ALGEBRA LINEARE II Genova, 17 Luglio 2006

COMPITO DI ESAME (due ore e mezza)

Giustificare ogni affermazione e scrivere sul foglio quali esercizi sono stati svolti al calcolatore
Copiare nel file i risultati ottenuti al calcolatore
Stampare con il comando "File - Postscript Print Buffer"

Esercizio 1. Sia data la seguente matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Con operazioni elementari su righe e colonne trasformare A in una matrice diagonale B.

(b) Esistono vettori $u \in \mathbb{R}^2$ tali che $Q(u) = 1$?

(c) Descrivere le nuove coordinate rispetto alle quali la forma quadratica Q associata ad A ha come matrice B e fare la verifica.

Esercizio 2. Si considerino le seguenti funzioni.

$$\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{definita da} \quad \alpha(a,b,c) = (a,\ 1)$$
$$\beta : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{definita da} \quad \beta(a,b,c) = (a,\ b+2c,\ 0)$$
$$\gamma : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{definita da} \quad \gamma(a,b,c) = a^2$$

(a) Dire quali sono lineari.

(b) Trovare una funzione $\gamma : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\gamma \circ \alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ sia lineare.

Esercizio 3. Sia data la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Verificare che $B = A^T A$ è semidefinita positiva. Studiando A, si può dedurre che B non è definita positiva?

(b) Verificare che $\det(A) = 0$ e un autovalore di A è nullo. Spiegare perché i due fatti sono collegati.

(c) Trovare gli autovalori di B e dedurre (senza calcolarla) la forma canonica di B.