Correzione dell'esercitazione guidata del 4 Novembre 2008

Esercizio 1. Trovare con il metodo di Gauss le soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Soluzione *[Lez. 05-complessita Esercizio 2]*
Svolto con CoCoA
La soluzione è $(-11/5, 131/35, -26/35, 81/35)$. $\square$

Esercizio 2. Siano date le seguenti matrici elementari in $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Dare una stima del numero di moltiplicazioni di numeri reali necessarie per il calcolo del prodotto $E_1 \cdot \ldots \cdot E_5$;

(b) Calcolare il prodotto $A = E_1 \cdot \ldots \cdot E_5$;

(c) Calcolare l'inversa di A.

Soluzione

(a) *[Lez. 05-complessita Esercizio 1]*
Il numero di moltiplicazioni di numeri per moltiplicare per una matrice elementare di somma o di prodotto e' (al più) 3, mentre non servono moltiplicazioni di numeri per moltiplicare per una matrice elementare di scambio.

Considero questi passi per calcolare $E_1 \cdot (E_2 \cdot (E_3 \cdot (E_4 \cdot E_5)))$:

- $A_4 := E_4 \cdot E_5$: 3 moltiplicazioni
- $A_3 := E_3 \cdot A_4$: 0 moltiplicazioni
- $A_2 := E_2 \cdot A_3$: 3 moltiplicazioni
- $A := E_1 \cdot A_3$: 3 moltiplicazioni

Quindi sono necessarie al più $3 + 3 + 3 = 9$ moltiplicazioni di numeri.

Posso anche osservare che il coefficiente di moltiplicazione in E_2 è 1, quindi non sono necessarie moltiplicazioni per calcolare $A_2 := E_2 \cdot A_3$, quindi sono necessarie al più 6 moltiplicazioni.

(b) Seguendo i passi elencati al punto precedente svolgo i calcoli:

- $A_4 := E_4 \cdot E_5$: somma $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $A_3 := E_3 \cdot A_4$: scambio $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $A_2 := E_2 \cdot A_3:$ somma $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $A := E_1 \cdot A_3:$ prodotto $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) *[Lez. 04-Elementari: Inversa di un prodotto]*
L'inversa di un prodotto è il prodotto delle inverse dei fattori in ordine contrario. Trovo le inverse dei fattori

$$Inv_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Inv_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Inv_3 = E_3$$

$$Inv_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Inv_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} B &= Inv_5 \cdot Inv_4 \cdot Inv_3 \cdot Inv_2 \cdot Inv_1 = \\ &= Inv_5 \cdot Inv_4 \cdot Inv_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= Inv_5 \cdot Inv_4 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1/5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= Inv_5 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1/5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3/5 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1/5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Verificato con CoCoA: $A \cdot B = I$.

□

Esercizio 3. Sia $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ e sia I la matrice identica.

(a) Dimostrare che se $A^2 = 0$ allora $I + A$ e $I - A$ sono una l'inversa dell'altra.

(b) È vero che se esiste un numero naturale k tale che $A^{2k} = 0$ allora $I + A^k$ è invertibile?

Soluzione *[Lez. 03-OperazioniMat Esercizio 1]*

(a) Calcolo il prodotto e verifico che risulti la matrice identica:

$$\begin{aligned} (I + A) \cdot (I - A) &= I \cdot (I - A) + A \cdot (I - A) \text{ per la proprietà distributiva} \\ &= (I - A) + A \cdot I - A \cdot A \text{ per la proprietà distributiva} \\ &= I - A + A - A^2 \quad = \quad I \end{aligned}$$

(b) Sia $B = A^k$. Allora $B^2 = A^{2k} = 0$ e dal punto precedente abbiamo che esiste l'inversa di $1 + B$ (che è $1 - B$). Quindi $I + A^k$ è invertibile.

□