ALGEBRA LINEARE I — Genova, 4 Novembre 2008

Esercitazione guidata (2 ore)

Giustificare ogni affermazione e scrivere sul foglio quali esercizi sono stati svolti al calcolatore
Copiare nel file i risultati ottenuti al calcolatore
Stampare con il comando "File - Postscript Print Buffer"

Esercizio 1. Trovare con il metodo di Gauss le soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Siano date le seguenti matrici elementari in $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Dare una stima del numero di moltiplicazioni di numeri reali necessarie per il calcolo del prodotto $E_1 \cdot \ldots \cdot E_5$;

(b) Calcolare il prodotto $A = E_1 \cdot \ldots \cdot E_5$;

(c) Calcolare l'inversa di A.

Esercizio 3. Sia $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ e sia I la matrice identica.

(a) Dimostrare che se $A^2 = 0$ allora $I + A$ e $I - A$ sono una l'inversa dell'altra.

(b) È vero che se esiste un numero naturale k tale che $A^{2k} = 0$ allora $I + A^k$ è invertibile?