

## COMPITO DI ESAME (2 ore)

**Esercizio 1.** Sia data la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcolare il rango di  $A$ .
- (b) Portare in forma canonica la forma quadratica  $Q$  associata a  $B = A^{\text{tr}}A$ , e mostrare le matrici di cambiamento di base.
- (c) È vero che  $Q$  è il quadrato di una forma lineare?

**Esercizio 2.** Sia data la famiglia di matrici triangolari inferiori

$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ a & a & a \end{pmatrix}$$

al variare di  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- (a) Provare che  $a, b$  sono autovalori di  $A_{a,b}$ .
- (b) Detta  $B = A_{1,1}$ , calcolare la decomposizione di Choleski di  $B^{\text{tr}}B$ .

**Esercizio 3.** Siano dati i due vettori  $u = (1, -1, 4, 0)$ ,  $v = (-1, 3, 1, 2)$ .

- (a) Provare che sono linearmente indipendenti.
- (b) Trovare una base ortonormale del sottospazio  $V$  di  $\mathbb{R}^4$  generato da  $\{u, v\}$ .