INTRODUZIONE A MATLAB

GEOMETRIA PER ING.BIOMEDICA A.A. 2015-2016

ANNA CODISPOTI Codispoti@dima.unige.it

RIASSUNTO

- Cos'è Matlab
- Comandi elementari
- Vettori
- Matrici
- Operazioni

OUTLINE

- Sistemi lineari
    - $A \in \mathrm{R}^{n \times n}$
    - $A \in \mathrm{R}^{m \times n}$
- Fattorizzazione LU
- M-file
- Esercizi

SISTEMI LINEARI

Teorema di Rouchè-Capelli

- rango(A) = rango(A|b) <=> il sistema è risolubile
- rango(A) = rango(A|b) = n => unica soluzione
- rango(A) = rango(A|b) = p < n => ∞^n-p soluzioni

RISOLUZIONE SISTEMI LINEARI

- Sostituzione
- Cramer
  - Se A è quadrata & invertibile
- Algoritmo di Gauss
  - operazioni elementari sulle righe
  - pivotizzazione (parziale o totale) -> importante quando si implementa l’algoritmo al calcolatore

A QUADRATA NON SINGOLARE

$$A \in \mathrm{R}^{nxn} \quad x \in \mathrm{R}^{n} \quad b \in \mathrm{R}^{n}$$

$$\det A \neq 0 \Rightarrow \exists!\, x \in \mathrm{R}^{n} \; t.c. \; Ax = b$$

x = inv(A)*b   x = A\b

il simbolo non è quello della divisione!!

- la soluzione è calcolata mediante l'algoritmo Gaussiano con pivot parziale
- tempo richiesto minore del calcolo dell'inversa

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

```
A=[1 1 1; 1 1 -1; 1 -1 1];
b=[3 2 2]';
det=det(A);
x=A\b;
```

controllo che il determinante sia diverso da zero

IL COMANDO RREF

Per studiare e risolvere un sistema qualunque si deve ridurre la matrice completa (A|b) si usa il comando

rref (reduced row echelon form)

rref(A)

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A QUADRATA SINGOLARE

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\ 5 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix}14\\ 14\\ 2\end{pmatrix} \quad A\in \mathrm{R}^{3\times 3} \quad b\in \mathrm{R}^{3}$$

$$\det A = 0$$

```
A=[3 4 -1; 5 2 3; 0 1 -1];
b=[14 14 2]';
rank(A)
rank([A b])
rref([A b])
```

$$\begin{pmatrix}3 & 4 & -1 & 14\\ 5 & 2 & 3 & 14\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$(x,y,z)=(2-z,2+z,z)$$

Controllo se il sistema è risolubile verificando che la matrice dei coefficienti A e la matrice completa (A|b) abbiano rango uguale

MATRICI RETTANGOLARI

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A \in \mathrm{R}^{2\times 3} \quad x \in \mathrm{R}^{3} \quad b \in \mathrm{R}^{2}$$

```
A=[1 0 1; 0 -1 0];
b=[0 1]';
rank(A)
rank([A b])
rref([A b])
```

Questo sistema è risolvibile, dal momento che il rango della matrice dei coefficienti A è uguale al rango della matrice completa (A|b)

RIASSUMENDO

A quadrata NON singolare

x= A \ b

A quadrata singolare o A m x n

rank(A)
rank([A b]
rref([A b])

- rref ci restituisce la matrix ridotta
- le soluzioni le dobbiamo scrivere noi a partire dalla matrice ridotta ottenuta

ESERCIZIO I

Studiare e risolvere, qualora sia possibile, i seguenti sistemi lineari

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

FATTORIZZAZIONE LU

$$Ax = b \quad A \in \mathbb{R}^{nxn} \quad x, b \in \mathbb{R}^{n}$$

$$\det A \neq 0 \Rightarrow \exists\, L, U \quad t.c. \quad A = LU$$

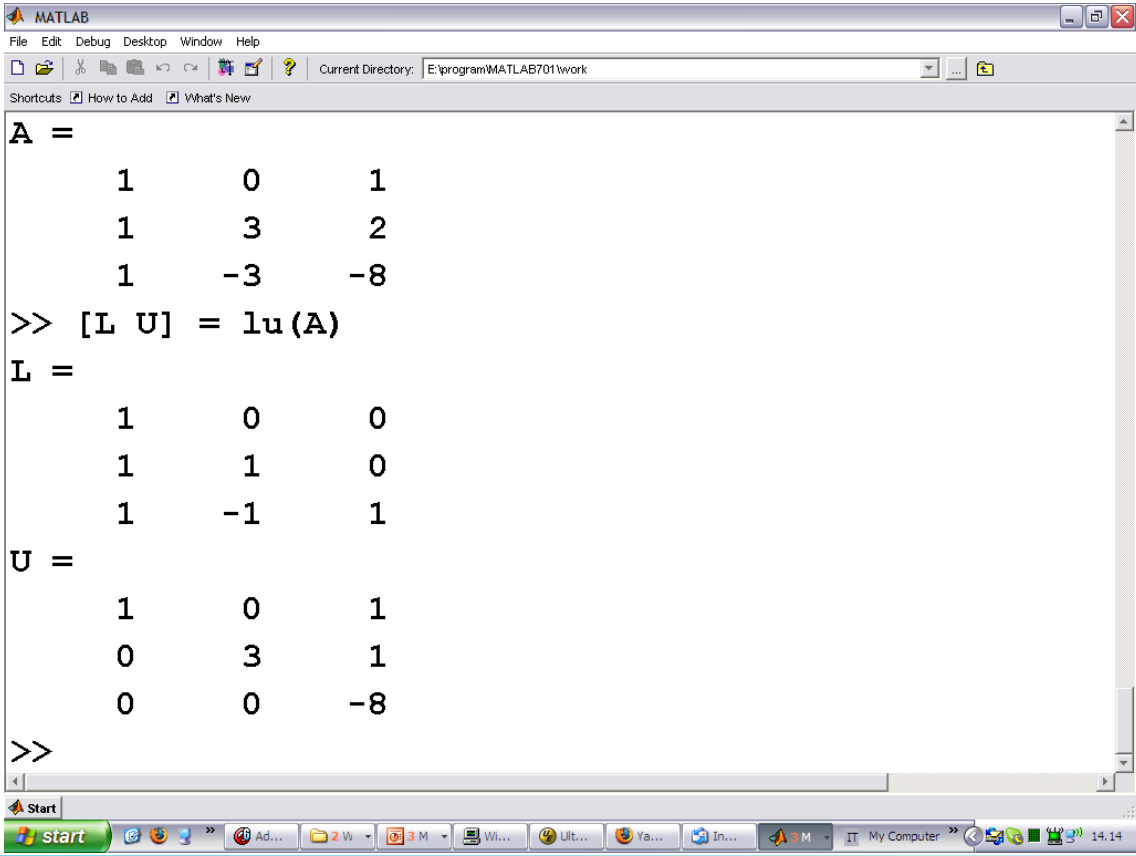
dove:

- U è la matrice triangolare superiore ottenuta da A mediante l'algoritmo di Gauss con pivotizzazione parziale
- L è una matrice quadrata invertibile e "a meno di permutazioni delle righe" è una matrice triangolare inferiore con tutti 1 sulla diagonale

FATTORIZZAZIONE LU IN MATLAB

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

```
A = [1 0 1; 1 3 2; 1 -3 -8];
det(A)
[L U] = lu(A)
```



RISOLUZIONE DI UN SISTEMA CON LU

$$A = LU \quad \Rightarrow \quad Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad LUx = b$$

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

sistema triangolare

```
[L U] = lu(A);
y = U \ b;
x = L \ y;
```

Il tempo complessivo richiesto dai tre comandi equivale a quello richiesto dall'algoritmo Gaussiano

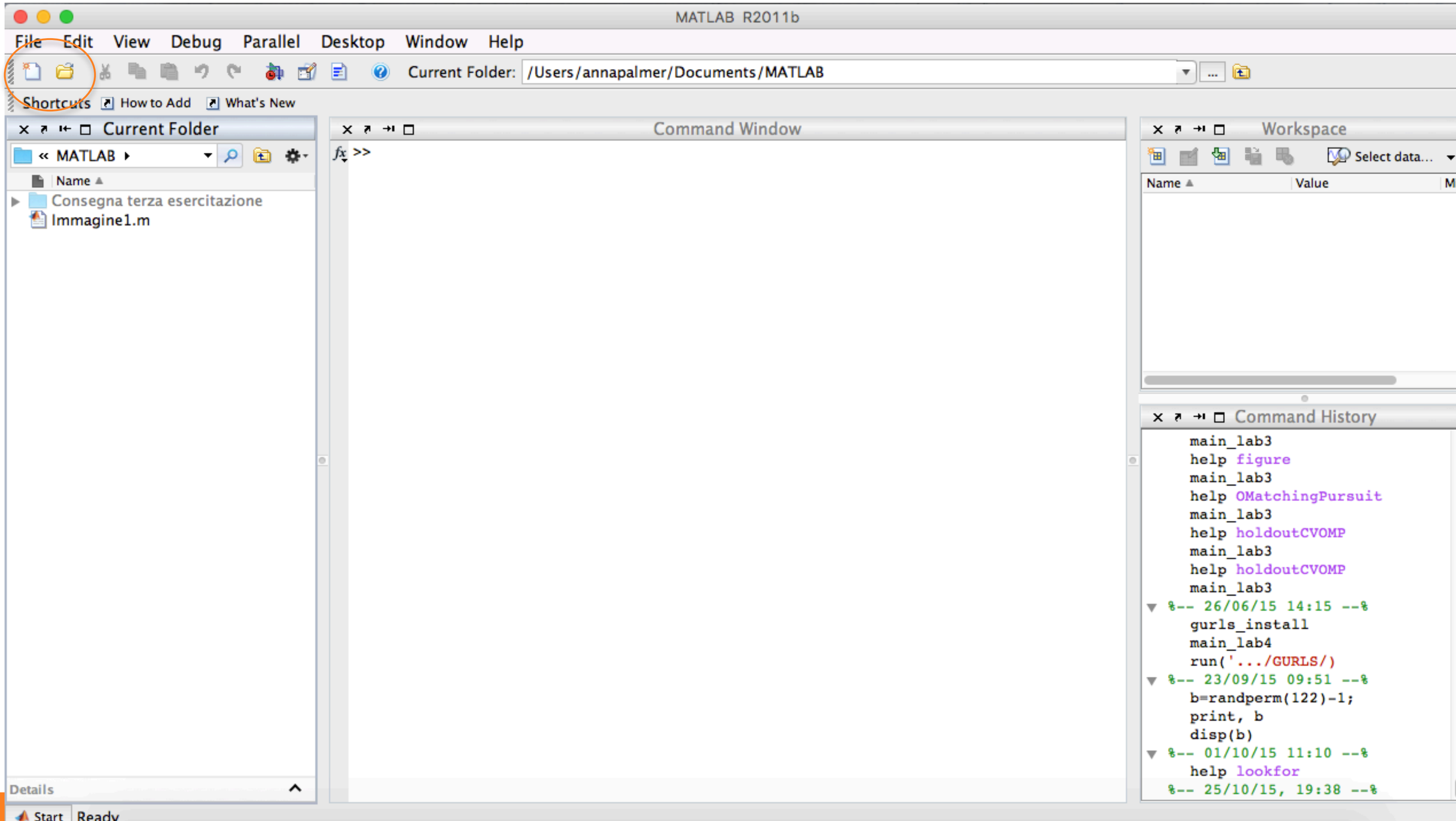
QUANDO CONVIENE LU?

$$Ax = b_i \quad i = 1,2,\ldots,k$$

Quando bisogna risolvere più sistemi con una stessa matrice dei coefficienti conviene scomporre la matrice utilizzando la fattorizzazione LU e successivamente risolvere i tre sistemi al punto precedente per i diversi vettori dei termini noti

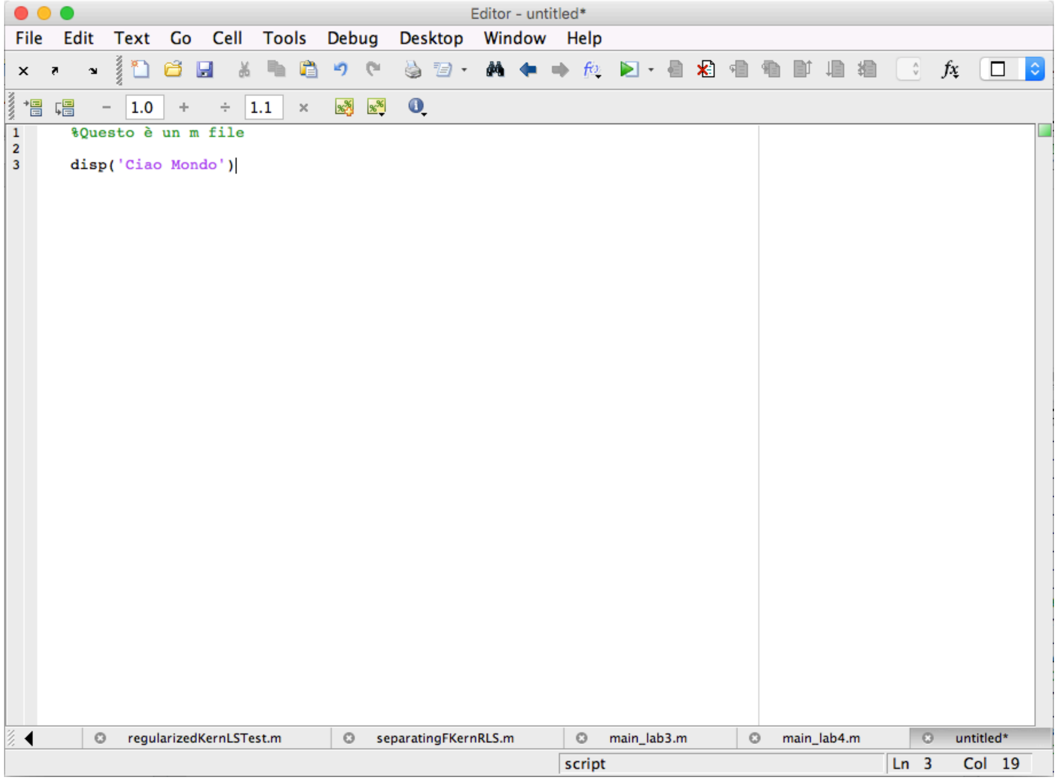
```
[L U] = lu(A)
y = U \ b_i;
x = L \ y
```

M-FILE



MATLAB R2011b
File Edit View Debug Parallel Desktop Window Help
Current Folder: /Users/annapalmer/Documents/MATLAB
Shortcuts How to Add What's New
Current Folder
« MATLAB ›
Name
Consegna terza esercitazione
Immagine1.m
Details
Command Window
>>
Workspace
Select data...
Name
Value
Min
Command History
main_lab3
help figure
main_lab3
help OMatchingPursuit
main_lab3
help holdoutCVOMP
main_lab3
help holdoutCVOMP
main_lab3
%-- 26/06/15 14:15 --%
gurls_install
main_lab4
run('.../GURLS/)
%-- 23/09/15 09:51 --%
b=randperm(122)-1;
print, b
disp(b)
%-- 01/10/15 11:10 --%
help lookfor
%-- 25/10/15, 19:38 --%
Start
Ready

EDITOR


Editor - untitled*
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
1.0
1.1
%Questo è un m file
disp('Ciao Mondo')
regularizedKernLSTest.m
separatingFKernRLS.m
main_lab3.m
main_lab4.m
untitled*
script
Ln 3
Col 19

RICHIAMARE GLI SCRIPT

Command Window

```
>> A=[3 4 -1; 5 2 3; 0 1 -1];
b=[14 14 2]';
>> prova_LU

ans =

     2


ans =

     2


ans =

     1     0     1     2
     0     1    -1     2
     0     0     0     0

>>
```

ESERCIZIO 2

Dopo essersi accertati che il sistema ammetta un'unica soluzione trovarne la soluzione con Gauss e mediante la decomposizione LU

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ESERCIZI 3 E 4

Provare a scrivere uno script per risolvere un sistema triangolare con il metodo di Cramer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Studiare il seguente sistema

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 5

Sia H la matrice di Hankel 7x7 del vettore v = (7,6,…,1) (si genera col comando hankel(v))

Costruire una matrice A 7x7 t.c.

- le prime 6 righe e 6 colonne siano tratte da H
- l'ultima colonna sia la successione 7,6,…,1
- l'ultima riga sia la successione 3*7-1,3*7-4,…1

Risolvere se possibile il sistema lineare

- Ax = b, dove b=(0 1 2 2 2 1 1)T

Scrivere le soluzioni