

## COMPITO DI ESAME (due ore e mezza)

Giustificare ogni affermazione e scrivere sul foglio quali esercizi sono stati svolti al calcolatore

Copiare nel file i risultati ottenuti al calcolatore

Stampare con il comando "File - Postscript Print Buffer"

**Esercizio 1.** Si considerino le seguenti forme quadratiche reali nelle due variabili  $x, y$ .

$$Q_1(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2$$

$$Q_2(x, y) = x^2 + 4xy + 5y^2$$

$$Q_3(x, y) = x^2 + 4xy + 3y^2$$

- Dire quali sono definite positive.
- Dire quali sono semidefinite positive.
- Per ognuna delle tre forme esibire, se esiste, un vettore non nullo  $u$  tale che  $Q(u) = 0$ .

**Esercizio 2.** Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calcolare la pseudoinversa di  $A$ .
- Risolvere il problema dei minimi quadrati relativo al vettore  $v = (1, 0, 1, 0)$  e alla matrice  $A$ .

**Esercizio 3.** Sia data la famiglia di forme quadratiche descritte dalle matrici

$$M_{Q_a}^E = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Esistono valori di  $a \in \mathbb{R}$ , per cui la forma  $Q_a$  è definita positiva?
- Trovare il minimo valore intero di  $a$  per cui sia valida la disuguaglianza  $\det(A_a) > 10^{66}$ .

**Esercizio 4.** Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Utilizzando la diagonalizzazione di  $A$ , si calcoli  $A^{100}$ .