$. L'equazione $p(t+h) - p(t) = a\, h\, p(t)$ può essere riscritta pensando che la rilevazione sia fatta anno per anno ($h =$ 1anno, previsione per i prossimi anni):

$$p(n+1) - p(n) = a\, p(n) \qquad n = 2004, 2005, \ldots.$$

In questo modo abbiamo ottenuto una equazione alle differenze.

1. Equazioni differenziali

Una equazione in una incognita è un'espressione del tipo $f(x) = 0$, dove f è una funzione assegnata di una variabile reale. Una soluzione dell'equazione è un x_0 tale che $f(x_0) = 0$. Nelle equazioni differenziali ordinarie l'incognita è una funzione di una variabile reale, che di solito si indica con $y(x)$; l'equazione coinvolge la funzione y e alcune delle sue derivate. Il termine ordinarie si riferisce al fatto che la funzione incognita dipende solo da una variabile e quindi le derivate che compaiono sono derivate ordinarie. Ci sono altri tipi di equazioni differenziali in cui le incognite sono funzioni di due o più variabili e nell'equazione compaiono la funzione incognita e alcune delle sue derivate parziali.

Una equazione differenziale di ordine n è un'espressione del tipo

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0,$$

dove F è un'espressione che coinvolge $n+2$ variabili, ossia una funzione definita in un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+2}$. In parole più povere, un'equazione differenziale di ordine n è un'equazione che coinvolge la funzione, le sue derivate fino a quella di ordine n e la variabile indipendente.

Una soluzione dell'equazione differenziale è una funzione $y(x)$ definita e derivabile n volte in un **intervallo** $I \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto tale che per ogni $x \in I$ si abbia $(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in \operatorname{dom} F$ e

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \qquad \forall x \in I.$$

Si chiama integrale generale dell'equazione l'insieme di tutte le sue soluzioni.

L'equazione si dice in forma normale se è possibile esplicitare nell'equazione la derivata di ordine più alto, ovvero se può essere messa nella forma:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)),$$

dove $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ è una funzione.

Nell'equazione compare la funzione incognita $y(x)$ insieme alle sue derivate, tutte calcolate nello stesso punto x. Siccome il punto è sempre lo stesso, talvolta si omette la dipendenza da x e si scrive semplicemente

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

☞**Esempio 2.1.** L'equazione $x\,y' = y$ non è in forma normale, perché non è possibile scrivere $y' = y/x$, a meno di non sapere che x è sempre diverso da 0.

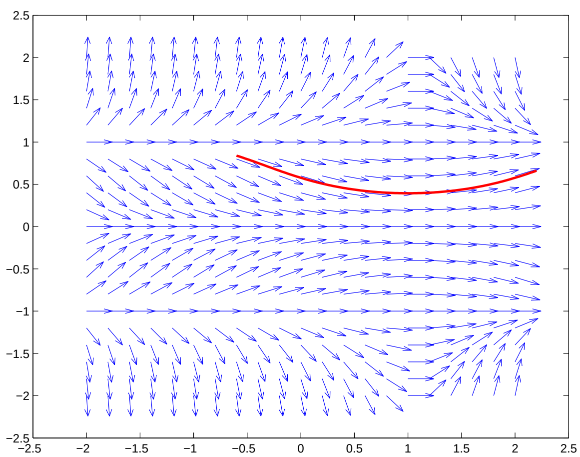
Una equazione non in forma normale potrebbe non avere soluzioni, come $(y')^2 + y^2 + 1 = 0$. ☺

Tratteremo solo tre tipi di equazioni in forma normale: del primo ordine a variabili separabili, del primo ordine lineari, del secondo ordine lineari omogenee a coefficienti costanti.

In particolare, un'equazione di primo ordine in forma normale è del tipo

$$y'(x) = f(x, y(x));$$

una sua soluzione è una funzione $y(x)$ definita e derivabile in un **intervallo** $I \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e tale che per ogni $x \in I$ si abbia $(x, y(x)) \in \operatorname{dom} f$ e $y'(x) = f(x, y(x))$. Graficamente, possiamo pensare che con l'equazione differenziale assegniamo in ogni punto il valore della derivata (cioè della pendenza che deve avere la tangente alla funzione incognita se passante per il punto (x, y) del piano).



In questa figura abbiamo considerato la funzione

$$f(x, y) = (x - 1)(y^3 - y);$$

in blu è rappresentata la "derivata" in ogni punto e in rosso il grafico di una soluzione limitatamente all'intervallo $(-0.5, 2.1)$.

Si notino anche le (probabili) soluzioni costanti $y = 0$, $y = 1$, $y = -1$ (a queste altezze, la tangente è orizzontale).

L'esempio più semplice di equazione differenziale del primo ordine che sappiamo già risolvere in molti casi è

$$y'(x) = f(x)$$

con f funzione assegnata e continua su un intervallo J. Risolvere questa equazione differenziale significa trovare tutte le primitive della funzione f sull'intervallo J. Come sappiamo, non ci sarà una sola soluzione, ma ce ne saranno infinite, in dipendenza da una costante arbitraria. Sarà invece unica la soluzione che assume un certo valore prefissato y_0 in un punto assegnato x_0 dell'intervallo J.

☞**Esempio 2.2.** Trovare l'integrale generale dell'equazione $y'(x) = x^2$. Determinare la soluzione tale che $y(3) = 1$.

Si ha $y(x) = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + c$, al variare di $c \in \mathbb{R}$.

Quella soluzione tale che $y(3) = 1$ si ottiene dall'equazione $1 = y(3) = 9 + c$, ovvero $y(x) = \frac{x^3}{3} - 8$. Un altro modo di procedere per trovare la soluzione particolare è quello di calcolare $y(x) = 1 + \int_3^x \int t^2\, dt$. ☺

Con un poco più di fatica, sappiamo risolvere anche l'equazione differenziale del secondo ordine

$$y''(x) = f(x)$$

con f funzione assegnata e continua su un intervallo J, ripetendo due volte il procedimento di integrazione definita. In tal modo otterremo infinite soluzioni, in dipendenza da due costanti arbitrarie. Sarà invece unica la soluzione che assume un certo valore prefissato y_0 in un punto assegnato x_0 dell'intervallo J e la cui derivata assume il valore prefissato y_1 in un punto x_1 di J.

☞**Esempio 2.3.** Trovare l'integrale generale dell'equazione $y''(x) = x^2$.

Si ha $y'(x) = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c_1$, al variare di $c_1 \in \mathbb{R}$. Ma allora $y(x) = \int \left(\frac{x^3}{3} + c_1\right) dx = \frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2$, al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ☺

☞**Esempio 2.4.** Trovare l'integrale generale dell'equazione $y'(x) = x^{-1}$ nell'intervallo $J = (0, +\infty)$. La precisazione in questo caso è d'obbligo, perché la funzione $\frac{1}{x}$ è continua sul suo dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, che è unione di due intervalli disgiunti.

In J si ha $y(x) = \int x^{-1}\,dx = \log x + c$, al variare di $c \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che in $J' = (-\infty, 0)$ l'integrale generale sarebbe stato l'insieme delle funzioni del tipo $y(x) = \int x^{-1}\,dx = \log(-x) + c$, al variare di $c \in \mathbb{R}$. ☺

2. Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili

Queste sono equazioni differenziali della forma

$$y'(x) = f(x)\,g(y(x)) \tag{2.1}$$

o, più brevemente, $y' = f(x)\,g(y)$, dove f e g sono funzioni continue.

Cerchiamo di sviluppare un metodo che ci permetta di trovare tutte le soluzioni.

Iniziamo col determinare gli zeri della funzione g, ovvero determinare le soluzioni dell'equazione (algebrica) $g(y) = 0$. Se $g(y_0) = 0$, allora è immediato verificare che la funzione $y(x) = y_0$ è soluzione dell'equazione (2.1), perché $y'(x) = 0$ per ogni x.

Supponiamo ora di sapere che la funzione y in un qualche punto assuma un certo valore che non sia uno zero di g. Allora ci sarà un intervallo J in cui $y(x)$ non è mai uno zero di g e quindi in tale intervallo ha senso riscrivere l'equazione differenziale (2.1) nella forma:

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x) \tag{2.2}$$

Siano ora $F(x)$ una primitiva di $f(x)$ e $G(t)$ una primitiva di $\frac{1}{g(t)}$. Per la regola di derivazione della funzione composta,

$$\big(G(y(x))\big)' = G'(y(x))\, y'(x) = \frac{1}{g(y(x))}\, y'(x).$$

Quindi la (2.2) ci dice che $F(x)$ e $G(y(x))$ sono funzioni che hanno la stessa derivata nell'intervallo J. Allora dovrà esistere una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$G(y(x)) = F(x) + c.$$

Il problema è quello ora di ricavare $y(x)$ nella formula precedente. Notiamo che in teoria il procedimento dovrebbe poter essere portato a termine: la derivata $G'(y) = \frac{1}{g(y)}$ non è mai nulla nell'intervallo J, ovvero sempre positiva o sempre negativa; quindi G è strettamente crescente o strettamente descrescente, quindi invertibile e

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + c)$$

fornisce una soluzione dell'equazione (2.1).

Inoltre si noti che se g non si annulla, è unica la soluzione passante per un punto (x_0, y_0) fissato.

Ricapitoliamo quanto detto nel risultato seguente.

Teorema 2.5. *Siano I, J due intervalli, $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ due funzioni continue con $g(y) \neq 0$ per ogni $y \in J$. Siano $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$. Allora il problema*

$$\begin{cases} y'(x) = f(x)\, g(y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione.

☞**Esempio 2.6.** (modello di crescita di una popolazione) Trovare l'integrale generale dell'equazione $y'(x) = a\, y(x)$, dove $a \in \mathbb{R}$ è il tasso di crescita (o decrescita se negativo).

Si tratta di un'equazione a variabili separabili, in cui $f(x) = a$ e $g(y) = y$, per esempio.

Determiniamo dapprima gli zeri di g: $g(y) = y$ si annulla solo per $y = 0$, quindi c'è la soluzione costante $y(x) = 0$.

Supponiamo ora che $y(x)$ non sia sempre nulla e applichiamo il ragionamento precedente. Una primitiva della funzione $f(x)$ è la funzione $F(x) = a\,x$; una primitiva della funzione $1/g(y) = 1/y$ è la funzione $G(y) = \log|y|$. Pertanto per un $c \in \mathbb{R}$

$$G(y(x)) = \log(|y(x)|) = a\,x + c,$$

da cui, chiamando per brevità $k = e^c$,

$$|y(x)| = e^{ax+c} = k\, e^{ax}.$$

Siccome y deve essere derivabile in tutti i punti, dovrà essere

$$y(x) = k\, e^{ax} \qquad \text{oppure} \qquad y(x) = -k\, e^{ax}$$

per ogni x. Notando che $k = e^c > 0$, possiamo scrivere tutte le soluzioni nella forma

$$y_k(x) = k\, e^{ax} \qquad k \in \mathbb{R}$$

Così facendo abbiamo recuperato anche la soluzione costante $y(x) = 0$, che corrisponde a prendere $k = 0$.

L'evoluzione di una popolazione, che all'istante iniziale $x = 0$ vale $k > 0$ è la seguente: la popolazione si mantiene costante se $a = 0$, cresce diventando infinitamente grande se $a > 0$, si estingue se $a < 0$. ☺

☞**Esempio 2.7.** Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $y'(x) = x\, y(x)^2$. Determinare poi la soluzione tale che $y(1) = 2$ e il suo dominio.

Si tratta di una equazione a variabili separabili, in cui $f(x) = x$ e $g(y) = y^2$. Le soluzioni costanti si ottengono trovando gli zeri della funzione g: in questo caso la funzione costante $y(x) = 0$ per ogni x è soluzione dell'equazione differenziale.

Altre soluzioni si trovano supponendo $y \neq 0$ e calcolando primitive di f e $1/g$. Una primitiva di f è $F(x) = \frac{x^2}{2}$. Una primitiva di $1/g(y) = 1/y^2$ è $G(y) = -\frac{1}{y}$. Pertanto per un $c \in \mathbb{R}$

$$G(y(x)) = -\frac{1}{y(x)} = \frac{x^2}{2} + c,$$

da cui

$$y(x) = -\frac{2}{x^2 + 2c}.$$

L'integrale generale dell'equazione è quindi l'insieme formato dalle funzioni $y_{\text{cost}}(x) = 0$ e $y_c(x) = -\frac{2}{x^2+2c}$, al variare di $c \in \mathbb{R}$. Si noti che il dominio delle soluzioni del tipo y_{cost} e y_c con $c > 0$ è tutto $\mathbb{R}$. Invece, se $c \leq 0$ il dominio di y_c è un intervallo, che può essere scelto, per ora arbitrariamente, tra gli intervalli (se non vuoti) $(-\infty, -\sqrt{-2c})$, $(-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c})$ e $(\sqrt{-2c}, +\infty)$.

In particolare la soluzione tale che $y(1) = 2$ si ottiene (dopo aver scartato la soluzione costante, che non verifica questa proprietà) determinando c in modo che

$$y_c(1) = -\frac{2}{1 + 2c} = 2.$$

Si ottiene $c = -1$, quindi la soluzione è y_{-1} con dominio l'intervallo che contiene il punto 1, ossia $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Infine, vediamo come possono essere svolti gli stessi conti in maniera più immediata. Dopo aver determinato le soluzioni costanti, si scriva l'equazione nella forma

$$\frac{dy}{dx} = x\,y^2.$$

Supponiamo che a primo membro si tratti di un vero e proprio quoziente e portiamo a sinistra tutto quanto contiene la variabile y e a destra tutto quanto contiene la variabile x

$$\frac{dy}{y^2} = x\,dx$$

Ora introduciamo il segno di integrale indefinito in ambo i membri

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int x\,dx$$

e, calcolando gli integrali indefiniti, arriviamo alle stesse conclusioni. ☺

☞**Esempio 2.8.** Trovare l'integrale generale dell'equazione $y'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}\,y(x)(y(x)-2)$.

Iniziamo col determinare soluzioni costanti. Queste si trovano risolvendo l'equazione (algebrica) $y(y-2)=0$, da cui $y=0$ e $y=2$. Le soluzioni costanti sono le funzioni $y(x)=0$ e $y(x)=2$ per ogni $x \geq 0$ (deve aver senso l'equazione differenziale, che contiene $\sqrt{x}$).

Se invece in un qualche punto si ha $y(x) \neq 0, 2$ allora dovrà essere

$$\int \frac{dy}{y(y-2)} = \int \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx.$$

L'integrale a secondo membro è immediato: $\int \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx = \frac{3}{2}\frac{x^{3/2}}{3/2} + C$. Ripassiamo come ottenere una primitiva della funzione razionale a primo membro: occorre scrivere la frazione $\frac{1}{y(y-2)}$ come combinazione lineare di due frazioni semplici del tipo $\frac{1}{y}$ e $\frac{1}{y-2}$, quindi determiniamo $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che

$$\frac{1}{y(y-2)} = \frac{a}{y} + \frac{b}{y-2}.$$

Questo vuol dire che $1 = a(y-2) + by$, da cui si ricava $a = -1/2$, $b = 1/2$. Ma allora

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y(y-2)} &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\,dy + \frac{1}{2}\int \frac{1}{y-2}\,dy \\ &= -\frac{1}{2}\log|y| + \frac{1}{2}\log|y-2| + C' = \frac{1}{2}\log\left|\frac{y-2}{y}\right| + C'.\end{aligned}$$

Quindi per un $c \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{y-2}{y}\right| = x^{3/2} + c$$

da cui, ponendo $k = e^{2c}$

$$\left|\frac{y-2}{y}\right| = k\,e^{2x^{3/2}}.$$

Ragionando come nell'esempio 2.6, possiamo concludere che

$$\frac{y-2}{y} = k\,e^{2x^{3/2}}, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}$$

(per $k = 0$ recuperiamo la soluzione costante $y = 2$). Esplicitiamo y e otteniamo che l'integrale generale è formato da funzioni del tipo

$$y(x) = \frac{2}{1 - k\, e^{2x^{3/2}}},$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$ e dalla soluzione costante $y(x) = 0$ (volendo, si può notare che questa soluzione si ottiene per $k \to \infty$). Se $k \leq 0$, le soluzioni sono definite su $[0, +\infty)$; se $k > 0$ il dominio risulta più piccolo. ☺

☞**Esempio 2.9.** Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $y'(x) = (e^x - 1)/(e^{y(x)} + 1)$. Qui il problema è che non si riesce a esplicitare (anche se teoricamente possibile) la soluzione. Infatti, separando le variabili, otteniamo

$$\begin{aligned} e^x - x + c &= \int (e^x - 1)\, dx \\ &= \int (e^y + 1)\, dy = e^y + y + k \end{aligned}$$

e, anche se la funzione $y \mapsto e^y + y$ è invertibile, non sappiamo scriverne l'inversa. ☺

Il problema dell'unicità della soluzione verrà discusso in seguito (si veda l'esempio 2.12).

3. Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Queste sono le equazioni differenziali del tipo

$$y'(x) = a(x)\, y(x) + b(x), \tag{2.3}$$

dove a e b sono funzioni continue in un intervallo fissato J.

Nel caso in cui la funzione $b(x)$ sia identicamente nulla, l'equazione (2.3) si dice omogenea.

Un'equazione lineare e omogenea è a variabili separabili (con $g(y) = y$ e $f(x) = a(x)$) e si risolve come indicato nella sezione precedente. Innanzi tutto, si trova la soluzione costante $y = 0$. Separando le variabili, otteniamo

$$\int \frac{dy}{y} = \int a(x)\, dx$$

e quindi, indicando con $A(x)$ una primitiva di $a(x)$ sull'intervallo J

$$\log |y| = A(x) + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

Risolvendo rispetto a y otteniamo

$$y = \pm e^c\, e^{A(x)}.$$

Si noti che $\pm e^c$ assume ogni valore reale diverso da zero e che $y = 0$ è soluzione. Possiamo quindi scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea nella forma

$$y(x) = k\, e^{A(x)} \quad \text{con } k \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Se invece l'equazione non è omogenea ($b(x) \neq 0$), cerchiamo una soluzione della forma

$$y(x) = k(x)\, e^{A(x)}, \tag{2.5}$$

dove $k(x)$ è una funzione incognita. Questo metodo è chiamato metodo di variazione delle costanti, perché la costante k che compare nella formula (2.4), che fornisce la soluzione dell'equazione omogenea associata, diventa qui una funzione.

Sostituendo la (2.5) nell'equazione differenziale (2.3), otteniamo condizioni sulla funzione $k(x)$. Precisamente, siccome $A'(x) = a(x)$, dalla (2.5) si ottiene

$$y'(x) = k'(x)\, e^{A(x)} + k(x)\, e^{A(x)}\, a(x).$$

Sostituendo nella (2.3), abbiamo

$$k'(x)\, e^{A(x)} + k(x)\, e^{A(x)}\, a(x) = a(x)\, k(x)\, e^{A(x)} + b(x),$$

da cui

$$k'(x) = b(x)\, e^{-A(x)}$$

e infine

$$k(x) = \int b(x)\, e^{-A(x)}\, dx.$$

Abbiamo quindi ottenuto che ogni soluzione è della forma

$$y(x) = e^{A(x)} \int b(x)\, e^{-A(x)}\, dx,$$

dove A è una primitiva di a nell'intervallo dato J. È nascosta nella formula precedente una costante arbitraria, implicita nel simbolo di integrale indefinito.

☞**Esempio 2.10.** (il debito di ossigeno) Quando corriamo o facciamo uno sforzo, consumiamo più ossigeno rispetto a quanto ne consumeremmo in condizioni normali di riposo. In particolare, se corriamo velocemente, il nostro corpo brucia una quantità di ossigeno superiore a quella che riesce a immettere respirando. Si crea quello che chiamiamo "debito di ossigeno". Quando ci fermiamo, il nostro corpo continua a immettere ossigeno in quantità maggiore di quanto servirebbe normalmente in una situazione di riposo, per cercare di recuperare e saldare il debito di ossigeno.

Indichiamo con t il tempo e con $y(t)$ il debito di ossigeno al tempo t. Il debito $y(t)$ varia principalmente in seguito a due condizioni: nell'unità di tempo, cresce in maniera proporzionale alla potenza, cioè al lavoro che dobbiamo compiere nell'unità di tempo; decresce in maniera proporzionale alla velocità con cui respiriamo, che è determinata dal fabbisogno do ossigeno. Possiamo quindi scrivere

$$y'(t) = -a\, y(t) + b\, p(t),$$

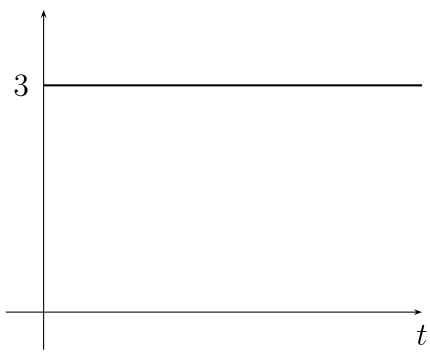
dove a, b sono costanti positive (legate al singolo individuo, ad esempio la capacità dei suoi polmoni, il suo peso, ecc.) e $p(t)$ indica la potenza da esplicare (nota).

Partendo da una situazione di riposo $y(0) = 0$ e dovendo effettuare un lavoro uniforme nel tempo (cioè $p(t)$ =costante, ad esempio $p(t) = 3$), il debito di ossigeno soddisfa

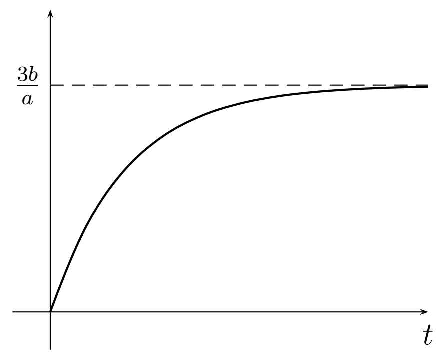
$$y'(t) = -a\,y(t) + 3b, \qquad y(0) = 0.$$

Risolvendo questa equazione, con il metodo della separazione delle variabili oppure con la formula risolutiva delle equazioni lineari, otteniamo

$$y(t) = \frac{3b}{a}(1 - e^{-at}).$$



La funzione $p(t) = 3$



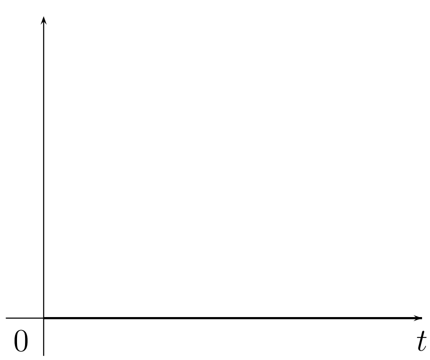
Il relativo debito di ossigeno $y(t)$

Invece, mettendoci a riposo ($p(t) = 0$) dopo una corsa che ha prodotto un debito di ossigeno pari a y_0,

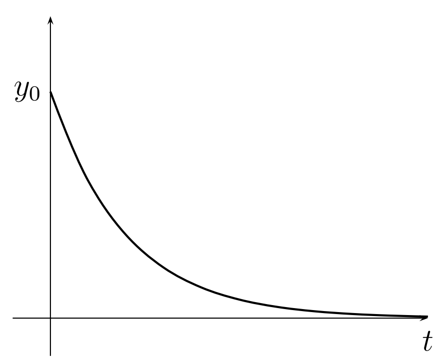
$$y'(t) = -a\,y(t), \qquad y(0) = y_0,$$

che ha soluzione

$$y(t) = y_0\,e^{-at}.$$



La funzione $p(t) = 0$



Il relativo debito di ossigeno $y(t)$

In generale, supponendo di passare gradatamente da una situazione di sforzo a una di riposo, otterremo una sorta di avvicendamento delle situazioni precedenti: supponiamo che

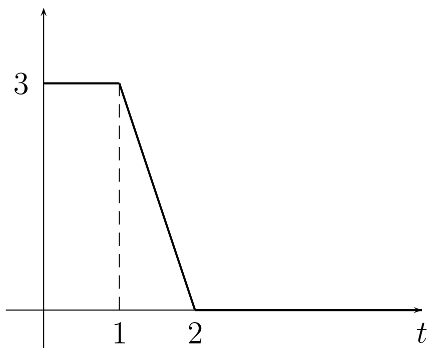
$$p(t) = \begin{cases} 3 & t \in [0, 1] \\ 3(2 - t) & t \in (1, 2) \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$

allora la soluzione di

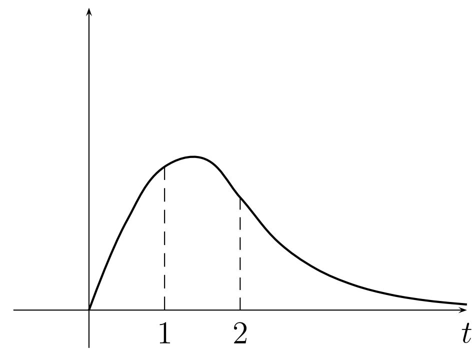
$$y'(t) = -a\,y(t) + b\,p(t), \qquad y(0) = 0$$

è data da

$$y(t) = \begin{cases} \frac{3b}{a}(1 - e^{-at}) & t \in [0,1] \\ \frac{3b}{a^2}\left(1 + 2a - at - (a + e^a)e^{-at}\right) & t \in (1,2) \\ \frac{3b}{a^2}e^{-at}\left(e^{2a} - e^a - a\right) & t \geq 2 \end{cases}$$



La funzione $p(t)$



Il relativo debito di ossigeno $y(t)$

☺

4. Il problema di Cauchy

Ci sono criteri abbastanza generali per potere stabilire se una equazione differenziale ammetta o meno una soluzione. Particolare attenzione è rivolta al problema di Cauchy, in cui l'equazione differenziale è accoppiata a un valore iniziale:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Supponiamo che f sia una funzione continua in un rettangolo aperto (=lati esclusi) A di $\mathbb{R}^2$ e che il rettangolo $R_{a,b}$ centrato in (x_0, y_0) e di lati di lunghezze $2a$ e $2b$ sia contenuto in questo aperto. Vedremo in seguito cosa vuol dire che una funzione di due variabili è continua, ma possiamo immaginare che questo significa che in punti "vicini" i valori di f non siano "troppo diversi".

In formule:

$$R_{a,b} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\right\} \subset A.$$

Poniamo $M = \max\left\{|f(x, y)| \,:\, (x, y) \in R_{a,b}\right\}$. Supponiamo inoltre che esista una costante $L > 0$ tale che per ogni coppia di punti del tipo (x, y_1), (x, y_2) in $R_{a,b}$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|. \tag{2.7}$$

Teorema 2.11 (di esistenza e unicità)**.** *In queste ipotesi, esiste una e una sola soluzione del problema (2.6), definita e con derivata prima continua nell'intervallo* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$*, con* $\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$.

In particolare, se l'equazione è a variabili separabili, della forma $y'(x) = h(x)\, g(y(x))$, le ipotesi del teorema di esistenza e unicità si traducono nei fatti:

1. la funzione $h(x)$ è continua sull'intervallo $[x_0 - a, x_0 + a]$;
2. la funzione $g(y)$ è continua sull'intervallo $[y_0 - b, y_0 + b]$;
3. esiste una costante L' tale che $|g(y_1) - g(y_2)| \leq L' \, |y_1 - y_2|$ per ogni scelta di punti y_1, y_2 in $[y_0 - b, y_0 + b]$.

In queste ipotesi, per il teorema di Weierstrass, le funzioni h e g sono limitate, quindi esistono due numeri M_h e M_g tali che per ogni (x, y) in $R_{a,b}$

$$|h(x)| \leq M_h \qquad |g(y)| \leq M_g.$$

Allora possiamo concludere che

$$|h(x)g(y)| \leq M_h M_g \qquad \text{e} \qquad |h(x)g(y_1) - h(x)g(y_2)| \leq M_h \, L' \, |y_1 - y_2|$$

e quindi cè esistenza e unicità della soluzione nell'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, con $\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M_h M_g}\right\}$.

Si noti inoltre che l'ipotesi 3. è senz'altro verificata se la funzione g è anche derivabile con continuità sull'intervallo $[y_0 - b, y_0 + b]$. Infatti, in questo caso, per il Teorema di Weierstrass anche g' risulta limitata. Poniamo $L' = \max\{|g'(y)| \, y \in [y_0 - b, y_0 + b]\}$. Siano ora y_1, y_2 in $[y_0 - b, y_0 + b]$; dal Teorema di Lagrange, esiste un punto c nell'intervallo aperto di estremi y_1 e y_2 tale che $g(y_1) - g(y_2) = g'(c)(y_1 - y_2)$. Quindi

$$|g(y_1) - g(y_2)| = |g'(c)| \, |y_1 - y_2| \leq L' \, |y_1 - y_2|.$$

Nel prossimo esempio, mostriamo che la soluzione potrebbe non essere unica se le ipotesi del teorema non sono soddisfatte.

☞**Esempio 2.12.** Il problema

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{|y(x)|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ha come soluzione la funzione costante $y(x) = 0$, ma anche la funzione

$$y(x) = \begin{cases} x^2/4 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

In questo caso $(x_0, y_0) = (0, 0)$ e la funzione $f(x, y) = \sqrt{|y|}$ non verifica la proprietà (2.7) in nessun rettangolo che contiene l'origine. Infatti, dato $b > 0$, se esistesse $L > 0$ tale che

$$|\sqrt{|y_1|} - \sqrt{|y_2|}| \leq L|y_1 - y_2| \qquad \forall y_1, y_2 \in [-b, b],$$

allora, prendendo in particolare $y_2 = 0$, dovrebbe valere che

$$\sqrt{|y_1|} \leq L|y_1| \quad \forall y_1 \in [-b, b] \quad \text{quindi} \quad \frac{\sqrt{|y_1|}}{|y_1|} \leq L \quad \forall y_1 \in [-b, b].$$

Ma questo è impossibile, perché $\lim_{y_1\to 0} \frac{\sqrt{|y_1|}}{|y_1|} = +\infty$. ☺

Si noti che, come nell'esempio 2.7 il dominio della soluzione potrebbe essere più piccolo della proiezione sull'asse delle ascisse del dominio di f: il problema di Cauchy trattato in quell'esempio

$$\begin{cases} y'(x) = x\, y(x)^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

ha come soluzione la funzione $y(x) = -\frac{2}{x^2-2}$ con dominio $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, mentre $f(x,y) = x\,y^2$ è definita e regolare su tutto $\mathbb{R}^2$.

Scopo dei prossimi esempi è mostrare l'importanza del fatto che l'equazione differenziale sia in forma normale.

☞**Esempio 2.13.** Si considerino i seguenti problemi

$$(P1)\begin{cases} x\,y'(x) = y(x) \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad (P2)\begin{cases} x\,y'(x) = y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (P3)\begin{cases} x\,y'(x) = y(x) \\ y(2) = 4 \end{cases}$$

in cui l'equazione differenziale non è in forma normale. La differenza importante che possiamo notare fra questi problemi spicca subito quando proviamo a sostituire il dato iniziale dentro l'equazione.

Nel problema $(P1)$ l'equazione diventa $0y'(0) = 0$, ossia l'identità $0 = 0$; nel problema $(P2)$ otteniamo l'equazione $0y'(0) = 1$, ossia $0 = 1$ priva di soluzioni; nel problema $(P3)$ otteniamo l'equazione $2y'(0) = 4$, che ha solo la soluzione $y'(0) = 2$.

Da quanto appena osservato deduciamo che il problema $(P2)$ non ammette soluzioni. Invece i problemi $(P1)$ e $(P3)$ potrebbero avere soluzioni.

Occupiamoci prima del problema $(P3)$. Siccome il nostro punto iniziale è 2, esiste un intorno di 2 in cui $x \neq 0$, quindi in tale intorno l'equazione differenziale è equivalente a

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x} \tag{2.8}$$

che è a variabili separabili. Risolvendo questa equazione otteniamo soluzioni della forma $y(x) = k\,x$, con k in $\mathbb{R}$. Imponiamo la condizione iniziale $y(2) = 4$ e otteniamo che $y(x) = 2x$. Il problema $(P3)$ ha quindi come unica soluzione la funzione $y(x) = 2x$ con dominio $\mathbb{R}$. L'unica differenza con la soluzione del problema $(P3')$ scritto in forma normale

$$(P3')\begin{cases} z'(x) = \frac{z(x)}{x} \\ z(2) = 4 \end{cases}$$

è nel dominio della soluzione: $z(x) = 2x$ con dominio $(0, +\infty)$.

Infine consideriamo il problema $(P1)$. Nel punto iniziale l'equazione differenziale è sempre soddisfatta, indipendentemente dal valore della derivata della soluzione in questo punto.

Vediamo cosa può succedere se $x \neq 0$. In queste ipotesi ci riportiamo all'equazione in forma normale (2.8), che ha soluzione del tipo $y(x) = k\,x$, con k in $\mathbb{R}$. Tutte queste soluzioni verificano la condizione iniziale $y(0) = 0$. Quindi il problema $(P1)$ ha infinite soluzioni. ☺

5. Il metodo di Eulero

Qualora si sappia che una soluzione del problema (2.6) esiste ed è unica, è possibile approssimare tale soluzione con il metodo di Eulero. Con questo metodo, si ottengono i valori approssimati y_n dei valori della soluzione $y(x)$, calcolata nei punti

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \quad x_3 = x_0 + 3h, \quad \ldots$$

dove $h > 0$ è chiamato passo dell'approssimazione.

Il metodo di Eulero approssima la soluzione $y(x)$ mediante una spezzata, in cui ogni segmento ha lunghezza orizzontale h e pendenza determinata dal valore di $f(x,y)$ nell'estremo sinistro. In formule:

$$\begin{aligned} &y_0 \quad \text{(assegnato)} \\ &y_1 = y_0 + h\,f(x_0, y_0) \\ &y_2 = y_1 + h\,f(x_1, y_1) \\ &\ldots \\ &y_{n+1} = y_n + h\,f(x_n, y_n) \end{aligned}$$

e si approssima il grafico di $y(x)$ con i segmenti di estremi (x_n, y_n).

Siano

$$K_1 = \max\{|\partial_1 f(x,y)| \,:\, (x,y) \in R\} \qquad K_2 = \max\{|\partial_2 f(x,y)| \,:\, (x,y) \in R\}\,.$$

Si può dimostrare (ma va oltre i nostri scopi) che l'errore che si commette nell'intervallo $(x_0, x_0 + \delta)$ è controllato da

$$h\,\frac{K_1}{2K_2}(e^{K_2\delta} - 1),$$

ossia decresce linearmente al decrescere del passo h.

Questo metodo è abbastanza crudo e può essere migliorato nel modo seguente. Anziché fissare la pendenza del segmento approssimante tramite il valore di $f(x,y)$ nell'estremo sinistro, potremmo pensare di usare il suo valor medio, ovvero:

$$y_{n+1} = y_n + h\,\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})}{2}.$$

Purtroppo questa formula nella maggior parte dei casi è inservibile, perché y_{n+1} compare anche nel membro di destra; tuttavia, ad esso possiamo sostituire il suo valore approssimato che troveremmo con il metodo di Eulero e ottenere

$$u_{n+1} = z_n + h\,f(x_n, z_n) \qquad z_{n+1} = z_n + h\,\frac{f(x_n, z_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1})}{2}, \tag{2.9}$$

Questo metodo è noto come metodo di Eulero migliorato. Si può dimostrare che l'errore tra la soluzione esatta $y(x)$ e la soluzione approssimata che otteniamo congiungendo con segmenti i punti (x_n, z_n) dati dalle (2.9) migliora rispetto al precedente ed è controllato da

$$\frac{h^2}{4}\left(K' + \frac{K''}{3K_2}\right)\left(e^{K_2\delta(1+\frac{hK_2}{2})} - 1\right),$$

dove K' e K'' sono tali che

$$\max\left\{\left|\frac{df(x,y(x))}{dx}\right| \,:\, x \in [x_0, x_0+\delta)\right\} \le K'$$
$$\max\left\{\left|\frac{d^2 f(x,y(x))}{dx^2}\right| \,:\, x \in [x_0, x_0+\delta)\right\} \le K''.$$

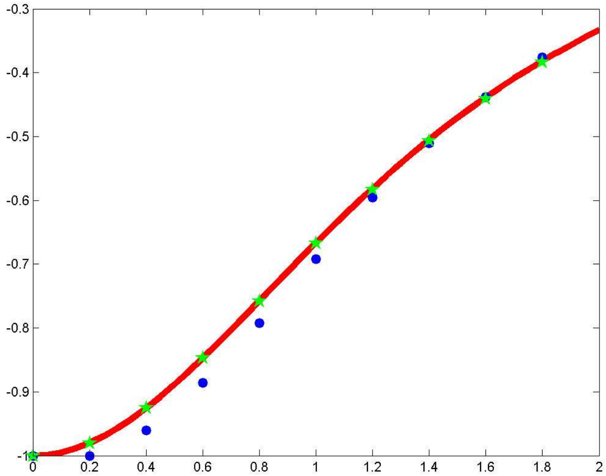
L'ordine di convergenza del metodo migliorato è quadratico in h e quindi ci aspettiamo che al decrescere di h con il metodo migliorato si debba ottenere una soluzione più simile a quella esatta.

☞**Esempio 2.14.** Abbiamo già trovato la soluzione del problema

$$\begin{cases} y'(x) = x\,y(x)^2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

che risulta essere data da $y(x) = -\frac{2}{x^2+2}$ con dominio $\mathbb{R}$. Vediamo cosa avremmo ottenuto adoperando il metodo di Eulero o il metodo di Eulero migliorato sull'intervallo $[0,2]$ con passo 0.2. Scriviamo un semplice programmino

```
f:=(x,y)->x*y(x)^2:
x(1):=0:
y(1):=-1:
u(1):=-1:
z(1):=-1:
for j from 1 to 10 do
x(j+1):=x(1)+j*0.2:
y(j+1):=y(j)+0.2*f(x(j),y(j)):
u(j+1):=z(j)+0.2*f(x(j),z(j)):
z(j+1):=z(j)+0.5*0.2*(f(x(j),z(j))+f(x(j+1),u(j+1))):
end do;
data:=seq([x(j),y(j)],j=1..11);
datamigl:=seq([x(j),z(j)],j=1..11);
PLOT(POINTS(data,SYMBOL(_SOLIDDIAMOND),COLOR(RGB,0,0,1)),
     POINTS(datamigl,SYMBOL(_ASTERISK),COLOR(RGB,0,1,0)));
```



Il risultato del programma è la figura a fianco, in cui abbiamo aggiunto la linea rossa (il grafico della funzione soluzione).

Congiungendo i pallini blu otteniamo l'approssimazione del metodo di Eulero.

Congiungendo le stelle verdi otteniamo il grafico della soluzione fornita dal metodo migliorato, che pare essere una approssimazione migliore della soluzione esatta.

☺

6. Equazioni differenziali del secondo ordine, lineari, omogenee, a coefficienti costanti

Una equazione differenziale lineare e omogenea del secondo ordine e a coefficienti costanti è del tipo

$$y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) = 0, \tag{2.10}$$

dove a e b sono numeri reali.

Osserviamo innanzi tutto che se y_1 e y_2 sono soluzioni di questa equazione differenziale, anche $y = c_1y_1 + c_2y_2$ è soluzione, comunque si scelgano c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$.

È naturale cercare soluzioni di questa equazione della forma $e^{\lambda\,x}$ con λ da determinarsi, perché le soluzioni delle equazioni del primo ordine lineari, omogenee e a coefficienti costanti sono di questo tipo (cfr. l'esempio 2.6).

Dal momento che

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lambda\,e^{\lambda\,x} \\ y''(x) &= \lambda^2\,e^{\lambda\,x}, \end{aligned}$$

sostituendo $y(x) = e^{\lambda\,x}$ nell'equazione (2.10) abbiamo

$$\lambda^2\,e^{\lambda\,x} + a\,\lambda\,e^{\lambda\,x} + b\,e^{\lambda\,x} = 0.$$

Ricordando che $e^{\lambda\,x}$ non si annulla mai e raccogliendolo, otteniamo l'equazione

$$\lambda^2 + a\,\lambda + b = 0. \tag{2.11}$$

Morale: se λ è radice dell'equazione (2.11), allora $e^{\lambda\,x}$ è soluzione dell'equazione differenziale (2.10).

Si presentano **tre casi**, a seconda che il discriminante $\Delta = a^2 - 4b$ dell'equazione (2.11) sia positivo, negativo, oppure nullo.

Nel primo caso, ovvero se $\Delta = a^2 - 4b > 0$, allora la (2.11) ha due radici reali e distinte, λ_1 e λ_2. In questo caso possiamo dire che

$$y(x) = c_1\, e^{\lambda_1 x} + c_2\, e^{\lambda_2 x}$$

è soluzione dell'equazione differenziale (2.10) per ogni scelta di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$. Inoltre, si potrebbe dimostrare (ma non lo facciamo) che la formula precedente fornisce tutte le soluzioni dell'equazione al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$.

☞**Esempio 2.15.** Si trovi l'integrale generale di $y'' - 4y' + \frac{7}{4}y = 0$ e la soluzione tale che $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Si ha

$$\lambda^2 - 4\lambda + \frac{7}{4} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda = \tfrac{7}{2} \text{ oppure } \lambda = \tfrac{1}{2}.$$

Quindi l'integrale generale, ossia l'insieme di tutte le soluzioni, è formato da funzioni del tipo

$$y(x) = c_1\, e^{\frac{7}{2}x} + c_2\, e^{\frac{1}{2}x}$$

al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$. In particolare, la soluzione tale che $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ sarà di quella forma, con c_1 e c_2 soluzioni di

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ y'(0) = \frac{7}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ \frac{7}{2} - \frac{7}{2}c_2 + \frac{1}{2}c_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{6} \\ c_2 = \frac{7}{6}. \end{cases}$$

Quindi la soluzione particolare richiesta è

$$y(x) = -\frac{1}{6}\, e^{\frac{7}{2}x} + \frac{7}{6}\, e^{\frac{1}{2}x}.$$

☺

Nel secondo caso, ovvero se $\Delta = a^2 - 4b < 0$, allora la (2.11) ha due radici complesse coniugate, diciamo $\lambda \pm i\mu$. Ci ricordiamo che $e^{(\lambda \pm i\mu)x} = e^{\lambda x}\big(\cos(\mu x) \pm i \sin(\mu x)\big)$. Questo ci suggerisce che $y_1(x) = e^{\lambda x}\cos(\mu x)$ e $y_2(x) = e^{\lambda x}\sin(\mu x)$ potrebbero essere soluzioni dell'equazione differenziale data. Sostituendo, non è difficile convincersi che questo è effettivamente vero. In sintesi, in questo caso possiamo dire che

$$y(x) = c_1\, e^{\lambda x}\cos(\mu x) + c_2\, e^{\lambda x}\sin(\mu x)$$

è soluzione dell'equazione differenziale (2.10), per ogni c_1, c_2 in $\mathbb{R}$. Inoltre, si potrebbe dimostrare (ma non lo facciamo) che la formula precedente fornisce tutte le soluzioni dell'equazione, al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$.

☞**Esempio 2.16.** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y'' + y' + \frac{5}{2}y = 0$.

Abbiamo

$$\lambda^2 + \lambda + \frac{5}{2} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{-9}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i,$$

quindi tutte le soluzioni sono date da

$$y(x) = c_1\, e^{\frac{1}{2}\,x} \cos(\tfrac{3}{2}x) + c_2\; e^{\frac{1}{2}\,x} \sin(\tfrac{3}{2}x).$$

☺

Infine **nell'ultimo caso**, se $\Delta = a^2 - 4b = 0$, allora la (2.11) ha una sola radice $\lambda = -a/2$. Questo ci permette di concludere che in questo caso $y(x) = k\, e^{-\frac{a}{2}x}$ è soluzione dell'equazione di partenza, per ogni k in $\mathbb{R}$. Tuttavia questa formula non fornisce tutte le soluzioni, come mostra il seguente esempio.

☞**Esempio 2.17.** Determinare una soluzione non nulla di $y'' - 4y' + 4y = 0$ tale che $y(0) = 0$. Siccome $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$ solo per $\lambda = 2$, allora possiamo dire che $y(x) = k\, e^{2x}$ è soluzione. Ma, affinché sia $y(0) = 0$, occorre che $k = 0$. Tuttavia l'equazione differenziale ha anche la soluzione $y(x) = x\, e^{2x}$, che è non nulla e verifica la condizione iniziale data. ☺

Per trovare tutte le soluzioni nel caso $\Delta = 0$, ci viene in aiuto il metodo di variazione delle costanti: immaginiamo che la (2.10) abbia non solo la soluzione $y(x) = k\, e^{-\frac{a}{2}x}$, dove k è una costante, ma più in generale una soluzione della forma $y(x) = k(x)\, e^{-\frac{a}{2}x}$, dove $k(x)$ è una funzione, che adesso determiniamo.

Siccome

$$\begin{aligned} y'(x) &= k'(x)\, e^{-\frac{a}{2}x} - \frac{a}{2}\, k(x)\, e^{-\frac{a}{2}x} \\ y''(x) &= k''(x)\, e^{-\frac{a}{2}x} - a\, k'(x)\, e^{-\frac{a}{2}x} + \frac{a^2}{4}\, k(x)\, e^{-\frac{a}{2}x} \end{aligned}$$

sostituendo $y(x) = k(x)\, e^{-\frac{a}{2}x}$ nell'equazione (2.10) abbiamo

$$k''(x)\, e^{-\frac{a}{2}x} - a\, k'(x)\, e^{-\frac{a}{2}x} + \frac{a^2}{4}\, k(x)\, e^{-\frac{a}{2}x} + a\left(k'(x)\, e^{-\frac{a}{2}x} - \frac{a}{2}\, k(x)\, e^{-\frac{a}{2}x}\right) + b\, k(x)\, e^{-\frac{a}{2}x} = 0.$$

Dal momento che $\Delta = a^2 - 4b = 0$ e $e^{-\frac{a}{2}x}$ non si annulla mai, l'equazione precedente diventa semplicemente

$$k''(x) = 0,$$

che ha come soluzioni i polinomi di primo grado. In sintesi, nel caso $\Delta = a^2 - 4b = 0$, tutte le soluzioni sono della forma

$$y(x) = e^{-\frac{a}{2}x}\,(c_1\, x + c_2)\,,$$

al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$.

☞**Esempio 2.18.** Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$ e, in particolare, quella tale che $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

Il polinomio associato all'equazione differenziale è $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$ e quindi ha una sola radice $\lambda = -1$. Allora tutte le soluzioni dell'equazione sono date dalla formula

$$y(x) = e^{-x}\,(c_1\, x + c_2)\,,$$

al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$. In particolare, quella che soddisfa le condizioni iniziali è tale che

$$\begin{cases} y(0) = c_2 = 1 \\ y'(0) = -c_2 + c_1 = -1 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \quad \begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 = 0. \end{cases}$$

Quindi la soluzione particolare richiesta è

$$y(x) = e^{-x}.$$

☺

Riassumendo:

Teorema 2.19. *Siano a e b numeri reali e λ_1, λ_2 radici dell'equazione ausiliaria*

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Allora tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) = 0$$

sono della forma:

$$y(x) = \begin{cases} c_1\,e^{\lambda_1 x} + c_2\,e^{\lambda_2 x} & \text{se } a^2 - 4b > 0 \text{ e quindi } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ c_1\,e^{\mathrm{Re}(\lambda_1)\,x}\cos(\mathrm{Im}(\lambda_1)x) + c_2\,e^{\mathrm{Re}(\lambda_1)\,x}\sin(\mathrm{Im}(\lambda_1)x) & \text{se } a^2 - 4b < 0 \text{ e quindi } \lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \\ e^{\lambda_1 x}(c_1 + c_2\,x) & \text{se } a^2 - 4b = 0 \text{ e quindi } \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

7. Alcuni comandi Maple

Maple risolve molte equazioni differenziali, in particolare quelle a variabili separabili e quelle lineari.

Il comando è molto semplice: `dsolve`.

Ad esempio, supponiamo di voler risolvere l'equazione differenziale $y' = 2y + x$, che memorizziamo, per comodità, chiamandola `ed`. Scriviamo quindi

```
ed := diff(y(x),x) -2*y(x)-x= 0;
```

Il successivo comando `dsolve(ed);` permette di ottenere la risposta:

$$y(x) = -\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}x + e^{2x}\_C1$$

che vuol dire $y(x) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x + C\,e^{2x}$.

Si possono inserire anche le condizioni iniziali. Ad esempio,

```
dsolve(ed,y(0)=0,y(x));
```

risolve la precedente equazione con la condizione iniziale $y(0) = 0$.

Una derivata del secondo ordine si scrive come `diff(y(x),x,x)` e così via.

Inoltre si possono risolvere i problemi ai valori iniziali per via numerica, usando diversi metodi di approssimazione, anche più accurati del metodo di Eulero. I comandi

```
ed := diff(y(x),x) -2*y(x)-x= 0;
ic:= y(0) = 0.6713967071418030:
sol := dsolve({ed,ic}, numeric, range=0..1);
sol(0.5);
```

chiedono di risolvere per via numerica il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - 2y - x = 0 \\ y(0) = 0.6713967071418030 \end{cases}$$

nell'intervallo $[0, 1]$. Dopo chiediamo il valore approssimato della soluzione nel punto $x = 0.5$. la risposta di `Maple` è

$$[x = 0.5,\ y(x) = 2.00461547065071244]$$

Come nel caso del metodo di Eulero, possiamo poi disegnare un grafico approssimato.

8. Equazioni alle differenze

In questa sezione la funzione incognita, che indicheremo sempre con y, sarà definita su un insieme discreto, che solitamente rappresenta rilevazioni fatte a intervalli di tempo spaziati uniformemente. Un esempio in economia: la funzione y può rappresentare il capitale che, impiegato ad esempio in BTP, cresce grazie a una cedola che viene pagata ogni sei mesi; in questo caso, possiamo pensare la funzione y come definita sull'insieme discreto e spaziato uniformemente

$$\left\{0, \tfrac{1}{2}\text{anno}, 1\text{anno}, 1\text{anno e } \tfrac{1}{2}, 2\text{anni}, 2\text{anni e } \tfrac{1}{2}, \dots\right\} = \left\{0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, 2, \tfrac{5}{2}, \dots\right\}.$$

Solitamente si prende l'intervallo temporale di lunghezza 1, quindi y è definita sull'insieme dei numeri naturali o un suo sottoinsieme. Una tale funzione si chiama successione. Solitamente, il valore in $n \in \mathbb{N}$ della successione y si indica con y_n anziché con $y(n)$.

8.1. Generalità. Sia $y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. La derivata discreta della successione y rappresenta la variazione di questa funzione nell'unità di tempo. Pertanto definiamo la successione derivata discreta Δy della successione y come

$$(\Delta y)_n = y_{n+1} - y_n.$$

La derivata seconda discreta $\Delta^2 y$ della successione y è la derivata discreta della derivata discreta. In formule:

$$(\Delta^2 y)_n = (\Delta(\Delta y))_n = (\Delta y)_{n+1} - (\Delta y)_n = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n.$$

☞**Esempio 2.20.** Calcolare derivata discreta e derivata seconda discreta delle successioni:

$$\begin{array}{llll} a) & y_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, & b) & y_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ c) & y_n = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}, & d) & y_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \\ e) & y_n = 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}, & f) & y_n = a^n \quad \forall n \in \mathbb{N}; a \in \mathbb{R} \text{ dato} . \end{array}$$

a) Si ha $(\Delta y)_n = y_{n+1} - y_n = 1 - 1 = 0$ per ogni n. Facilmente si deduce che $(\Delta^2 y)_n = \Delta(\Delta y)_n = 0$.

b) Si ha $(\Delta y)_n = y_{n+1} - y_n = n + 1 - n = 1$ per ogni n. Ricordando a), si deduce che $(\Delta^2 y)_n = \Delta(\Delta y)_n = 0$.

Sin qui, tutto è analogo al caso continuo: la derivata della funzione $f(x)$ identicamente 1 è 0; la derivata di x è 1.

c) Si ha $(\Delta y)_n = (n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$ e $(\Delta^2 y)_n = 2$.

Qui si intravvede una piccola differenza col caso continuo: la derivata di x^2 è semplicemente $2x$.

d) Si ha $(\Delta y)_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)}$. Inoltre $(\Delta^2 y)_n = \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$.

L'analogo continuo di questa successione è la funzione $\frac{1}{x}$, la cui derivata è $-\frac{1}{x^2}$ e la cui derivata seconda è $\frac{2}{x^3}$.

e) Si ha $(\Delta y)_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n$. La successione 2^n coincide pertanto con la sua derivata discreta (e quindi anche con le sue derivate di ordine successivo).

f) Si ha $(\Delta y)_n = a^{n+1} - a^n = (a - 1)a^n$. La successione a^n coincide pertanto con multiplo della sua derivata discreta. Da cui $(\Delta^2 y)_n = (a - 1)^2\, a^n$.

Le funzioni del tipo a^n hanno quindi lo stesso comportamento delle "corrispondenti" funzioni esponenziali continue a^x, ma ci sono alcune differenze importanti: innanzi tutto, mentre a^n ha senso anche quando $a \le 0$, le funzioni a^x si considerano solo quando la base a è positiva strettamente. Inoltre, nel caso continuo la base "privilegiata" è il numero di Nepero e, $((e^x)' = e^x)$; nel caso discreto, la successione del tipo a^n che coincide con la sua derivata discreta è 2^n. ☺

Definizione 2.1. Una equazione alle differenze di ordine k è una espressione del tipo

$$f(n, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.12}$$

dove $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$ è una funzione. Una soluzione dell'equazione alle differenze è una successione $y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ che soddisfa la (2.12).

Equivalentemente, possiamo pensare a un'equazione alle differenze di ordine k come a una espressione che contiene la funzione incognita y e le sue derivate discrete sino all'ordine k.

☞**Esempio 2.21.** L'equazione alle differenze

$$y_{n+1} - 2y_n = 0$$

può essere riscritta come $(\Delta y)_n - y_n = 0$. Ricordando l'esempio 2.20e), oppure notando che ad ogni passo $y_{n+1} = 2y_n$, si ricava facilmente che le soluzioni di questa equazione alle differenze sono del tipo $k\,2^n$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. ☺

☞**Esempio 2.22.** Verificare che la successione $y_n = 1 - \frac{2}{n}$, definita per $n \geq 1$ è soluzione dell'equazione alle differenze

$$(n+1)\,y_{n+1} + n\,y_n = 2n - 3 \qquad \forall n \geq 1.$$

Sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned}(n+1)\,y_{n+1} + n\,y_n &= (n+1)\left(1 - \tfrac{2}{n+1}\right) + n\left(1 - \tfrac{2}{n}\right)\\ &= n + 1 - 2 + n - 2 = 2n - 3,\end{aligned}$$

come volevasi. ☺

Non tutte le equazioni alle differenze ammettono soluzioni.

☞**Esempio 2.23.** L'equazione alle differenze $(y_n + y_{n+1})^2 + y_n^2 = -1$ non ammette alcuna soluzione (la somma di due quadrati non potrà mai essere -1). Di nuovo, possiamo scrivere l'equazione come $((\Delta y)_n + 2y_n)^2 + y_n^2 = -1$, ovvero facendo comparire l'operatore derivata discreta. ☺

Studieremo una importante classe di equazioni alle differenze: quelle lineari a coefficienti costanti, di ordini 1 e 2. Queste equazioni ammettono sempre soluzioni. Sono della forma

$$L(y_{n+2}, y_{n+1}, y_n) = b, \tag{2.13}$$

dove b è un numero reale L è una funzione lineare della forma

$$\begin{aligned} L(y_{n+2}, y_{n+1}, y_n) &= y_{n+1} + a\,y_n && \text{se l'ordine è } 1,\\ L(y_{n+2}, y_{n+1}, y_n) &= y_{n+2} + a_1\,y_{n+1} + a_2\,y_n && \text{se l'ordine è } 2,\end{aligned}$$

per certi $a, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

È facile verificare che in entrambi i casi vale

$$L(\alpha y_{n+2} + \beta z_{n+2}, \alpha y_{n+1} + \beta z_{n+1}, \alpha y_n + \beta z_n) = \alpha L(y_{n+2}, y_{n+1}, y_n) + \beta L(z_{n+2}, z_{n+1}, z_n)$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, per ogni y_n e z_n successioni (è la condizione di linearità di L).

L'equazione alle differenze

$$L(y_{n+2}, y_{n+1}, y_n) = 0 \tag{2.14}$$

si dice equazione omogenea associata all'equazione $L(y_{n+2}, y_{n+1}, y_n) = b$.

Due sono le proprietà fondamentali, vere in generale:

Teorema 2.24. *Se la successione y^*_n è soluzione dell'equazione (2.13), allora ogni altra soluzione di (2.13) si scrive come somma di y^*_n e di una soluzione dell'equazione omogenea associata (2.14).*

Dimostrazione. Se y^*_n è soluzione dell'equazione (2.13), allora $L(y^*_{n+2}, y^*_{n+1}, y^*_n) = b$. Inoltre se z_n è soluzione di (2.14), allora $L(z_{n+2}, z_{n+1}, z_n) = 0$. Quindi, sommando,

$$L(y^*_{n+2} + z_{n+2}, y^*_{n+1} + z_{n+1}, y^*_n + z_n) = L(y^*_{n+2}, y^*_{n+1}, y^*_n) + L(z_{n+2}, z_{n+1}, z_n) = b,$$

ovvero $y^*_n + z_n$ è soluzione di (2.13).

Viceversa, se w_n è soluzione di (2.13), allora $L(w_{n+2}, w_{n+1}, w_n) = b$. Ma allora, per differenza,

$$L(w_{n+2} - y^*_{n+2}, w_{n+1} - y^*_{n+1}, w_n - y^*_n) = L(w_{n+2}, w_{n+1}, w_n) - L(y^*_{n+2}, y^*_{n+1}, y^*_n) = b - b = 0,$$

quindi $z_n = w_n - y^*_n$ è soluzione di (2.14), ovvero $w_n = y^*_n + z_n$, con z_n soluzione dell'omogenea associata. □

Teorema 2.25. *Se z_n e w_n sono soluzioni di (2.14), allora per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ anche $\alpha z_n + \beta\, w_n$ è soluzione di (2.14).*

Dimostrazione. Segue banalmente dalla linearità di L. □

8.2. Equazioni alle differenze lineari a coefficienti costanti di ordine 1. In questa sottosezione ci occupiamo di trovare tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze

$$y_{n+1} + a\, y_n = b \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.15}$$

È evidente che una soluzione di questa equazione alle differenze risulta univocamente determinata una volta che si conosca il suo primo termine.

Iniziamo dallo studio dell'omogenea associata, ovvero di

$$y_{n+1} + a\, y_n = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ricordando il Teorema 2.25, data una qualsiasi soluzione non banale di questa equazione, tutte le soluzioni si otterranno da questa moltiplicando per una costante.

Si cerca una soluzione del tipo $y_n = \lambda^n$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ da determinarsi. Sostituendo nell'equazione omogenea, otteniamo $\lambda^{n+1} + a\,\lambda^n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero

$$(\lambda + a)\,\lambda^n = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.16}$$

Siccome $\lambda^0 = 1$ (con la convenzione che $0^0 = 1$), necessariamente deve essere $\lambda = -a$. D'altra parte, se $\lambda = -a$ tutte le equazioni (2.16) sono verificate (anche per $n > 0$). Quindi tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_n = c\,(-a)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(con la convenzione che $0^0 = 1$).

Ci occupiamo ora del caso non omogeneo, cioè $b \neq 0$ e cerchiamo di determinare una soluzione y_n^* di questa equazione, della forma più semplice possibile. Tutte le soluzioni si troveranno poi sfruttando il Teorema 2.24.

Visto che il secondo membro è costante, proviamo a vedere se la (2.15) può avere una soluzione costante. Quindi proviamo a capire se per qualche $k \in \mathbb{R}$ la successione $y_n = k$ può essere soluzione. Tale k deve verificare

$$y_{n+1} + a\,y_n = k + a\,k = b \quad \Leftrightarrow \quad k\,(1+a) = b,$$

quindi se $b \neq 0$ e $1 + a = 0$ questa equazione non ha mai soluzioni; se invece $1 + a \neq 0$, allora si trova che $k = b/(1+a)$.

Se poi $1 + a = 0$, cioè $a = -1$, si prova a trovare una soluzione della forma $y_n = k\,n$, con k da determinare sostituendo nell'equazione. Per $a = -1$ si ha

$$y_{n+1} + a\,y_n = k\,(n+1) - k\,n = k = b.$$

Riassumendo: **una** soluzione y_n^* di (2.15) è

$$y_n^* = \begin{cases} b/(1+a) & a \neq -1 \\ b\,n & a = -1 \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

tutte le soluzioni sono della forma

$$y_n = y_n^* + c\,(-a)^n, \qquad \text{al variare di } c \in \mathbb{R}$$

ricordando al solito che $0^0 = 1$.

☞**Esempio 2.26.** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze $y_{n+1} + 3y_n = 8, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Cerchiamo dapprima tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata: $y_{n+1} + 3y_n = 0$. Immaginando una soluzione del tipo λ^n otteniamo che λ deve essere soluzioni di $\lambda + 3 = 0$, ovvero $\lambda = -3$. pertanto tutte le soluzioni dell'omogenea associata sono del tipo $c\,(-3)^n$, al variare di $c \in \mathbb{R}$.

Cerchiamo ora una soluzione y_n^* dell'equazione completa, della forma $y_n^* = k$, cioè costante. Tale costante deve verificare $k + 3k = 8$, quindi $k = 2$.

Quindi tutte le soluzioni dell'equazione sono date dalla formula

$$y_n = 2 + c\,(-3)^n, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$.

In particolare, la soluzione che verifica $y_0 = 1$ si ottiene risolvendo $1 = y_0 = 2 + c\,(-3)^0$, che fornisce $c = -1$. Quindi la soluzione dell'equazione (completa) tale che $y_0 = 1$ è

$$y_n = 2 - (-3)^n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

☺

☞**Esempio 2.27.** Indichiamo con P_n la produzione di un determinato bene nel corso del mese n e con D_n la domanda relativa a quel bene. Possiamo modellizzare la relazione tra produzione e domanda con l'equazione

$$D_n = a - b\,P_n$$

dove a e b sono costanti reali positive (al crescere della produzione ci sarà meno interesse verso quella merce).

L'offerta O_n nel mese n di quel determinato bene dipende dalla produzione del mese precedente (immaginando un mese per distribuire la nuova merce ai punti vendita) ossia

$$O_n = c\,P_{n-1}.$$

Una situazione di perfetto equilibrio si presenta quando la domanda uguaglia l'offerta. Questo accade quando

$$a - b\,P_n = c\,P_{n-1}.$$

Questa equazione ci dice quindi quanto si deve produrre per una situazione "ottimale" in cui la domanda uguaglia l'offerta. Otteniamo una equazione lineare e non omogenea:

$$P_{n+1} + \tfrac{c}{b}\,P_n = \tfrac{a}{b}.$$

Le soluzioni dell'omogenea associata sono multipli di $\left(-\frac{c}{b}\right)^n$. Una soluzione particolare è la costante $\frac{a}{b+c}$. Quindi

$$P_n = \tfrac{a}{b+c} + \text{const}\left(-\tfrac{c}{b}\right)^n.$$

☺

8.3. Equazioni alle differenze lineari a coefficienti costanti di ordine 2. In questa sottosezione ci occupiamo di trovare tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze

$$y_{n+2} + a_1\,y_{n+1} + a_2\,y_n = b \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.17}$$

Iniziamo dallo studio dell'omogenea associata, ovvero di

$$y_{n+2} + a_1\,y_{n+1} + a_2\,y_n = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.18}$$

È evidente che una soluzione y_n di questa equazione alle differenze risulta univocamente determinata una volta che si conoscano i suoi due primi termini y_0 e y_1. Supponiamo di conoscere due soluzioni z_n e w_n di (2.18). Ricordando il Teorema 2.25, per ogni c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ anche $c_1\,z_n + c_2\,w_n$ è soluzione di (2.18). Quindi la soluzione y_n corrispondente alla scelta di

y_0 e y_1 in $\mathbb{R}$ coinciderà con la combinazione lineare $c_1\, z_n + c_2\, w_n$ se c_1, c_2 sono soluzioni del sistema
$$\begin{cases} c_1\, z_0 + c_2\, w_0 = y_0 \\ c_1\, z_1 + c_2\, w_1 = y_1. \end{cases}$$
Questo sistema ammette soluzioni per ogni possibile scelta di $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ se e solo se è di Cramer, ovvero se (z_0, z_1) e (w_0, w_1) sono indipendenti:
$$\det \begin{pmatrix} z_0 & w_0 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix} \neq 0.$$
Occorre quindi trovare due soluzioni z_n e w_n per cui il determinante appena scritto non sia nullo.

Si cerca soluzione del tipo $y_n = \lambda^n$, con λ da determinarsi. Sostituendo nell'equazione (2.18), otteniamo $\lambda^{n+2} + a_1\, \lambda^{n+1} + a_2\, \lambda^n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero

$$(\lambda^2 + a_1\, \lambda + a_2)\, \lambda^n = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.19}$$

Siccome $\lambda^0 = 1$ (con la convenzione che $0^0 = 1$), necessariamente deve essere

$$\lambda^2 + a_1\, \lambda + a_2 = 0. \tag{2.20}$$

D'altra parte, se λ è radice di (2.20), allora tutte le equazioni della formula (2.19) sono verificate (anche per $n > 0$).

Come nel caso delle equazioni differenziali, si presentano tre casi, a seconda del discriminante dell'equazione di secondo grado.

Primo caso: se $\Delta = a_1^2 - 4a_2 > 0$, allora il polinomio $\lambda^2 + a_1\, \lambda + a_2$ ha due radici reali e distinte, che chiamiamo λ_1 e λ_2. Allora $z_n = \lambda_1^n$ e $w_n = \lambda_2^n$ risultano soluzioni dell'equazione omogenea (2.18) e verificano la condizione di indipendenza:
$$\det \begin{pmatrix} z_0 & w_0 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0.$$
Quindi tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da
$$y_n = c_1\, \lambda_1^n + c_2\, \lambda_2^n \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$
al variare di $c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$.

☞**Esempio 2.28.** Determinare tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze $y_{n+2} - y_n = 0$. Determinare poi la soluzione tale che $y_0 = 0,\ y_1 = 2$.

Cerchiamo una soluzione del tipo λ^n. tale λ dovrà verificare l'equazione $\lambda^2 - 1 = 0$, che ha due soluzioni reali e distinte $\lambda = \pm 1$. Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze sono date da
$$y_n = c_1\, 1^n + c_2\, (-1)^n = c_1 + c_2\, (-1)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$
al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

La soluzione tale che $y_0 = 0$, $y_1 = 2$ corrisponde a scegliere c_1, c_2 soluzioni di

$$c_1 + c_2 = 0, \qquad c_1 - c_2 = 2,$$

ovvero $c_1 = 1$, $c_2 = -1$. Pertanto tale soluzione è

$$y_n = 1 + (-1)(-1)^n = 1 + (-1)^{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

☺

Secondo caso: se $\Delta = a_1^2 - 4a_2 = 0$, allora il polinomio $\lambda^2 + a_1\,\lambda + a_2$ ha una sola radice reale, $\lambda = -a_1/2$. Allora tutte le successioni del tipo $k\,(-a_1/2)^n$ risultano soluzione dell'equazione omogenea (2.18) per ogni k in $\mathbb{R}$. Supponiamo per il momento che $a_1 \neq 0$ e sfruttiamo il metodo di variazione delle costanti: immaginiamo che un'altra soluzione sia della forma $w_n = k_n\,(-a_1/2)^n$, con k_n successione da determinarsi.

Ricordando che $a_1^2 = 4a_2$, si ha

$$\begin{aligned} 0 &= w_{n+2} + a_1\,w_{n+1} + a_2\,w_n = k_{n+2}\,\left(-\tfrac{a_1}{2}\right)^{n+2} + a_1\,k_{n+1}\,\left(-\tfrac{a_1}{2}\right)^{n+1} + \tfrac{a_1^2}{4}\,k_n\,\left(-\tfrac{a_1}{2}\right)^n \\ &= \left(-\tfrac{a_1}{2}\right)^{n+2}\,(k_{n+2} - 2\,k_{n+1} + k_n)\,. \end{aligned}$$

D'altra parte $k_{n+2} - 2\,k_{n+1} + k_n = \Delta^2 k_n = 0$ se k_n è della forma $k_n = c_1 + c_2\,n$. In particolare, se scegliamo $k_n = n$, le successioni $z_n = (-a_1/2)^n$ e $w_n = n\,(-a_1/2)^n$ sono soluzioni dell'equazione alle differenze (2.18) e verificano la condizione di indipendenza:

$$\det\begin{pmatrix} z_0 & w_0 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_1/2 & -a_1/2 \end{pmatrix} = -a_1/2 \neq 0.$$

(tranne nel caso in cui $a_1 = 0$). Quindi tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_n = c_1\,(-a_1/2)^n + c_2\,n\,(-a_1/2)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

al variare di c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. L'ulteriore caso in cui $a_1 = 0$, è banale: l'equazione è $y_{n+2} = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, che ha come soluzione una qualsiasi successione nulla dal secondo termine in poi.

Terzo caso: se $\Delta = a_1^2 - 4a_2 < 0$, allora il polinomio $\lambda^2 + a_1\,\lambda + a_2$ ha due radici reali complesse coniugate; siano esse $\lambda \pm i\mu$. Allora possiamo dire che $(\lambda + i\mu)^n$ e $(\lambda - i\mu)^n$ sono soluzioni dell'equazione omogenea, però purtroppo sono successioni a valori complessi e, di solito, si è interessati a trovare soluzioni che siano successioni a valori reali. Se scriviamo $\lambda \pm i\mu$ in forma esponenziale, sapremo meglio calcolare $(\lambda \pm i\mu)^n$. Se $r = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$ e θ è un argomento di $\lambda + i\mu$, allora

$$\lambda \pm i\mu = r\,e^{\pm i\theta}$$

quindi

$$(\lambda \pm i\mu)^n = r^n\,e^{\pm i\,n\,\theta} = r^n\,\big(\cos(n\theta) \pm i\sin(n\theta)\big).$$

Come nel caso delle equazioni differenziali, scopriamo che le successioni reali $z_n = r^n\,\cos(n\theta)$ e $w_n = r^n\,\sin(n\theta)$ sono ancora soluzioni dell'equazione (2.18). Inoltre verificano la condizione di indipendenza

$$\det \begin{pmatrix} z_0 & w_0 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r\,\cos(\theta) & r\,\sin(\theta) \end{pmatrix} = r\,\sin(\theta) \neq 0,$$

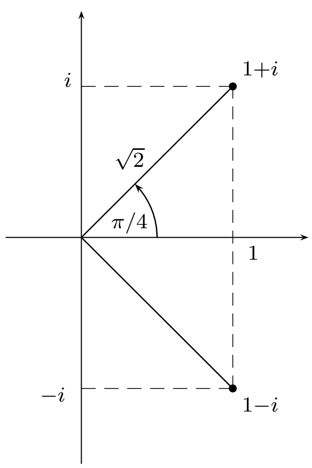
(si ricordi che $\theta \neq 0 \mod \pi$, dal momento che $\mu \neq 0$). Quindi tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_n = c_1\, r^n\, \cos(n\theta) + c_2\, r^n\, \sin(n\theta) \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

al variare di $c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$.

☞**Esempio 2.29.** Determinare tutte le soluzioni di $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_n = 0$.

L'equazione associata a questa equazione alle differenze è $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, che ha due radici complesse coniugate $1 \pm i$.



Dobbiamo trovare la forma esponenziale di questi numeri complessi. La distanza dall'origine di $1 \pm i$ è $\sqrt{2}$; inoltre i triangoli rettangoli in figura sono isosceli, quindi un argomento è $\pi/4$. Possiamo scrivere

$$1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$$

$$1 - i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}.$$

A questo punto abbiamo tutti gli elementi per poter scrivere tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze data. Esse sono

$$y_n = c_1\, (\sqrt{2})^n\, \cos(n\pi/4) + c_2\, (\sqrt{2})^n\, \sin(n\pi/4) \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ☺

Ci occupiamo ora del caso non omogeneo, cioè $b \neq 0$ e cerchiamo di determinare una soluzione y_n^* di questa equazione, della forma più semplice possibile. Tutte le soluzioni si troveranno poi sfruttando il Teorema 2.24.

Immaginiamo una soluzione che sia costante: $y_n = k$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora k deve verificare

$$k + a_1\, k + a_2\, k = b \quad \Leftrightarrow \quad k(1 + a_1 + a_2) = b.$$

Questa equazione ammette soluzione quando $1 + a_1 + a_2 \neq 0$ e quindi $k = b/(1 + a_1 + a_2)$.

Se poi $1 + a_1 + a_2 = 0$, immaginiamo una soluzione della forma $y_n = k\, n$. Un tale k dovrà verificare

$$k\,(n + 2) + a_1\, k\,(n + 1) + a_2\, k\, n = b \quad \Leftrightarrow \quad k\,(2 + a_1) = b.$$

Questa equazione ammette soluzione quando $2 + a_1 \neq 0$ e quindi $k = b/(2 + a_1)$.

Infine, se $1 + a_1 + a_2 = 0$ e $2 + a_1 = 0$, ovvero se $a_1 = -2$ e $a_2 = 1$, immaginiamo una soluzione del tipo $y_n = k\,n^2$. Allora k dovrà verificare

$$k\,(n+2)^2 + a_1\,k\,(n+1)^2 + a_2\,k\,n^2 = b \quad \Leftrightarrow \quad 2k = b,$$

quindi $k = b/2$.

Riassumendo

$$y_n^* = \begin{cases} b/(1 + a_1 + a_2) & \text{se } 1 + a_1 + a_2 \neq 0 \\ bn/(2 + a_1) & \text{se } 1 + a_1 + a_2 = 0,\ 2 + a_1 \neq 0 \\ bn^2/2 & \text{se } 1 + a_1 + a_2 = 0,\ 2 + a_1 = 0. \end{cases}$$

☞**Esempio 2.30.** Determinare le soluzioni dell'equazione alle differenze $y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 3$.

Studiamo dapprima tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata, ovvero dell'equazione $y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 0$. Questa ha soluzioni della forma λ^n se il numero λ è radice di $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, ovvero se $\lambda = 1$. Abbiamo quindi che tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze omogenea associata sono date da

$$z_n = c_1\,1^n + c_2\,n\,1^n = c_1 + c_2\,n \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

al variare di $c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$.

Determiniamo ora una soluzione dell'equazione completa, della forma $y_n^* = k$. Tale costante k deve verificare $k - 2k + k = 3$, che però non ha soluzioni. Proviamo quindi con $y_n^* = k\,n$ e troviamo di nuovo una equazione priva di soluzioni $2k - 2k = 3$. Infine con $y_n^* = k\,n^2$ troviamo $2k = 3$. Quindi $y_n^* = \frac{3}{2}\,n^2$ è soluzione dell'equazione completa.

Tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze sono quindi della forma

$$y_n = \tfrac{3}{2}\,n^2 + c_1 + c_2\,n \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

al variare di $c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$. ☺

9. Esercizi

Equazioni differenziali.

1) Sia data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{2e^x y^2}{(1 + e^x)^3}.$$

a) Determinare le eventuali soluzioni costanti.

b) Determinare la soluzione soddisfacente la condizione iniziale

$$y(0) = \frac{4}{5}.$$

2) Data l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{x+1}{x} y - 3x,$$

trovarne le soluzioni sulla semiretta $x > 0$.

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = 2y - y^2.$$

a) Sia y_0 un qualunque valore reale fissato. Si determini la soluzione tale che $y(0) = y_0$;

b) provare che se $y_0 \in (0, 2)$ allora la soluzione è definita per ogni $t \geq 0$ ed ammette limite finito per $t \to +\infty$. Calcolare il valore di tale limite;

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$x'(t) = \frac{1}{t} \sin(x + 1).$$

a) Se ne determinino le soluzioni costanti e l'integrale generale;

b) si scriva la soluzione che verifica la condizione $x(1) = 1$.

5) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{t(4-y)}{(2+t)^2}.$$

Determinare quindi la soluzione particolare $y = f(t)$ tale che $f(0) = 4 + e^{-1}$.

6) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{\alpha e^y - 1}{e^y}.$$

a) Per ogni valore di α, individuare le soluzioni costanti e scrivere l'integrale generale dell'equazione;

b) fissare $\alpha = 1$ e scrivere esplicitamente la soluzione che verifica la condizione $y(0) = \log 2$, identificandone il dominio.

7) Si scriva la soluzione del problema

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{e^{3x}}{1 + e^{3x}} y(x) + e^{3x} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

8) Risolvere l'equazione differenziale
$$y'(x) = \frac{xy}{x+1} + e^{4x}$$
e determinare la soluzione particolare che verifica la condizione iniziale $y(0) = 0$.

9) Risolvere l'equazione differenziale
$$xy' = y^2 - 4y + 3.$$
Determinare quindi (se esistono) le soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$.

10) Si calcolino tutte le soluzioni dell'equazione differenziale
$$y' - y = e^t.$$
Si indichi con $y_0(t)$ quella particolare soluzione tale che $y(0) = 1$. Determinare la soluzione $y_0(t)$.

11) Confrontare le approssimazioni ottenute con il metodo di Eulero e il metodo di Eulero migliorato con passo 0.02 relative alla soluzione del problema (di cui sappiamo trovare la soluzione)
$$\begin{cases} y' = x - y \\ y(0) = 1, \end{cases}$$
sull'intervallo $[0, 1]$.

12) Approssimare, con passo 0.02 nell'intervallo $[1, 4]$ la soluzione del problema
$$\begin{cases} y' = \frac{x+y}{x-y} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

13) Approssimare, con passo 0.02 nell'intervallo $[0, 5]$ la soluzione del problema
$$\begin{cases} y' = x\, e^{-y} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

14) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione
$$y''(x) - 2y'(x) - 8y(x) = 0.$$
Determinare poi la soluzione tale che $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

15) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione
$$y''(x) - 2y'(x) + 26y(x) = 0.$$
Determinare poi la soluzione tale che $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

16) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0.$$

Determinare poi la soluzione tale che $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Equazioni alle differenze.

1) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze

$$y_{n+1} + 3y_n = 8 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Determinare poi la soluzione tale che $y_0 = 1$.

2) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 4 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Determinare poi la soluzione tale che $y_0 = 0$, $y_1 = 3$.

3) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze

$$4y_{n+2} + 4y_{n+1} + y_n = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Determinare poi la soluzione tale che $y_0 = 0$, $y_1 = 1$.

4) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione alle differenze

$$y_{n+2} + y_n = 2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$