ALGEBRA LINEARE II

Genova, 4 Luglio 2005

Compito di Esame

1. Sia data la seguente matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & -31 \end{pmatrix}$$

   a) Con operazioni elementari su righe e colonne trasformare A in una matrice diagonale B.
   b) Sia Q la forma quadratica associata ad A. Trovare due vettori u, v di $\mathbb{R}^2$ tali che $Q(u) > 0$ e $Q(v) < 0$.
   c) Trovare un vettore non nullo $u \in \mathbb{R}^2$ tale che $Q(u) = 0$

2. Sia data la seguente famiglia di matrici

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3a \\ 2 & 5 & -1 \\ a^2 & -1 & 148a \end{pmatrix}$$

   a) Provare che esiste un valore di a per cui A_a è definita positiva.
   b) In tale caso calcolare la decomposizione di Choleski.

3. Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$M^E_{\varphi(E)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5/2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Trovare una base dello spazio vettoriale $V = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(v) = 0\}$.
   b) Dire se φ è semplice (ossia se $M^E_{\varphi(E)}$ è diagonalizzabile).