Corso di Laurea in

Statistica Matematica e trattamento Informatico dei Dati

Analisi Matematica 3
appunti

Francesca Astengo

Università di Genova, A.A. 2011/2012

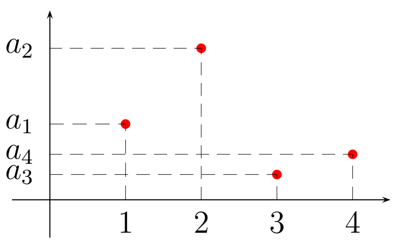
Indice

CAPITOLO 1

Serie numeriche

1. Brevi richiami sulle successioni

Ricordiamo che una successione reale è una funzione definita da $\mathbb{N}$, eventualmente privato di un numero finito di elementi, a $\mathbb{R}$.



Solitamente si indica una successione con la "lista" dei suoi valori: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il valore a_n si chiama n-esimo termine della successione.

Graficamente possiamo rappresentare una successione come in figura.

Una successione importante in probabilità è la successione geometrica di parametro p, con $0 < p < 1$. In formule, è la successione i cui termini sono p^n con $n \geq 1$. Pensate di lanciare ripetutamente una moneta e che la probabilità che esca "testa" in un singolo lancio sia p. Ovviamente il risultato di un lancio non influenza il successivo. Il termine p^n rappresenta la probabilità di avere esattamente n volte "testa" in n lanci consecutivi.

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione e sia $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una successione di numeri naturali strettamente crescente. Indichiamo con $n_k = \varphi(k)$. Allora la successione $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ si chiama *successione estratta* o *sottosuccessione* della successione data.

In pratica, questo significa scegliere, senza variarne l'ordine, infiniti termini della successione di partenza, immagazzinandoli in una nuova "lista". Ad esempio, immaginiamo di scegliere per primo il termine a_2 e immagazziniamo questo valore come primo termine ponendo $b_1 = a_2$. Ora operiamo una seconda scelta; sono a nostra disposizione tutti i termini a partire da a_3; scegliamo ad esempio a_{10} e poniamo $b_2 = a_{10}$. Ora operiamo una terza scelta; sono a nostra disposizione tutti i termini a partire da a_{11}; scegliamo ad esempio a_{20} e poniamo $b_3 = a_{20}$. E così via. La successione estratta è la $b_1, b_2, b_3, \ldots$

Esempio 1.1. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita da $a_n = \cos(n\pi/4)$. Come "lista" di elementi la successione è $1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \ldots$

Sia $n_k = 2k$. Allora l'estratta, cosiddetta di posto pari è la successione $1, 0, -1, 0, 1, 0, \ldots$.

Se invece $n_k = 2k + 1$ stiamo considerando la cosiddetta estratta di posto dispari, ovvero la successione: $\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \ldots$

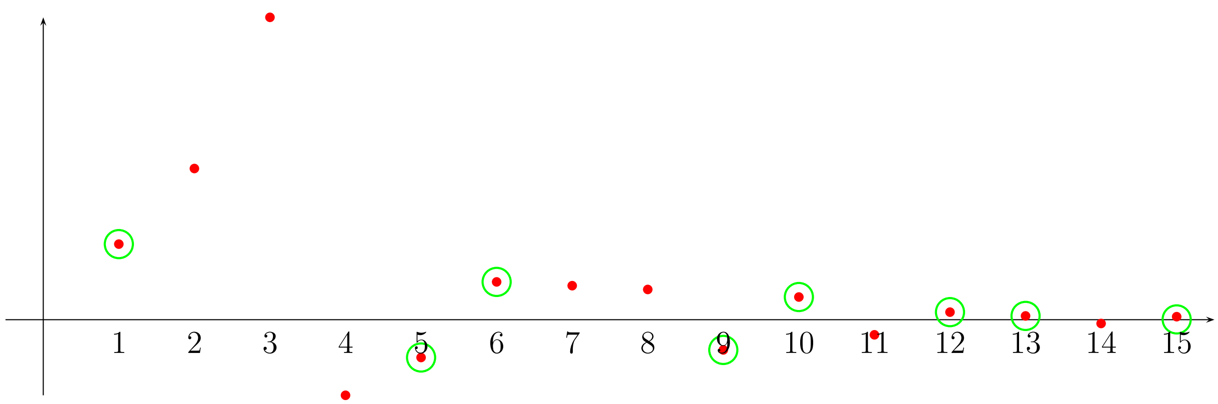
Supponiamo ora che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell.$$

Ovviamente selezionando infiniti termini dalla successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, purché si rispetti l'ordine, non si varia il carattere della successione, ossia anche

$$\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = \ell.$$

In figura, immaginiamo di scegliere dalla successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (che converge a 0) i termini circolettati di verde.



Anche i termini circolettati di verde tendono a zero.

Può invece succedere che una successione non abbia limite, mentre una sua estratta lo abbia. Una successione che non ha limite è $a_n = \cos(n\pi/4)$ definita nell'esempio 1.1. Considerate $n_k = 2 + 4k$. È facile controllare che $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ è la successione costantemente nulla, quindi convergente (a 0).

In sintesi: se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione che ha limite ℓ (finito o infinito) allora il limite di una sua qualsiasi estratta è ancora uguale a ℓ.

2. Le serie numeriche

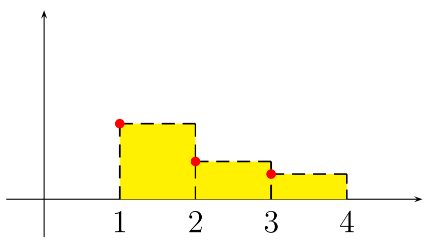
Per comodità, solitamente in quanto segue le successioni saranno definite su $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, ossia a partire da 1.

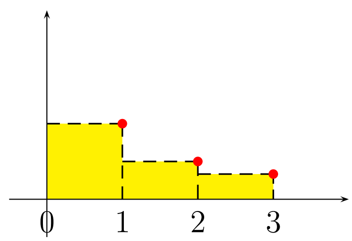
Data una successione $(a_n)_{n\geq 1}$, possiamo formare un'altra successione, che indicheremo solitamente con $(s_n)_{n\geq 1}$, delle **somme parziali** o delle **ridotte**, dove

$$s_1 = a_1 \qquad\qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n.$$

Il termine s_n, in cui sommiamo i primi n termini della successione (a_n), si chiama ridotta di ordine n.

Graficamente, possiamo pensare alla ridotta di ordine n, ad esempio 3, come all'area della regione disegnata nella figura a sinistra (o equivalentemente in quella a destra): è la somma di tre rettangoli, tutti di base 1 e altezze rispettivamente a_1, a_2, a_3. Al solito, i pallini rossi indicano il grafico della successione.





Ora immaginiamo di voler sapere se continuando a sommare le aree di questi rettangoli otteniamo un poligono di area finita oppure no.

Un'altra motivazione allo studio delle somme infinite deriva dalla probabilità. Pensiamo di comprare ogni anno un biglietto della lotteria. Se la lotteria stampa e vende un milione di biglietti ogni anno, la probabilità che il nostro venga estratto è pari a $p = 10^{-6}$ (supponendo che la lotteria sia onesta, ossia che tutti i biglietti abbiano la stessa probabilità di essere estratti). La probabilità di vincere esattamente la prima volta che acquistiamo il biglietto è ovviamente p; di perdere il primo anno ma vincere il secondo anno è più piccola e precisamente $(1-p)p$; al terzo anno è $(1-p)^2 p$; e così via, la probabilità di prima vincita all'ennesimo anno è $(1-p)^{n-1} p$. Quindi la probabilità che si vinca entro l'ennesimo anno è la somma di tali probabilità. In formule, T è la variabile aleatoria che misura l'anno in cui si vince e abbiamo detto che

$$\mathbb{P}(T = n) = (1-p)^{n-1} p \qquad\qquad \mathbb{P}(T \leq n) = \sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} p.$$

Come è facile controllare, la probabilità di aver vinto entro l'ennesimo anno aumenta. Supponendo di continuare imperterriti a tentare la sorte, ci chiediamo cosa può accadere quando n diventa molto grande.

Ci accorgeremo di un risultato sorprendente: sicuramente vinceremo. Il problema è il tempo medio di attesa per la vincita (ossia il valore atteso di T) che è

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(T = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,(1-p)^{n-1}\,p.$$

Scopriremo che è finito, ma pari a un milione di anni (il che dovrebbe bastare a sconsigliare dallo spendere i soldi del biglietto).

Definizione 1.1. Sia data una successione reale $(a_n)_{n\geq 1}$. Una *serie* è una somma formale

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Si dice che questa serie è *convergente* e ha per somma $s \in \mathbb{R}$ se la successione delle ridotte (s_n) converge a s. Se la successione delle ridotte diverge, anche la serie si dice *divergente*. Se la successione delle ridotte non ha limite, la serie si dice *indeterminata*.

Non tutte le successioni in generale "partono dall'indice 1". Se abbiamo una successione che parte dall'indice p, con $p \in \mathbb{N}$ della forma $(a_n)_{n\geq p}$, la serie $\sum\limits_{n=p}^{+\infty} a_n$ ha lo stesso significato di $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, dove $b_n = a_{p+n-1}$.

Esempio 1.2. **La serie geometrica** di ragione $\frac{1}{2}$: si consideri la successione definita da

$$a_n = \frac{1}{2^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$ è $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$. La successione delle ridotte è data da

$$s_1 = a_0 = 1 \qquad s_2 = 1 + \frac{1}{2} \qquad \dots \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^n}. \tag{1.1}$$

Più in generale, dato $x \in \mathbb{R}$, possiamo considerare la serie geometrica di ragione x, data da $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}$, dove, se $x = 0$, poniamo $0^0 = 1$.

È facile notare che, nel caso $x = 1$, la successione delle ridotte è $s_n = n$, pertanto divergente. Quindi la serie geometrica di ragione 1 diverge a $+\infty$.

Se invece $x \neq 1$, allora

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} x^n = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

Quindi, ricordando che se $|x| < 1$ si ha $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$, otteniamo che la serie geometrica di ragione x, con $|x| < 1$, è convergente e ha per somma $\frac{1}{1-x}$. Inoltre, se $x > 1$, allora si ha $\lim_{n\to+\infty} x^n = +\infty$, quindi la serie geometrica di ragione x, con $x > 1$, è positivamente divergente. Se invece $x \leq -1$, la successione (x^n) non ha limite, quindi la serie geometrica di ragione x, con $x \leq -1$, è indeterminata. Riassumendo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{se } -1 < x < 1 \\ \\ +\infty & \text{se } x \geq 1 \\ \\ \text{indeterminata} & \text{se } x \leq -1. \end{cases}$$

Esempio 1.3. **Le serie telescopiche.** Studiare la convergenza di $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Si noti che $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Quindi la ridotta di ordine n diventa

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1. \end{aligned}$$

Quindi la serie data è convergente e ha somma 1. Questo esempio è il prototipo di una classe di serie che si chiamano serie telescopiche.

Una serie che si possa scrivere come $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (b_n - b_{n+1})$, dove (b_n) è una successione reale si dice telescopica. Per una tale serie la ridotta di ordine n risulta

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1},$$

perché tutti gli altri addendi si elidono. Quindi, se esiste finito $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$, la serie telescopica è convergente e ha somma $b_1 - \ell$.

Teorema 1.4 (Condizione necessaria per la convergenza). *Sia* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *una serie convergente. Allora*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Dimostrazione. Sia $\ell \in \mathbb{R}$ la somma della serie, ovvero, detta (s_n) la successione delle ridotte, si ha $\lim_{n\to+\infty} s_n = \ell$. Ma allora

$$a_n = s_n - s_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - \ell = 0.$$

$\square$

Questo criterio ci aiuta a stabilire facilmente quando una serie non converge, come nel prossimo esempio. In quello successivo invece vediamo che ci possono essere serie non convergenti il cui termine generale è infinitesimo.

Esempio 1.5. Dire se è convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$. Siccome

$$\lim_{n\to+\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

la serie data non converge.

Esempio 1.6. **La serie armonica**: si consideri la successione definita da

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad \forall n = 1, 2, \ldots.$$

La serie armonica è $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Notiamo che potrebbe essere una serie convergente, perché $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Tuttavia, questo potrebbe non essere sufficiente.

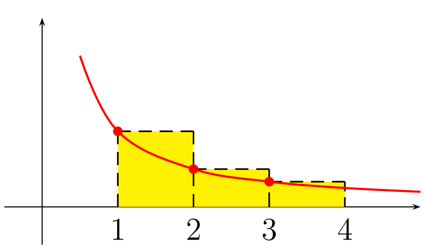
Mostriamo che la serie armonica diverge. La successione delle ridotte è data da

$$s_1 = a_1 = 1 \qquad s_2 = 1 + \frac{1}{2} \qquad \ldots \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

La successione delle ridotte è monotona crescente, quindi o diverge positivamente o converge.

Notiamo che a_n è la restrizione ai naturali della funzione reale $f(x) = \frac{1}{x}$, di cui sappiamo calcolare primitive e quindi integrali definiti.

Usiamo ora il criterio del confronto per i limiti, confrontando la ridotta di ordine n (area gialla) con un opportuno integrale definito di f, ragionando come in figura:



$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \log(n+1)$$

Ne segue che

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \lim_{n\to+\infty} \log(n+1) = +\infty,$$

ovvero la serie armonica diverge.

Il carattere di una serie (convergenza, divergenza, indeterminazione) rimane lo stesso se si alterano i termini corrispondenti a un numero finito di indici, perché le ridotte, da un certo ordine in poi, differiranno per una costante. Ad esempio, consideriamo la successione

$$b_n = 0 \text{ se } n = 0, 1, \ldots, 10; \qquad b_n = 1/2^n \text{ altrimenti.}$$

Essa differisce dalla successione geometrica di ragione 1/2 per i primi 11 termini. Chiamiamo (σ_n) la successione delle ridotte di (b_n) e (s_n) la successione delle ridotte della geometrica di ragione 1/2 come nella formula (1.1). Ovviamente,

$$\sigma_n = s_n - s_{11} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - s_{11} = 2 - \frac{1-\frac{1}{2^{11}}}{1-\frac{1}{2}} = 2^{-10}.$$

e quindi $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ ha lo stesso carattere di $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$. (Le somme delle due serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ invece sono diverse)

Data la serie (convergente o no) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, chiamiamo **resto** n–esimo la serie

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \qquad \forall n \geq 0.$$

Questa serie coincide, tranne che per i primi n termini, con la serie data, quindi ha lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

PROPOSIZIONE 1.7. *Se la serie numerica* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *è convergente, allora la successione* $(r_n)_n$ *dei resti n–esimi è infinitesima.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $s \in \mathbb{R}$ la somma della serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Siccome la successione delle ridotte (s_n) converge a s, si ha

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = s - s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

□

Dalla linearità dell'operazione di limite si ricavano facilmente le seguenti proprietà:

(1) se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ sono serie convergenti e hanno somma s_a e s_b rispettivamente, allora anche $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ è convergente e la sua somma è $s_a + s_b$;

(2) se $c \in \mathbb{R}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è una serie convergente di somma s_a, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} c\, a_n$ è convergente e la sua somma è $c\, s_a$;

(3) se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ sono serie positivamente divergenti, allora anche $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ è positivamente divergente;

(4) se $c > 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è una serie positivamente divergente, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} c\, a_n$ è positivamente divergente;

(5) se $c < 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è una serie positivamente divergente, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} c\, a_n$ è negativamente divergente.

3. Serie a termini non negativi

Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ si dice a termini non negativi se $a_n \geq 0$ per ogni n. Per una tale serie, la successione delle ridotte è sempre crescente, perché per ogni $n \geq 1$

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} \geq s_n.$$

Quindi, siccome una successione crescente ammette sempre limite (o diverge a $+\infty$ oppure, se è superiormente limitata, converge all'estremo superiore $\sup_n s_n$), le serie a termini non negativi **non possono essere indeterminate**.

Nel prossimo teorema mettiamo in relazione la convergenza dell'integrale improprio di una funzione f su $[1, +\infty)$ con la convergenza della serie di termine generale $f(n)$, n in $\mathbb{N}$.

TEOREMA 1.8 (Criterio integrale). *Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione positiva e decrescente. Allora:*

i) la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ è convergente se e solo se l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ è convergente;

ii) la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ è divergente se e solo se l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ è divergente.

DIMOSTRAZIONE. Siccome f è decrescente, per ogni $k = 1, 2, \ldots$ si ha

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \qquad \forall x \in [k, k+1] \quad \Rightarrow \quad f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\, dx \leq f(k).$$

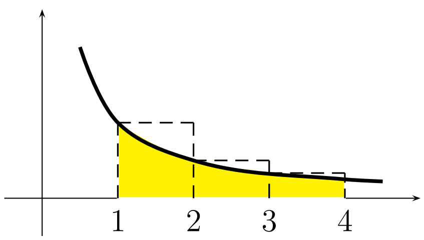
Ne ricaviamo che

$$\int_1^{n+1} f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

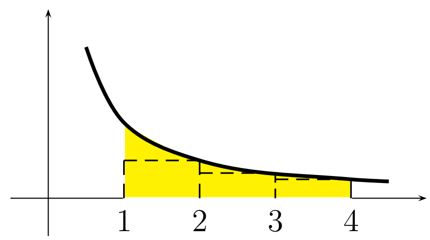
e che

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx = \int_{1}^{n} f(x)\,dx.$$

Geometricamente la situazione è quella in figura:



$$\int_{1}^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$



$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_{1}^{n} f(x)\,dx$$

Concludiamo ora con il criterio del confronto per i limiti. □

Esempio 1.9. **La serie armonica generalizzata** è una serie del tipo $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, dove α è un numero reale positivo. Per ogni valore di α è una serie a termini positivi e abbiamo già visto che per $\alpha = 1$ la serie risulta divergente.

Con il criterio integrale è facile notare che la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ è convergente se e solo se lo è l'integrale improprio $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$ e quindi, come abbiamo visto lo scorso anno se e solo se $\alpha > 1$.

Un altro criterio importante è il seguente.

Teorema 1.10 (Criterio del confronto). *Siano $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ due successioni tali che*

$$0 \leq a_n \leq b_n \qquad \forall n \geq 1.$$

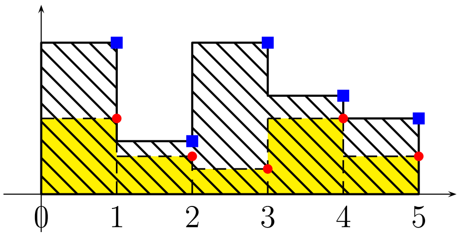
Allora:

i) *se la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ è convergente, allora anche la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente;*

ii) *se la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ è divergente, allora anche la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ è divergente.*

Dimostrazione. Nelle nostre ipotesi è facile e graficamente ovvio che valga la diseguaglianza

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k.$$



In figura, abbiamo indicato con un pallino rosso il grafico della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e con un quadrato blu il grafico della successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il confronto tra le somme delle aree dei rettangoli generati dalle due successioni fornisce la diseguaglianza cercata: l'area della regione tratteggiata è banalmente maggiore o uguale all'area della regione gialla.

Nel caso i) basta controllare che la successione delle ridotte di (a_n) è superiormente limitata, il che segue facilmente da

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \quad \text{che è la somma (un numero finito) della serie.}$$

Nel caso ii) basta notare che

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k}_{\longrightarrow+\infty} \leq \sum_{k=1}^{n} b_k$$

quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = +\infty$. □

Esempio 1.11. La serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2+\sin n}{\sqrt{n}}$ è (positivamente) divergente, perché è a termini non negativi e inoltre ciascun termine si minora con il rispettivo termine della serie armonica, che è divergente:

$$\frac{1}{n} \leq \frac{2+\sin n}{\sqrt{n}} \qquad \forall n \geq 1 \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Questo criterio funziona anche se la maggiorazione è vera da un certo punto in poi, in particolare se le successioni $(a_n)_{n\geq1}$ e $(b_n)_{n\geq1}$ hanno lo stesso comportamento all'infinito. In particolare:

Corollario 1.12 (Criterio del confronto asintotico). *Siano $(a_n)_{n\geq1}$ e $(b_n)_{n\geq1}$ due successioni a termini non negativi e sia $a_n = O(b_n)$ per $n \to +\infty$.*

i) *Se la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ è convergente allora anche la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente.*

ii) *Se la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ è divergente allora anche la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ è divergente.*

In particolare se esiste finito e non nullo il $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ il carattere delle due serie è lo stesso.

Esempio 1.13. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ è convergente. Infatti è a termini non negativi. Inoltre la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ è convergente e vale

$$1-\cos\frac{1}{n}\sim\frac{1}{2n^2}\qquad\text{per } n\to+\infty.$$

Esempio 1.14. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}$ è convergente. Infatti è a termini non negativi. Inoltre la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ è convergente e vale

$$\frac{1}{n!}=o\left(\frac{1}{n^2}\right)\qquad\text{per } n\to+\infty.$$

Corollario 1.15 (Criterio dell'ordine di infinitesimo). *Sia $(a_n)_{n\geq1}$ una successione a termini non negativi e infinitesima di ordine $\alpha>0$.*

i) *Se $\alpha>1$ allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ è convergente;*

ii) *Se $0<\alpha\leq1$ allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ è divergente.*

Esempio 1.16. Nel caso in cui $a_n=o(1/n)$ però per ogni $\alpha>1$ si abbia $n^{-\alpha}=o(a_n)$ questi criteri non dicono nulla. Le serie $\sum\frac{1}{n\log n}$ e $\sum\frac{1}{n\log^2 n}$ hanno entrambe queste proprietà, ma sono una divergente e l'altra convergente (come si può facilmente vedere usando il criterio integrale).

Teorema 1.17 (Criterio del rapporto). *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a termini positivi tale che esista*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ell.$$

i) *Se $\ell<1$, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ è convergente e $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$;*

ii) *se $\ell>1$, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ è divergente e $\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty$.*

Dimostrazione. Analizziamo il caso i). Sia $\ell < m < 1$. Da un certo N in poi si ha

$$\begin{aligned} a_{N+1} &< m\, a_N \\ a_{N+2} &< m\, a_{N+1} < m^2\, a_N \\ a_{N+3} &< m\, a_{N+2} < m^3\, a_N \\ &\vdots \\ a_{N+k} &< m^k\, a_N \quad \text{con } k = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

Ma allora da un certo punto in poi i termini sono dominati dai termini di una serie geometrica di ragione $m < 1$, quindi convergente. Allora per il criterio del confronto la serie di partenza è convergente e quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Con analoghi ragionamenti si prova ii). Infatti, se $\ell > M > 1$. Da un certo N in poi si ha

$$\begin{aligned} a_{N+1} &> M\, a_N \\ a_{N+2} &> M\, a_{N+1} > M^2\, a_N \\ a_{N+3} &> M\, a_{N+2} > M^3\, a_N \\ &\vdots \\ a_{N+k} &> M^k\, a_N \quad \text{con } k = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

Ma allora da un certo punto in poi i termini sono minorati dai termini di una serie geometrica di ragione $M > 1$, quindi il termine generale è positivamente divergente e la serie di partenza è positivamente divergente. □

Esempio 1.18. Nel caso in cui $\ell = 1$, il criterio del rapporto non permette di concludere nulla. Si considerino ad esempio le serie armoniche generalizzate con $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$. Una è divergente, l'altra è convergente, ma per entrambe il limite del rapporto è 1.

Esempio 1.19. **La serie esponenziale**. Per quali $x > 0$ è convergente la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$? Vedremo in seguito che questa serie è convergente per ogni x in $\mathbb{R}$ e la sua somma è e^x.

Sia $a_n = \frac{x^n}{n!}$; allora $a_n > 0$ e possiamo applicare il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{n+1} \longrightarrow 0 \qquad \forall x > 0.$$

La serie esponenziale è convergente per ogni $x > 0$.

Osserviamo che in particolare per ogni $x > 0$ vale

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Questo fatto è banale quando $x \le 1$, ma per $x > 1$ no; il limite precedente ci fa osservare che per $n \to +\infty$ l'ordine di infinito di $n!$ è maggiore di quello di x^n.

Il criterio del rapporto non si usa quando a_n è una funzione razionale di n, perché si otterrebbe $\ell = 1$. Può essere utile soprattutto quando ci sono i fattoriali.

Esempio 1.20. Dire se converge $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Si tratta di una serie a termini positivi. Proviamo col criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = (n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{e} < 1.$$

Quindi la serie data è convergente. Questo dice anche che $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$, ossia che l'ordine di infinito del fattoriale è minore di quello di n^n.

Analogo al criterio del rapporto è il

Teorema 1.21 (Criterio della radice). *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione a termini non negativi tale che esista*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell.$$

i) *Se* $\ell < 1$, *allora la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *è convergente;*

ii) *se* $\ell > 1$, *allora la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *è divergente.*

Esempio 1.22. Dire se è convergente $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\log n}\right)^n$. È una serie a termini non negativi; inoltre

$$\sqrt[n]{\left(\frac{1}{\log n}\right)^n} = \left(\frac{1}{\log n}\right) \longrightarrow 0.$$

Allora la serie di partenza è convergente per il criterio della radice.

Si noti che se esiste $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, allora anche $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$. Infatti, se il limite del rapporto è ℓ, fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora esiste N tale che per $n = N + p$ con $p = 0, 1, \dots$ vale

$$(\ell - \varepsilon)^p\, a_N < a_n < (\ell + \varepsilon)^p\, a_N.$$

Quindi sempre per $n = N + p$ con $p = 0, 1, \dots$ vale

$$\left((\ell - \varepsilon)^p\, a_N\right)^{1/n} < \sqrt[n]{a_n} < \left((\ell + \varepsilon)^p\, a_N\right)^{1/n}.$$

Passando al limite per $p \to +\infty$ nella precedente relazione otteniamo a sinistra $\ell - \varepsilon$ e a destra $\ell + \varepsilon$. Ne segue che definitivamente

$$\ell - 2\varepsilon \le \sqrt[n]{a_n} \le \ell + 2\varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$.

Anche qui nel caso $\ell = 1$ non si può dire nulla (usare le serie armoniche generalizzate come nel criterio del rapporto).

4. Approssimazioni

In generale, calcolare la somma di una serie convergente è un problema abbastanza difficile, tranne in alcuni casi particolari (serie geometriche, telescopiche). È quindi utile saper approssimare la somma di una serie.

Vedremo due casi in cui è facile trovare l'approssimazione della somma: quello di serie che si possono trattare col criterio integrale e quello di serie che si possono trattare col criterio del rapporto.

4.1. Approssimazione dal criterio integrale. Supponiamo di voler approssimare $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, dove a_n è della forma $a_n = f(n)$ con $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione positiva, decrescente di integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ convergente (come nel criterio integrale). Allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ è convergente. Desideriamo stimare la sua somma s a meno di un errore E (ad esempio $E = 10^{-2}$).

Inizialmente possiamo pensare di troncare la somma a un certo indice N, da determinare, e trattare il resto N–esimo come errore. In formule:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} f(n)}_{\text{ridotta, } s_N \text{ che dà l'approssimazione}} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{+\infty} f(n)}_{\text{resto, che per } N \text{ opportuno deve essere} < E} .$$

Ricordando che, come nel criterio integrale,

$$\int_{N+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leq s - s_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} f(n) \leq \int_{N}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

abbiamo che

$$s_N + \int_{N+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leq s \leq s_N + \int_{N}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

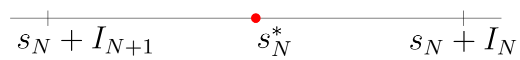
Abbiamo così determinato un intervallo di ampiezza $\int_N^{N+1} f(x)\,dx$ in cui si trova la somma s della serie. Se prendiamo il punto medio di questo intervallo, avremo una approssimazione s_N^* della somma della serie (migliore di quella che potrebbe darci s_N).

Riassumendo, se poniamo

$$s_N^* = s_N + \tfrac{1}{2}\left(I_{N+1} + I_N\right) \qquad I_N = \int_N^{+\infty} f(x)\,dx$$

allora l'errore commesso è

$$|s - s_N^*| \leq \tfrac{1}{2}\left(I_N - I_{N+1}\right).$$



Occorre determinare N in modo che questo sia minore di E (ad es. 10^{-2}).

Esempio 1.23. Approssimare a meno di 10^{-4} la somma di $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Usiamo il trucchetto precedente. Si ha $I_N = \frac{1}{N}$ e la stima fornita da s_N^* dà un errore dell'ordine di $\frac{1}{2}\left(I_N - I_{N+1}\right) = \frac{1}{2N(N+1)}$. Abbiamo $\frac{1}{2N(N+1)} < 10^{-4}$ ad esempio per $N = 71$. Con `Maple` possiamo scrivere una variazione dei comandi

```
> ridotta:=convert(sum(1/k^2,k=1..71),float);
> int_infinito:=n->1/n;
> approssimazione:=ridotta+0.5*(int_infinito(71)+int_infinito(72));
```

Il risultato che otteniamo è 1.6449, con quindi due cifre decimali esatte.

Notiamo che il metodo "ingenuo" di usare solo la stima dall'alto fornita dal criterio integrale ci avrebbe obbligati a molte iterazioni in più: siccome si tratta di una serie a termini positivi e convergente, possiamo approssimare (per difetto) la somma della serie con una opportuna ridotta di ordine N. Il problema è determinare N in modo che l'errore commesso sia più piccolo di 10^{-4}. In formule:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}}_{\text{ridotta, che dà l'approssimazione}} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}_{\text{resto, che per } N \text{ opportuno deve essere} < 10^{-4}}.$$

Cerchiamo allora di determinare N, in modo che il resto sia minore di 10^{-4}. La stima dall'alto del criterio integrale ci dice che

$$0 \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{N}.$$

Pertanto N dovrà essere scelto abbastanza grande, in modo che $\frac{1}{N} < 10^{-4}$, quindi almeno $N = 10001$.

4.2. Approssimazione dal criterio del rapporto/radice. Vediamo come approssimarela somma di serie positive la cui convergenza si può determinare con il criterio del rapporto o della radice o, più in generale, serie il cui termine generale a_n soddisfa, almeno definitivamente, una stima del tipo

$$0 \leq a_n \leq K\, r^n, \qquad \text{con } K > 0, \quad 0 < r < 1.$$

Possiamo pensare di fissare un certo errore E o precisione della stima, troncare la serie a un certo indice N, da determinare, e trattare il resto come errore. In formule:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} a_n}_{\text{ridotta, } s_N \text{ che dà l'approssimazione}} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n}_{\text{resto, che per } N \text{ opportuno deve essere} < E} .$$

In questo caso il resto della serie può essere stimata tramite una serie geometrica. Più precisamente:

$$\begin{aligned} 0 \leq s - s_N &= \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} K\, r^n \\ &= K \sum_{n=N+1}^{+\infty} r^n = K\, r^{N+1} \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \\ &= \frac{K\, r^{N+1}}{1-r}. \end{aligned}$$

Bisognerà quindi determinare N in modo che $\frac{K\, r^{N+1}}{1-r}$ sia minore dell'errore richiesto.

Esempio 1.24. Approssimare a meno di 10^{-4} la somma di $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$. Come già anticipato, la somma di questa serie è e. Si ha per $n \geq 2$

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n} = \frac{1}{2}\frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

Dobbiamo quindi determinare N in modo che

$$\frac{2\,\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{2}} < 10^{-4}$$

e possiamo prendere $N = 15$.

La somma della serie richiesta è quindi approssimabile, a meno di 10^{-4} con $\sum_{n=0}^{15} \frac{1}{n!} = 1.7182$. Da notare è che la velocità con cui questa serie converge a e è molto interessante, soprattutto se paragonata con la velocità con cui la successione $b_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ tende (crescendo) a e. Con lo stesso numero di iterazioni: $b_{15} = 2.632878718$, non ha nemmeno una cifra decimale esatta. La prima cifra decimale esatta fa capolino dopo 74 passi $b_{74} = 2.700139679$.

5. Serie assolutamente convergenti

Cosa possiamo dire se una serie ha termini di segno variabile? Ci sono alcune serie che sono facilmente trattabili e sono quelle assolutamente convergenti.

Definizione 1.2. Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se è convergente la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$.

La loro importanza è dovuta in parte al seguente criterio e alle sue conseguenze.

Teorema 1.25. *Se una serie è assolutamente convergente, allora essa è convergente.*

Dimostrazione. Si ha $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$, quindi $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$. Poiché $2|a_n|$ è termine generale di una serie convergente, allora per il criterio del confronto anche $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + |a_n|)$ è convergente, diciamo a ℓ. Chiamiamo ℓ' la somma di $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$. Si ha

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(a_k + |a_k|) - \sum_{k=1}^{n} |a_k| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - \ell',$$

ovvero la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente. □

Esempio 1.26. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ è convergente. Infatti essa è assolutamente convergente, perché $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente.

Esempio 1.27. La serie esponenziale $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ è assolutamente convergente per ogni x in $\mathbb{R}$. Infatti è banalmente convergente se $x = 0$. D'altra parte, usando il criterio del rapporto, è facile concludere che $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ è convergente per ogni x.

Combinando il Teorema 1.25, il Corollario 1.15 e l'esempio 1.9 delle serie armoniche generalizzate otteniamo l'usatissimo

Teorema 1.28 (Criterio dell'ordine di infinitesimo). *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione infinitesima di ordine* α*. Se* $\alpha > 1$*, allora la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *è assolutamente convergente.*

Esempio 1.29. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\log(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}\right)$ è assolutamente convergente, perché il termine generale $\log(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}$ è infinitesimo di ordine 2 per $n \to +\infty$.

Un esempio di serie convergente ma non assolutamente convergente è nella prossima sezione. Ovviamente non si tratta di una serie a termini non negativi.

Le serie assolutamente convergenti sono soprattutto "famose" all'interno delle serie convergenti, perché la loro somma non varia quando permutiamo l'ordine degli addendi (anche infiniti addendi). Senza addentrarci maggiormente nell'argomento, qui precisiamo solo che riordinando in maniera opportuna i termini di una serie convergente ma non assolutamente convergente si può ottenere una nuova serie con somma diversa dalla serie di partenza. Anzi, comunque fissato ℓ (reale o anche infinito) è possibile trovare un opportuno riordinamento che abbia ℓ come somma (se $\ell = \pm+\infty$ si intende che il riordinamento diverge positivamente o negativamente). E è anche possibile riordinare in modo da ottenere una serie indeterminata. Ciò comunque esula dagli scopi di questo corso.

6. Serie di Leibniz

Una serie di Leibniz o serie a segni alterni è una serie che si può scrivere nella forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\, a_n \qquad \text{con } a_n > 0 \quad \forall n$$

(oppure anche $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, a_n$).

Teorema 1.30. *Sia* (a_n) *una successione non negativa, decrescente, infinitesima. Allora la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\, a_n$ *converge. Inoltre, se* s *è la somma della serie e* (s_n) *la successione delle ridotte, si ha*

$$0 \le s - s_n \le a_{n+1} \text{ se } n \text{ è pari}$$
$$-a_{n+1} \le s - s_n \le 0 \text{ se } n \text{ è dispari}$$

Dimostrazione. Consideriamo i casi in cui abbiamo un numero dispari di addendi, ad esempio $2m-1$ e $2m+1$. Si ha

$$s_{2m+1} = s_{2m-1} + (-1)^{2m-1} a_{2m} + (-1)^{2m} a_{2m+1} = s_{2m-1} - a_{2m} + a_{2m+1} \leq s_{2m-1},$$

perché, siccome la successione (a_n) è decrescente, $a_{2m+1} - a_{2m} \leq 0$. Questo vuol dire che la successione (s_{2m+1}) è decrescente.

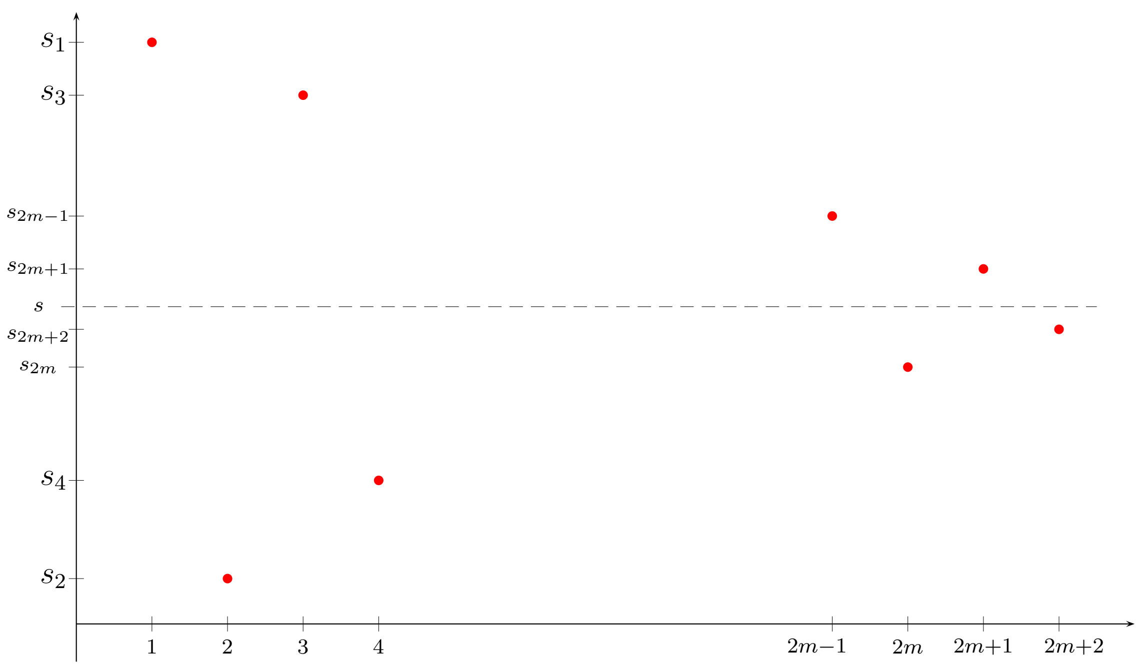
Analogamente, se consideriamo i casi in cui abbiamo un numero pari di addendi, ad esempio $2m$ e $2m+2$, si ha

$$s_{2m+2} = s_{2m} + a_{2m+1} - a_{2m+2} \geq s_{2m}.$$

Questo vuol dire che la successione (s_{2m}) è crescente. Inoltre, siccome (a_n) è non negativa,

$$s_{2m} \leq s_{2m} + a_{2m+1} = s_{2m+1} \leq s_{2m-1} \leq \ldots s_1.$$

Nel disegno vediamo il grafico della successione (s_n) con le proprietà che abbiamo appena stabilito:



In particolare, (s_{2m}) è crescente e limitata dall'alto da s_1, mentre (s_{2m+1}) è decrescente e limitata dal basso da s_2; comunque entrambe sono convergenti.

Sia $s = \lim_{m \to +\infty} s_{2m}$. Allora, siccome (a_n) è infinitesima, anche

$$\lim_{m \to +\infty} s_{2m+1} = \lim_{m \to +\infty} s_{2m} + a_{2m+1} = s.$$

Infine $s_{2m} \leq s \leq s_{2m+1}$ per ogni m da cui

$$0 \leq s - s_{2m} \leq s_{2m+1} - s_{2m} = a_{2m+1}$$
$$0 \leq s_{2m+1} - s \leq s_{2m+1} - s_{2m+2} = a_{2m+2}.$$

Quindi per n pari oppure dispari

$$0 \leq |s - s_n| \leq a_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

ovvero $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1}\, a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s.$ $\square$

Esempio 1.31. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ è una serie convergente per il criterio appena visto. Si noti che non è assolutamente convergente e che il termine generale è un infinitesimo di ordine uno. Qualora si desideri determinarne la somma a meno di 10^{-3}, è sufficiente ricordare che la ridotta di ordine n approssima la somma della serie a meno di $\frac{1}{n+1}$. Pertanto occorre prendere $n = 1001$ e, a meno di 10^{-3}, la somma della serie è $-0,693$. Tale approssimazione è per difetto.

La somma di questa serie si potrebbe calcolare con un po' di fatica e è $-\log 2$. Tuttavia la velocità di convergenza è molto lenta e questo non fornisce un buon metodo per approssimare $-\log 2$.

Esempio 1.32. La proprietà di decrescenza della successione (a_n) è fondamentale. Si consideri ad esempio la serie a segni alterni

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\, a_n$$

dove

$$a_n = \begin{cases} 1/k & \text{se } n = 2k \text{ è pari} \\ 1/k^2 & \text{se } n = 2k-1 \text{ è dispari} \end{cases}$$

È facile vedere che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ e che (a_n) non è decrescente.

Mostriamo che la serie non converge guardando le somme parziali di ordine pari.

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty,$$

perché la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge e la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

7. Esercizi

1) Dire se sono convergenti le seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+5}{n^3-2n+3}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2n-1}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\sin\frac{1}{n^2}\right|; \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\log(\log n))^n},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,e^n}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n-n}; \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+n!}{(1+n)!}; \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log^3 n}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right);$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^4}{n!}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^n+5}.$$

2) Dire se le seguenti serie sono convergenti e eventualmente approssimarne la somma a meno di 10^{-5}

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n\,n!}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}.$$

3) Dire se sono convergenti e eventualmente calcolare la somma di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3+2^n}{2^{n+2}}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}; \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log n}.$$

4) Per quali x in $\mathbb{R}$ sono assolutamente convergenti o convergenti o divergenti le seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-5)^n}{n\,3^n}; \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2\left(\frac{x}{x+2}\right)^n; \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^3}.$$

CAPITOLO 2

Serie di funzioni

Una serie di funzioni è un'espressione del tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \qquad \text{oppure} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

dove le f_n sono funzioni di una variabile reale a valori reali e hanno un dominio comune I.

In questo corso ci occuperemo essenzialmente di un tipo di serie di funzioni: le serie di potenze (e le serie di Taylor).

1. Tipi di convergenza

Osserviamo che se x è fissato in I, allora la successione $(f_n(x))_n$ è una successione numerica. Possiamo quindi chiederci se, per x fissato in I, la serie numerica $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ è convergente. Per tutte le x in I per cui la serie numerica $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ è convergente, si definisce una nuova funzione, la funzione somma.

1.1. Convergenza puntuale. Una prima definizione di convergenza è quindi la seguente.

Definizione 2.1. Siano f_n funzioni reali di variabile reale con comune dominio I. Si dice che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *converge puntualmente* in un insieme $D \subseteq I$ se per ogni x in D la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ è convergente. La funzione f definita da

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \qquad \forall x \in D$$

è la *funzione somma*. L'insieme D si dice *insieme di convergenza puntuale* della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

Proprietà. Siccome la serie dei resti n–esimi ha lo stesso carattere della serie di partenza, la successione

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

è ben definita per ogni x in D, insieme di convergenza puntuale della serie di funzioni data. Inoltre per ogni x in D fissato,

$$r_n(x) = f(x) - s_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Dalla definizione di limite, questo vuol dire che comunque siano fissati x in D e $\varepsilon > 0$ esiste un indice N (che può dipendere sia da x sia da ε) tale che per ogni $n \geq N$ si abbia $|r_n(x)| < \varepsilon$.

Proprietà. Dalla condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica (Teorema 1.4), ricaviamo che l'insieme di convergenza puntuale è contenuto nell'insieme dei punti x tali che $(f_n(x))_n$ è infinitesima:

$$D \subseteq \{x \in I \,:\, \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0\}.$$

La nozione di convergenza puntuale è però poco interessante, perché non permette di trasferire proprietà delle funzioni f_n alla funzione somma. Ad esempio la somma di una serie di funzioni continue potrebbe non essere continua.

Esempio 2.1. Consideriamo $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x^n - x^{n+1})$ — vi ricordo che $0^0 = 1$ per convenzione.

In questo esempio, le funzioni f_n sono le funzioni definite su $I = \mathbb{R}$ da

$$f_n(x) = x^n - x^{n+1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Per x fissato, abbiamo una serie telescopica, per cui

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(x^k - x^{k+1}) = x^0 - x^n = 1 - x^n \to \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & x = 1 \\ \text{non converge} & x \leq -1, \quad x > 1. \end{cases}$$

Quindi la funzione somma f è definita su $D = (-1, 1]$ e

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & x = 1. \end{cases}$$

Nonostante tutte le funzioni f_n siano continue in D, la funzione f non è continua in D.

1.2. Convergenza uniforme. È quindi opportuno sostituire la nozione di convergenza puntuale con una più forte, la convergenza uniforme.

DEFINIZIONE 2.2. Siano f_n funzioni reali di variabile reale con comune dominio I. Supponiamo che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converga puntualmente in $D \subseteq I$ alla funzione somma f. Si dice che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *converge uniformemente* in $D' \subseteq D$ alla sua somma se

$$\lim_{n\to+\infty} \sup\{|s_n(x) - f(x)| \,:\, x \in D'\} = 0$$

In simboli $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \underset{D'}{\rightrightarrows} f$.

PROPRIETÀ. Possiamo riscrivere la condizione di uniforme convergenza facendo intervenire il resto

$$\lim_{n\to+\infty} \sup\{|r_n(x)| \,:\, x \in D'\} = 0.$$

Dalla definizione di limite, questo vuol dire che comunque sia fissato $\varepsilon > 0$ esiste un indice N (che può dipendere da ε) tale che per ogni $n \geq N$ si abbia $|r_n(x)| < \varepsilon$ per ogni x in D'. Si ha quindi un'uniformità rispetto a x in D' per la scelta di tale indice N.

PROPOSIZIONE 2.2 (Continuità e convergenza uniforme). *Siano f_n funzioni continue in un punto x_0 di I per ogni n e sia $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ uniformemente convergente in I a f. Allora f è continua in x_0.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Siccome la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente a f in I, si trova un indice N tale che

$$\sup\{|s_n(x) - f(x)| \,:\, x \in I\} < \varepsilon \qquad \forall n \geq N.$$

Siccome la somma finita di funzioni continue è continua, esiste un intorno U di x_0 tale che per ogni x in $U \cap I$ si abbia

$$|s_N(x) - s_N(x_0)| < \varepsilon.$$

Ne ricaviamo quindi che per ogni x in $U \cap I$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - s_N(x)| + |s_N(x) - s_N(x_0)| + |s_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq 2\sup\{|s_n(x) - f(x)| \,:\, x \in I\} + |s_N(x) - s_N(x_0)| \\ &< 3\varepsilon. \end{aligned}$$

□

Una proprietà importante sullo scambio tra serie e integrale è l'oggetto della seguente proposizione, di cui vediamo solo l'enunciato.

Proposizione 2.3 (Integrazione per serie). *Siano f_n funzioni Riemann integrabili su un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ per ogni n e sia $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ uniformemente convergente in $[a,b]$ alla somma f. Allora f è Riemann integrabile su $[a,b]$ e*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_n(t)\right)\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt.$$

In particolare la Proposizione 2.3 ci permette di concludere che per ogni x, x_0 in $[a,b]$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt \underset{x\in[a,b]}{\rightrightarrows} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

In altre parole, detta F_n la primitiva di f_n che vale 0 in un punto x_0 e F la primitiva di f che vale 0 nello stesso punto x_0 si ha

$$\sum_{k=1}^{n} F_k \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} F,$$

brevemente: la serie delle primitive (che si annullano nello stesso punto) è la primitiva (nulla nello stesso punto) della serie.

Proposizione 2.4 (Derivazione per serie). *Siano f_n funzioni di classe C^1 su un intervallo I e sia $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ puntualmente convergente in I alla somma f. Supponiamo che $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'$ sia uniformemente convergente in I a g. Allora f è di classe C^1 in I e $f' = g$.*

Dimostrazione. Notiamo che per ogni n e per ogni x, x_0 in I per il Teorema fondamentale del calcolo integrale vale

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt,$$

quindi

$$\sum_{k=1}^{n} f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_n(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt.$$

Siccome la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge puntualmente in I a f, si ha

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) \qquad \forall x \in I$$

(e quindi anche x_0). Siccome la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'$ è uniformemente convergente a g in I, per la Proposizione 2.3 di integrazione per serie vale

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{+\infty} f_n'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

Quindi

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \qquad \forall x \in I.$$

Per la Proposizione 2.2 la funzione g è continua. Quindi dal Teorema fondamentale del calcolo integrale deduciamo che f è derivabile e $f' = g$, ossia f è C^1. □

La Proposizione 2.4 afferma quindi che (per una serie di funzioni derivabili, puntualmente convergente, con serie delle derivate uniformemente convergente) si possono scambiare l'operazione di serie e quella di derivata:

$$f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x).$$

Purtroppo non è semplice stabilire la convergenza uniforme, specialmente se non conosciamo la funzione somma di una serie data.

Una condizione necessaria per la convergenza uniforme è la seguente (si confronti con il Teorema 1.4).

Teorema 2.5 (Condizione necessaria per la convergenza uniforme). *Sia* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *una serie di funzioni convergente uniformemente in* D. *Allora*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup\{|f_n(x)| \,:\, x \in D\} = 0.$$

Dimostrazione. Sia f la funzione somma della serie, ovvero, detta (s_n) la successione delle ridotte, si ha $\lim_{n\to+\infty} \sup\{|s_n(x) - f(x)| \,:\, x \in D\} = 0$. Ma allora

$$\begin{aligned} 0 \le \sup\{|f_n(x)| \,:\, x \in D\} &= \sup\{|s_n(x) - s_{n-1}(x)| \,:\, x \in D\} \\ &\le \sup\{|s_n(x) - f(x)| \,:\, x \in D\} + \sup\{|f(x) - s_{n-1}(x)| \,:\, x \in D\} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \end{aligned}$$

□

Un modo facile di controllare la convergenza uniforme è il cosiddetto "test di Weierstrass". Il vantaggio è che permette di concludere positivamente sulla convergenza uniforme di una serie di funzioni senza conoscerne la somma.

Teorema 2.6 (Test di Weierstrass). *Siano $f_n : I \to \mathbb{R}$. Se $|f_n(x)| \leq M_n$ per ogni x in I e la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ è convergente, allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente in I.*

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}\sup\{|s_n(x) - f(x)| \,:\, x \in D\} &= \sup\{|r_n(x)| \,:\, x \in D\} \\ &\leq \sup\{\sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \,:\, x \in D\} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k.\end{aligned}$$

Siccome $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ è convergente, per la Proposizione 1.7, il suo resto n–esimo tende a zero, quindi

$$0 \leq \sup\{|s_n(x) - f(x)| \,:\, x \in D\} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

□

Esempio 2.7. La serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ è uniformemente convergente in $[-1, 1]$, perché

$$\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ è convergente.}$$

Esempio 2.8. La serie esponenziale $e^x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ è puntualmente convergente in $\mathbb{R}$, non è uniformemente convergente in $\mathbb{R}$, ma lo è sui sottointervalli chiusi e limitati. Infatti

$$\sup\left\{\left|\frac{x^n}{n!}\right| \,:\, x \in [-A, A]\right\} \leq \frac{A^n}{n!} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \text{ è convergente,}$$

da cui $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \underset{[-A,A]}{\rightrightarrows} e^x$. (Vedremo in seguito che la somma è e^x.)

Non è uniformemente convergente in $\mathbb{R}$ perché non è soddisfatta la condizione necessaria del Teorema 2.5:

$$\sup\{|f_n(x)| \,:\, x \in \mathbb{R}\} = \sup\left\{\frac{|x|^n}{n!} \,:\, x \in \mathbb{R}\right\} = +\infty.$$

Esempio 2.9. Sia

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2x^2 + 1}.$$

Determiniamo il dominio di f e diciamo se f è continua.

Per x reale poniamo $f_n(x) = \frac{1}{n^2x^2+1}$. Quando $x = 0$ il termine generale non è infinitesimo, perché $f_n(0) = 1$ per ogni n. Quindi 0 non è nell'insieme di convergenza puntuale ovvero nel dominio di f.

Quando $x \neq 0$ il termine generale $f_n(x)$ è un infinitesimo di ordine 2, quindi la serie risulta essere assolutamente convergente. In particolare la serie di funzioni data è convergente puntualmente in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, che è il dominio di f.

La serie non è uniformemente convergente su $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, perché non è soddisfatta la condizione necessaria del Teorema 2.5:

$$\sup\{|f_n(x)| \,:\, x \neq 0\,\} = \sup\left\{\frac{1}{n^2x^2+1} \,:\, x \neq 0\right\} = 1 \qquad \forall n.$$

Tuttavia è uniformemente convergente in ogni sottoinsieme della forma $(-\infty, -A] \cup [A, +\infty)$ per ogni $A > 0$. Infatti, possiamo usare il test di Weierstrass:

$$\sup\left\{\frac{1}{n^2x^2+1} \,:\, |x| \geq A\right\} = \frac{1}{n^2A^2+1} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2A^2+1} \text{ è convergente.}$$

Dalla Proposizione 2.2 deduciamo che f è continua in $(-\infty, -A] \cup [A, +\infty)$ per ogni $A > 0$.

Se fissiamo un punto x_0 nel dominio di f, cioè prendiamo $x_0 \neq 0$, allora x_0 apparterrà a un opportuno intervallo della forma $(-\infty, -A] \cup [A, +\infty)$ e quindi f risulta continua in x_0. Siccome f è continua in ogni punto del suo dominio, f è continua.

Ci sono fondamentalmente due ragioni per considerare le serie di funzioni: da una parte sono uno strumento per definire nuove funzioni e studiarne le proprietà, d'altra parte si può voler scrivere una funzione nota come sovrapposizione di funzioni più semplici, ad esempio, allo scopo di integrare o derivare per serie.

Nella prossima sezione ci occupiamo di un tipo particolare di serie di funzioni: le serie di potenze.

2. Serie di potenze

Una serie di potenze centrate nel numero reale x_0 è una serie della forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x-x_0)^n,$$

con $a_n \in \mathbb{R}$.

Si tratta di una serie di funzioni, in cui $f_n(x) = a_n\,(x - x_0)^n$. I numeri a_n si chiamano i coefficienti della serie di potenze, x_0 si chiama centro della serie di potenze.

In particolare sono serie di potenze centrate in 0 le serie della forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n \tag{2.1}$$

A meno della traslazione $t = x - x_0$, ci possiamo ricondurre a avere una serie della forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,t^n$$

ovvero una serie centrata in 0.

Per semplicità quindi ci limitiamo a considerare il caso $x_0 = 0$.

Il risultato fondamentale per le serie di potenze riguarda la forma dell'insieme di convergenza assoluta. Possiamo subito notare che quando $x = 0$ la serie (2.1) contiene solo un termine non nullo, il primo: a_0 (ricordate la convenzione $0^0 = 1$). Quindi la serie (2.1) è convergente nel suo centro è lì ha somma a_0.

Teorema 2.10. *Se la serie di potenze* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n$ *converge nel punto* $x = p \neq 0$*, allora essa converge puntualmente assolutamente nei punti dell'intervallo* $(-|p|, |p|)$.

Dimostrazione. Per ipotesi la serie converge per $x = p$. Quindi il suo termine generale, per $x = p$, deve essere infinitesimo, in particolare sarà limitato da una costante M:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n\,p^n = 0 \quad \Rightarrow |a_n\,p^n| \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Supponiamo ora che x sia un punto dell'intervallo $(-|p|, |p|)$. Allora $q = |x|/|p| < 1$ e per ogni n

$$0 \le |a_n\,x^n| = |a_n\,p^n| \, \left|\frac{x}{p}\right|^n \le M\,q^n.$$

Siccome la serie $\sum q^n$ geometrica di parametro $q < 1$ è convergente, per il criterio del confronto converge la serie $\sum |a_n\,x^n|$. □

Una conseguenza importante di questo teorema è che se la serie di potenze $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n$ non converge nel punto $x = p'$, allora non converge in tutti i punti x tali che $|x| > |p'|$. Infatti, se per assurdo convergesse in p'', con $|p''| > |p'|$, allora sarebbe convergente anche nei punti dell'intervallo $I = (-|p''|, |p''|)$. Siccome p' è in questo intervallo e in p' la serie non converge, abbiamo trovato un assurdo. Abbiamo così provato che

Corollario 2.11. *Se la serie di potenze* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ *non converge nel punto* $x = p' \neq 0$, *allora essa non converge in ogni punto al di fuori dell'intervallo* $\big[-|p'|, |p'|\,\big]$.

2.1. Raggio di convergenza. Da quanto visto deduciamo che l'insieme di convergenza puntuale della serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ centrata in 0 è un intervallo (simmetrico, se non ci occupiamo degli estremi) di centro 0. All'interno di tale intervallo si ha convergenza assoluta.

Analogamente, l'insieme di convergenza puntuale della serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x - x_0)^n$ centrata in x_0 è un intervallo di centro x_0 e all'interno di tale intervallo si ha convergenza assoluta.

Nei prossimi esempi osserviamo che l'intervallo di convergenza puntuale può ridursi al solo centro, può essere tutto $\mathbb{R}$, può essere limitato, chiuso o aperto (anche solo da un lato).

Esempio 2.12. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} n!\, x^n$ converge solo per $x = 0$. Infatti per ogni $x \neq 0$ il termine generale non è infinitesimo:

$$\lim_{n\to+\infty} n!\, |x|^n = +\infty.$$

Esempio 2.13. La serie esponenziale $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge per ogni x reale, quindi l'intervallo di convergenza è $(-\infty, +\infty)$.

Esempio 2.14. La serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ converge in $(-1, 1)$.

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$ converge in $[-1, 1)$.

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, \dfrac{x^n}{n}$ converge in $(-1, 1]$.

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$ converge in $[-1, 1]$.

La semiampiezza del più grande intervallo in cui la serie converge costituisce il raggio di convergenza. Precisamente:

Definizione 2.3. Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$, si dice raggio di convergenza il

$$\sup\left\{ |x| \;:\; \text{la serie } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \text{ converge } \right\}.$$

Da quanto detto, ogni serie di potenze centrata in 0 si può inquadrare in uno dei tre casi seguenti.

1) La serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ converge solo per $x = 0$ e quindi ha raggio di convergenza 0.
2) La serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ converge per ogni x in un intervallo della forma $(-\rho, \rho)$, con $\rho > 0$, e non converge se $|x| > \rho$. In questo caso ρ è il raggio di convergenza. Si noti che per $|x| = \rho$ la serie può avere qualsiasi comportamento.
3) La serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ converge per ogni x reale; in questo caso il raggio di convergenza è $+\infty$.

Il problema è ora come determinare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$. Dai criteri del rapporto e della radice per serie numeriche (Teoremi 1.17 e 1.21) applicati alla serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\, |x|^n$ discendono immediatamente i seguenti risultati.

Teorema 2.15. *Sia* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ *una serie di potenze, con* $a_n \neq 0$ *per ogni* n *e sia*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell.$$

- *Se* $0 < \ell < +\infty$ *allora il raggio di convergenza è* $\rho = 1/\ell$.
- *Se* $\ell = +\infty$ *allora il raggio di convergenza è* $\rho = 0$.
- *Se* $\ell = 0$ *allora il raggio di convergenza è* $\rho = +\infty$.

TEOREMA 2.16. *Sia* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ *una serie di potenze e sia*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell.$$

- *Se* $0 < \ell < +\infty$ *allora il raggio di convergenza è* $\rho = 1/\ell$.
- *Se* $\ell = +\infty$ *allora il raggio di convergenza è* $\rho = 0$.
- *Se* $\ell = 0$ *allora il raggio di convergenza è* $\rho = +\infty$.

2.2. Continuità della somma di una serie di potenze. Mostriamo ora che in sottointervalli chiusi e limitati contenuti all'interno dell'intervallo di convergenza si ha anche convergenza uniforme.

TEOREMA 2.17. *Sia* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ *una serie di potenze con raggio di convergenza* $\rho > 0$ *(anche* $+\infty$*). Allora* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ *converge uniformemente in ogni intervallo della forma*

$$[-r, r] \subset (-\rho, \rho) \qquad \begin{array}{l} 0 < r < \rho \ \textit{se}\ \rho \in \mathbb{R}^+ \\ \forall r > 0 \ \textit{se}\ \rho = +\infty. \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE. Occupiamoci del caso in cui ρ non sia $+\infty$. Il caso $\rho = +\infty$ è analogo. Se $|x| \le r$ si ha

$$|a_n\, x^n| \le |a_n|\, r^n \qquad \forall n.$$

Dalla definizione di raggio di convergenza, sappiamo che quando $r < \rho$ la serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, r^n$ è assolutamente convergente. Allora adoperando il test di Weierstrass (Teorema 2.6) possiamo concludere che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ converge uniformemente in $[-r, r]$. $\square$

COROLLARIO 2.18. *Sia* f *la somma di una serie di potenze centrate in* 0 *e con raggio di convergenza* ρ*. Allora* f *è continua in* $(-\rho, \rho)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia x_1 un punto di $(-\rho, \rho)$ e sia h tale che $|x_1| \le h$. Siccome la serie di potenze converge uniformemente in $[-h, h]$ e le potenze sono funzioni continue, per la Proposizione 2.2 su continuità e convergenza uniforme, f risulta continua in x_1. Per l'arbitrarietà di x_1 otteniamo la tesi. $\square$

Osserviamo che può esserci convergenza uniforme in tutti i sottointervalli contenuti nell'intervallo di convergenza senza esserci convergenza uniforme in tutto l'intervallo di convergenza.

Esempio 2.19. La serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ ha raggio di convergenza 1 e il suo intervallo di convergenza è $(-1,1)$. C'è convergenza uniforme nei sottointervalli della forma $[-r,r]$ con $r<1$, ma non c'è convergenza uniforme su $(-1,1)$, perché non è soddisfatta la condizione necessaria del Teorema 2.5

$$\lim_{n\to+\infty} \sup\{|x|^n \,:\, x\in(-1,1)\} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1.$$

Tuttavia, se in un estremo dell'intervallo di convergenza la serie di potenze è convergente, allora l'intervallo di convergenza uniforme (e quindi l'intervallo di continuità della funzione somma) è più grande. È il significato del seguente criterio, che non dimostriamo.

Teorema 2.20 (Abel). *Sia* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ *una serie di potenze con raggio di convergenza* $\rho>0$ *finito. Allora*

- *se la serie converge in* $x=\rho$*, allora la serie è uniformemente convergente in* $[-r,\rho]$ *per ogni* $0<r<\rho$ *e quindi la funzione somma è continua in* $(-\rho,\rho]$*;*
- *se la serie converge in* $x=-\rho$*, allora la serie è uniformemente convergente in* $[-\rho,r]$ *per ogni* $0<r<\rho$ *e quindi la funzione somma è continua in* $[-\rho,\rho)$*;*
- *se la serie converge in* $x=\pm\rho$*, allora la serie è uniformemente convergente in* $[-\rho,\rho]$ *e quindi la funzione somma è continua in* $[-\rho,\rho]$*.*

2.3. Derivabilità e integrazione per serie di potenze. Dai Teoremi 2.3 e 2.4 seguono facilmente i seguenti criteri (con estremi inclusi o esclusi a seconda dei casi).

Teorema 2.21 (Integrazione per serie della somma di una serie di potenze). *Sia* $\rho>0$ *il raggio di convergenza della serie di potenze* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ *e sia* f *la sua somma. Allora*

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1} \qquad \forall x\in(-\rho,\rho).$$

In particolare, per ogni $a,b\in(-\rho,\rho)$ *si ha*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\,(b^{n+1}-a^{n+1}).$$

Si può dimostrare che il raggio di convergenza della serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$ è lo stesso della serie di partenza $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\, x^n$. In effetti, se esiste $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ e usiamo il criterio della radice,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n\,|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}\, \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Teorema 2.22 (Derivazione per serie della somma di una serie di potenze). *Sia $\rho > 0$ il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ e sia f la sua somma. Allora f è C^1 in $(-\rho, \rho)$ e si ha*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} \qquad \forall x \in (-\rho, \rho).$$

Iterando il ragionamento, otteniamo che la somma di una serie di potenze di raggio di convergenza positivo è di classe C^∞, inoltre

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n\, x^{n-k} \qquad \forall x \in (-\rho, \rho);$$
$$f^{(k)}(0) = k!\, a_k \qquad \text{in particolare per } x = 0.$$

2.4. Esempi. In questa sezione vediamo alcuni esempi noti di serie di potenze che si costruiscono a partire dalla serie geometrica.

1) La serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \forall x \in (-1, 1)$$

ha raggio di convergenza 1. Converge uniformemente nei sottointervalli del tipo $[-r, r]$ con $r < 1$.

2) Se nella serie geometrica $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n$ poniamo $t = -x$, otteniamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, x^n = \frac{1}{1+x} \qquad \forall x \in (-1, 1).$$

Di nuovo il raggio di convergenza è 1 e la serie converge uniformemente nei sottointervalli del tipo $[-r, r]$ con $r < 1$.

3) Se nella serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ poniamo $t = -x^2$, otteniamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in (-1,1).$$

Di nuovo il raggio di convergenza è 1 e la serie converge uniformemente nei sottointervalli del tipo $[-r,r]$ con $r < 1$.

4) Integrando per serie nell'intervallo $(0,x)$ la serie dell'esempio 2) otteniamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad \forall x \in (-1,1].$$

Il raggio di convergenza è sempre 1 ma la serie converge uniformemente nei sottointervalli del tipo $[-r,1]$ con $r < 1$. In particolare $\log(2) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

5) Integrando per serie nell'intervallo $(0,x)$ la serie dell'esempio 3) otteniamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan x \qquad \forall x \in [-1,1].$$

Il raggio di convergenza è sempre 1 ma la serie converge uniformemente su $[-1,1]$. In particolare $\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}$.

6) Derivando per serie la geometrica otteniamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\,x^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \forall x \in (-1,1).$$

Il raggio di convergenza è sempre 1. Questo esempio è legato alla probabilità. Sia T il tempo di attesa di uno schema di Bernoulli di parametro $p \in (0,1)$ e sia $q = 1-p$. Allora $\mathbb{P}(T = n) = p\,q^{n-1}$ e per quanto appena visto,

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,p\,q^{n-1} = p\sum_{n=1}^{+\infty} n\,q^{n-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

3. Serie di Taylor

Abbiamo visto che se f è una funzione reale, definita in un intervallo (a,b), x_0 è un punto di (a,b) e f è derivabile n volte in x_0, allora alla funzione f possiamo associare il polinomio di Taylor centrato in x_0 e di ordine n, dato da

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Abbiamo visto che questo è il polinomio che approssima la funzione f in un intorno del punto x_0 a meno di un infinitesimo di ordine superiore a $(x-x_0)^n$, ovvero

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right]}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Numericamente una stima dell'errore è data dalla formula di Taylor con resto di Lagrange: se f è derivabile con continuità in (a,b) e la derivata di ordine $n+1$ esiste in $(a,b)\setminus\{x_0\}$, allora per ogni x in (a,b) esiste un punto ξ nell'intervallo di estremi x_0 e x tale che

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{2.2}$$

In forma più compatta, possiamo scrivere il polinomio di Taylor di f centrato in x_0 e di ordine n come

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

dove intendiamo che $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$.

Nel caso in cui f sia derivabile infinite volte in un intervallo (a,b), appare naturale associare alla funzione f la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \tag{2.3}$$

di cui il polinomio di Taylor di ordine n costituisce la ridotta (di ordine $n+1$).

Definizione 2.4. La serie (2.3) prende il nome di *serie di Taylor* di f centrata in x_0. Quando $x_0 = 0$, si parla di *serie di Mac Laurin* di f.

Osserviamo che una serie di Taylor è una serie di potenze e che ogni serie di potenze (di raggio di convergenza positivo) è la serie di Taylor della sua somma. Quindi gli esempi 1)–6) di serie di potenze della sezione precedente sono delle particolari serie di Mac Laurin della lora somma.

3.1. Convergenza di una serie di Taylor. Sia f infinitamente derivabile in un certo intervallo (a,b).

Due sono le domande che ci poniamo a questo punto:

1) la serie definita dalla formula (2.3) è convergente per ogni $x\in(a,b)$?

2) Se la serie (2.3) è convergente in $x\in(a,b)$, la somma della serie è $f(x)$?

Se la risposta a entrambe le domande precedenti è sì, allora $f(x)$ si dice *sviluppabile in serie di Taylor* centrata in x_0 nell'intervallo (a, b).

Siccome una serie di Taylor è una serie di potenze, sappiamo che avrà un intervallo di convergenza simmetrico, del tipo $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$. Quindi, a meno che x_0 non sia il centro dell'intervallo (a, b), la risposta alla domanda 1) è in generale no.

Esempio 2.23. La funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

è derivabile infinite volte in $(-\infty, 1)$ e inoltre $f^{(k)}(0) = k!$ per ogni k. La serie di Mac Laurin di $f(x)$ è la serie geometrica di ragione x

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k,$$

quindi convergente per $|x| < 1$ e lì $f(x)$ coincide con la somma della sua serie di Mac Laurin. Questo fornisce un esempio in cui l'intervallo di convergenza è più piccolo di quello dove la funzione risulta derivabile infinite volte.

Possiamo quindi riformulare la domanda 1) chiedendo che

1') se f è derivabile infinite volte in un intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, la serie definita dalla formula (2.3) è convergente per ogni x in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$?

Anche la risposta a questa domanda è no.

Esempio 2.24. Si veda l'esempio 3)

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

In questo caso, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ è una funzione regolare su $\mathbb{R}$, ma il raggio di convergenza della serie di Mac Laurin è 1.

Può quindi capitare che il raggio di convergenza non sia il più grande possibile. Ma anche se fosse giusto il raggio di convergenza, la somma potrebbe non essere la funzione f, ovvero anche per la domanda 2) non ci sono buone notizie:

Esempio 2.25. La funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

è derivabile infinite volte in $\mathbb{R}$ e inoltre $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni k. La serie di Mac Laurin di $f(x)$ è nulla, quindi convergente. Tuttavia $f(x)$ non coincide con la somma della sua serie di Mac Laurin a meno che $x = 0$.

Tuttavia se la funzione f ha derivate che non crescono troppo rapidamente, allora la sviluppabilità è garantita.

Teorema 2.26 (Sviluppabilità in serie di Taylor). *Se la funzione $f(x)$ è derivabile infinite volte in un intervallo (a,b) e se esistono due numeri reali L, M tali che*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M\, L^n \qquad \forall x \in (a,b), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

allora per ogni $x_0 \in (a,b)$ la funzione $f(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor centrata in x_0 nell'intervallo (a,b).

Dimostrazione. Basta ricordare la formula di Taylor con resto di Lagrange (2.2) e far vedere che il resto di Lagrange tende a 0 per $n \to +\infty$. □

Da questo Teorema ricaviamo che sono sviluppabili in serie di Mac Laurin anche le funzioni e^x, $\sin x$, $\cos x$ in ogni intervallo che contiene l'origine.

Esempio 2.27. Sia $f(x) = e^x$. Si ha $f^{(k)}(x) = e^x$ e quindi la serie esponenziale è

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Questa ha raggio di convergenza infinito (come già visto nell'esempio 1.27). Inoltre

$$|f^{(k)}(x)| = e^x \leq e^A \qquad \forall x \in [-A, A]$$

quindi per il Teorema 2.26 con $L = 1$ e $M = e^A$ si ha che la somma di tale serie nell'intervallo $[-A, A]$ è e^x. Per l'arbitrarietà di $A > 0$ si ha

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esempio 2.28. Sia $f(x) = \sin x$. Si ha $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x$ e $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x$ e quindi lo sviluppo in serie è

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Questa serie ha raggio di convergenza infinito e inoltre

$$|f^{(k)}(x)| \leq 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

quindi per il Teorema 2.26 con $L = M = 1$ si ha che la somma di tale serie su $\mathbb{R}$ è $\sin x$, ovvero

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Con considerazioni analoghe,

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ricordiamo che la somma di una serie di potenze è sviluppabile in serie di Taylor con stesso centro in tutto l'intervallo di convergenza della serie. Quindi altri esempi di funzioni sviluppabili sono quelli della precedente sezione.

Inoltre se f è sviluppabile, allora g definita da $g(x) = f(\alpha x^k)$ è ancora sviluppabile e la serie di Taylor di g si ottiene da quella di f sostituendo x con αx^k. Con la stessa sostituzione si tratta l'intervallo di sviluppabilità.

Infine lo sviluppo di una derivata o di una primitiva di f si ottengono derivando e integrando lo sviluppo di f.

Un'ulteriore applicazione degli sviluppi è nel calcolo approssimato degli integrali.

Esempio 2.29. Approssimare $\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ a meno di 10^{-6}. Nella serie esponenziale, che ha raggio di convergenza infinito, poniamo $x = -t^2$. Abbiamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-t^2}\,dt &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-t^2)^n}{n!}\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\,n!} \simeq \sum_{n=0}^{8} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\,n!} = 0.74682\end{aligned}$$

Abbiamo considerato solo 9 termini, perché la somma della serie, che è di Leibniz, è approssimata dalla ridotta a meno del primo termine non considerato, quindi il valore esatto dell'integrale si approssima con $\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\,n!}$ a meno di

$$\frac{1}{(2N+1)\,N!} < 10^{-6} \quad \text{per} \quad N = 9.$$

4. Esercizi

1) Studiare la convergenza puntuale di

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (\log x)^n; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2^n x)}{6^n}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{2+nx}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^n$$

2) Sia

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^2\, e^{-n^3 x^3}$$

Determinare il dominio di f e verificare che f è continua in $[0, +\infty)$. Dire se f è derivabile nell'intervallo $[2, 5]$.

3) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n\,x^2}}{n}.$$

Determinare il dominio di f. Dire se f è continua e derivabile nel suo dominio.

4) Determinare il raggio di convergenza e l'intervallo di convergenza delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^n}(x-2)^n; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n+1}\, x^n; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n^2\,(x+1)^n; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\,(2x-1)^n.$$

5) Calcolare la somma di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\,\frac{1}{n!\,2^n}; \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\frac{1}{3^n}; \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)\,2^n}; \qquad \sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{1}{n\,2^{2n}}.$$

6) Sviluppare in serie di Taylor centrata nell'origine, specificando l'intervallo di convergenza,

$$\log(1+(2x)^2); \qquad \sqrt{1+x}; \qquad x\,\cos x; \qquad \frac{1}{3+x^2}; \qquad \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Riferimenti bibliografici

[1] R. A. Adams. *Calcolo Differenziale vol. 1 e 2*. CEA, Milano, 2003.

[2] P. Marcellini e C. Sbordone. *Istituzioni di matematica e applicazioni*. Liguori, Napoli, 1985.

[3] A. Bacciotti e F. Ricci. *Analisi matematica, vol. 1*. Liguori, Napoli, 1994.

[4] C. D. Pagani e S. Salsa. *Analisi Matematica, vol. 1 e 2*. Zanichelli, Bologna, 1990.

[5] F. Parodi e T. Zolezzi. *Appunti di Analisi Matematica*. ECIG, Genova, 2002.

[6] C. D. Pagani e S. Salsa M. Bramanti. *Matematica. Calcolo infinitesimale e Algebra lineare*. Zanichelli, Bologna, 2004.