Soluzioni particolari

Una equazione differenziale del secondo ordine lineare è del tipo

$$y''(x) + a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = f(x)$$

dove a, b, f sono funzioni continue su un intervallo non vuoto J.

Studiamo l'integrale generale nel caso in cui a, b sono costanti, ovvero l'equazione è della forma

$$y''(x) + a\, y'(x) + b\, y(x) = f(x). \tag{1}$$

Supponiamo di aver determinato una soluzione particolare y^* di (1). Sia y un'altra soluzione di (1). Allora $y^* - y$ è soluzione dell'equazione omogenea associata

$$y''(x) + a\, y'(x) + b\, y(x) = 0. \tag{2}$$

Quindi

$$y(x) = y^*(x) + w(x)$$

dove $w(x)$ è una generica soluzione di (2).

Abbiamo già determinato regole per trovare tutte le soluzioni di (2), basandoci sullo studio delle radici dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + a\,\lambda + b = 0.$$

Esiste una ricetta per determinare una soluzione particolare di (1), nel caso in cui il termine noto $f(x)$ sia di una forma particolare.

Supponiamo che

$$f(x) = e^{\alpha x}\, p(x)\, \cos(\omega x) \qquad \text{oppure} \qquad f(x) = e^{\alpha x}\, p(x)\, \sin(\omega x),$$

dove $\alpha, \omega \in \mathbf{R}$ e p è un polinomio reale di grado m. Allora esiste una soluzione particolare di (1) della forma

$$y^*(x) = e^{\alpha x}\, x^{\mu} (q_1(x) \cos(\omega x) + q_2(x) \sin(\omega x)) \tag{3}$$

dove:

- $\mu \geq 0$ è la molteplicità di $\alpha + i\omega$ come radice dell'equazione caratteristica
- q_1 e q_2 sono due polinomi di grado al più m. I coefficienti di tali polinomi si determinano sostituendo nell'equazione differenziale.

Ad esempio, $f(x) = 1 + x^2$ corrisponde al caso $f(x) = e^{\alpha x}\, p(x)\, \cos(\omega x)$ con $\alpha = \omega = 0$ e $p(x) = 1 + x^2$. Se 0 non è soluzione dell'equazione caratteristica allora $\mu = 0$ e cerchiamo soluzioni particolari della forma $y^*(x) = q_1(x)$ dove q_1 è un polinomio di grado al più 2.

Infine, si noti che tutte le soluzioni di

$$y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) = f(x) + g(x) \tag{4}$$

si ottengono mediante sovrapposizione di soluzioni delle equazioni con termini noti f e g, ossia una generica soluzione di (3) è della forma

$$y(x) = y_f^*(x) + y_g^*(x) + w(x)$$

dove:

- $w(x)$ è una generica soluzione di (2),
- $y_f^*(x)$ è una soluzione particolare di $y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) = f(x)$
- $y_g^*(x)$ è una soluzione particolare di $y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) = g(x)$.