ALGEBRA LINEARE II Genova, 18 Settembre 2006

COMPITO DI ESAME – SOLUZIONI

Esercizio 1. Sia E l'insieme delle matrici in $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$, della forma

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & a_2 \\ a_3 & 0 & a_4 \\ a_5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Ci sono matrici ortonormali in E?

(b) È vero che in E ci sono infinite matrici simmetriche?

Soluzione

(a) Considero i vettori colonna $v_1 = (a_1, a_3, a_5)$, $v_2 = (1, 0, 0)$, $v_3 = (a_2, a_4, 1)$. Una matrice è ortonormale se i vettori colonna sono a due a due ortogonali e sono di lunghezza 1.
Impongo l'ortogonalità $v_1 \perp v_2$, $v_1 \perp v_3$ e $v_2 \perp v_3$:

$$\begin{cases} a_1 & = & 0 \\ a_1 \cdot a_2 + a_3 \cdot a_4 + a_5 & = & 0 \\ a_2 & = & 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema ottengo che le matrici ortogonali E sono quelle del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & a_4 \\ a_5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad a_3 \cdot a_4 + a_5 = 0$$

Impongo che il terzo vettore colonna sia di lunghezza 1: $a_4^2 + 1 = 1$, quindi si ottiene $a_4 = 0$, da cui segue $a_5 = 0$. Quindi in E esiste una sola matrice ortonormale: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Una matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ è simmetrica se per ogni i e j in $1 \dots n$ si ha $a_{ij} = a_{ji}$.
Impongo la simmetria:

$$\begin{cases} a_3 & = & 1 \\ a_5 - a_2 & = & 0 \\ a_4 & = & 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema lineare ottengo che le matrici simmetriche in E sono quelle del tipo

$$\begin{pmatrix} t & 1 & s \\ 1 & 0 & 0 \\ s & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

al variare dei parametri t, s in $\mathbb{R}$, quindi ci sono infinite matrici simmetriche.

□

Esercizio 2. Sia data la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

e sia Q la forma quadratica associata a $B = A^{\mathrm{tr}} A$.

(a) Calcolare il rango di A.

(b) Trovare un vettore $v \neq 0$ tale che $Q(v) = 0$.

(c) Portare in forma canonica B e mostrare la matrice di cambiamento di base.

Soluzione

(a) La riduzione di Gauss preserva il rango della matrice, quindi riduco A. Trovo che la matrice risultante ha una riga nulla e due non nulle, quindi il rango è ≤ 2, e che il determinante della sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, di ordine 2, è non nullo, quindi A ha rango 2.

(b) Calcolo la forma diagonale di B (CoCoA) e trovo la base F, data da M_F^E, in cui la forma quadratica Q non ha termini misti:

$$Q'(x', y', z') = 17x'^2 + 132/17 y'^2$$

In questa base trovo un vettore v che annulla Q' e poi calcolo le coordinate di v nel sistema originario: $M_v^F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $M_v^E = M_F^E M_v^F = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Nel punto precedente ho calcolato una forma diagonale di B: $D = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 132/17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, quindi la forma canonica è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Mostro in CoCoA la matrice di cambiamento di base.

□

Esercizio 3. Si consideri la trasformazione lineare φ di $\mathbb{R}^3$ in se stesso, data dalla matrice

$$M^E_{\varphi(E)} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & -12 & -20 \\ 2 & -13 & -10 \\ 57 & 81 & 86 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare gli autovalori di $M^E_{\varphi(E)}$.

(b) Trovare, se esiste, un vettore v non nullo tale che $\varphi(v) = -v$.

Soluzione

(a) (con CoCoA) Gli autovalori sono -1, 3, 8.

(b) Un vettore v non nullo tale che $\varphi(v) = -v$ esiste perché -1 è un autovalore.
(Cerco un autovettore con CoCoA)
Il vettore $v = (1/2, -3/2, 1)$ è tale che $\varphi(v) = -v$.

$\square$