

Compito di Esame

1. Si considerino le forme quadratiche $Q_1 = xy + xz$, $Q_2 = x^2 + z^2$.
 - a) La forma Q_1 è semidefinita positiva?
 - b) La forma Q_2 è definita positiva?
 - c) È vero che $Q_1 + Q_2$ è una forma quadratica?
 - d) Esiste un cambiamento di coordinate tale che nelle nuove coordinate si abbia $Q_2 = x'^2 + y'^2$?

2. Sia data la seguente matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -9 \\ -6 & 3 & 6 \\ -9 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

- a) Determinare la forma canonica di A .
 - b) Provare che la forma Q definita da A non è definita positiva e determinare due vettori u, v di \mathbb{R}^2 tali che $Q(u) > 0$ e $Q(v) < 0$.
 - c) Esistono vettori non nulli $u \in \mathbb{R}^2$ tali che $Q(u) = 0$?
3. Sia $A \in \text{Mat}_5(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica con cinque autovalori negativi e sia Q la forma quadratica ad essa associata.
 - a) Provare che Q è definita negativa.
 - b) Se ϕ è l'endomorfismo di \mathbb{R}^5 definito da A , ossia tale che $M_{\phi(E)}^E = A$, provare che $\phi(v) = (0, 0, 0, 0, 0)$ solo se $v = (0, 0, 0, 0, 0)$.