

Compito di Esame

1. Sia dato un sistema di coordinate ortogonali monometrico nel piano e si considerino i vettori $u_1 = (-1, -3)$, $u_2 = (-2, -6)$, $u_3 = (0, 1)$.

a) Calcolare $u_1 \cdot u_2$.

b) È vero che in questo caso $u_1 \cdot u_2 = |u_1||u_2|$? E perchè?

c) Sia $F = (u_1, u_3)$. Calcolare M_F^E e M_E^F .

2. Siano dati i due vettori $u_1 = (1, -1, 1)$, $u_2 = (1, -2, 3)$.

a) Si trovi un vettore w non nullo parallelo a u_2 e di lunghezza $16\sqrt{14}$.

b) Si trovi un vettore v non nullo ortogonale ad entrambi.

3. Dato il parametro $a \in \mathbb{Q}$ ed il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + az = 0 \\ x + ay + 2z = 0 \\ ax + y + 2z = 0 \end{cases}$$

nelle incognite x, y, z , si trovi una descrizione dell'insieme delle soluzioni al variare di a .

4. Sia $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ e sia I la matrice identica.

a) Dimostrare che se $A^3 = 0$ allora $I + A$ e $I - A + A^2$ sono una l'inversa dell'altra.

b) È vero che se esiste un numero naturale k tale che $A^k = 0$ allora $I + A$ è invertibile?

c) È sempre vero che una matrice di tipo $I + A$ è invertibile?

5. Calcolare l'inversa della matrice

$$\begin{pmatrix} 5/3 & 0 & 3/2 & 1 \\ -2/3 & -3 & -1/2 & -1 \\ 1/2 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1/4 & -1 & -3/2 \end{pmatrix}$$