INTRODUZIONE A MATLAB

GEOMETRIA PER ING.BIOMEDICA A.A. 2015-2016

ANNA CODISPOTI Codispoti@dima.unige.it

OUTLINE

- Indipendenza lineare, basi, sottospazi
- Vettori ortogonali
- Autovalori, autovettori
- Esercizi vari

VETTORI L.I. I

sono linearmenti indipendenti (l.i.) se

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_m v_m = 0 \Leftrightarrow k_i = 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, m$$

Una combinazione lineare dei vettori è nulla se e solo se sono nulli tutti i coefficienti

VETTORI L.I. II

$v_1 = (a_{11} \dots a_{n1})'$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1m} \\ \ddots \\ a_{n1} \dots a_{nm} \end{pmatrix}$$

$\vdots \qquad \vdots$

$v_m = (a_{1m} \dots a_{nm})'$

$Ak = 0$ ha soluzione banale $\Leftrightarrow$ $rango(A) = m \quad (n \geq m)$

se m=n e i vettori sono l.i. => formano una base di R^n

ESEMPIO 1

Sia V = span($\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$) $\subseteq R^3$ con

$\underline{v}_1 = (1\ 0\ 2)$ $\quad \underline{v}_2 = (2\ 1\ 1)$ $\quad \underline{v}_3 = (1\ 2\ 0)$

per vedere se sono l.i.

```
v1 = [1 0 2]' ;
v2 = [2 1 1]' ;
v3 = [1 2 0]' ;
A = [v1 v2 v3]
rank(A)
```

il rango è 3 => i vettori sono l.i. e formano una base per R^3

ESEMPIO 2

Dopo aver verificato che i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono una base di R^3 esprimere $\underline{v}$ come c.l. dei $\underline{v}_i$

$$\underline{v}_1 = (1\,1\,0) \quad \underline{v}_2 = (0\,1\,1) \quad \underline{v}_3 = (1\,0\,1) \quad \underline{v} = (1\,1\,1)$$

```
v1 = [1 1 0' ]' ;
v2 = [0 1 1]' ;
v3 = [1 0 1]' ;
v = [1 1 1]' ;
A = [v1 v2 v3]
rank(A)
```

- il rango è 3 => i vettori sono l.i.
- i coefficienti lineari della combinazione si trovano:

```
k=A\v
```

$$(k_1, k_2, k_3) = (0.5,0.5,0.5)$$

RICAPITOLANDO

costruiamo la matrice *A* le cui colonne sono le componenti dei vettori

i vettori sono l.i. ⇔ $rank(A)=m$ $(m<=n)$

- se sono l.d. => i coefficienti di una loro combinazione lineare non nulla si trovano risolvendo il sistema $Ak=0$

Per esprimere un vettore *w* come c.l. dei vettori della base, si risolve il sistema $Ak=w$

$W = span(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_m)$

- $dim\ W = rank(A)$
- una base B_W di *W* è costituita dai vettori l.i. di *A*

ESERCIZIO 1

Dato W = span($\underline{w}_1$,$\underline{w}_2$,$\underline{w}_3$) $\subset$ R con:

$\underline{w}_1$=(1 1 0 4), $\underline{w}_2$=(3 1 2 0), $\underline{w}_3$=(1 1 1 1), trovare dimW

- Dimostrare che i vettori $\underline{w}_1$=(1 1 0), $\underline{w}_2$=(0 1 1), $\underline{w}_3$=(1 2 1), sono l.d. e scrivere una c.l. nulla con coefficienti non nulli (hint: usare il comando rref)

- Dopo aver dimostrato che: $\underline{w}_1$=(1 2 5), $\underline{w}_2$=(2 2 4), $\underline{w}_3$=(1 1 4), formano una base di R^3, esprimere $\underline{w}$=(3 3 3) come c.l. dei 3 vettori

VETTORI ORTOGONALI

- I vettori $v_{1\ldots}v_n$ non nulli si dicono <u>ortogonali</u> se:

$$v_i \cdot v_j = 0 \quad i \neq j \quad i, j = 1, \ldots, m$$

- I vettori non nulli si dicono <u>ortonormali</u> se sono ortogonali e inoltre

$$\|v_i\|_2 = 1 \quad i = 1, \ldots, m$$

  - Se m=n si dice che tali vettori ortonormali formano una base <u>canonica</u> (ortonormale) di R^n

MATRICI ORTOGONALI

Una matrice $A \in R^{n \times n}$ si dice ortogonale se le sue colonne formano vettori fra loro ortonormali

$$\mathrm{A} = (a_1, \ldots, a_n)$$

$$a_i \cdot a_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

- $A^T A = A A^T = I$
- le colonne (le righe) di A formano una b.c. di R^n

VETTORI ORTOGONALI IN MATLAB

Per verificare, mediante MATLAB, se 2 vettori colonna $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono ortogonali

```
v1'*v2==0
```

- Se il prodotto del vettore riga *v1'* col vettore colonna *v2* e' *0* => i vettori sono ortogonali

Per calcolare la norma di un vettore

```
norm(v)
```

AUTOVALORI E AUTOVETTORI

Data $A \in R^{n \times n}$ un numero λ (reale o complesso) si dice autovalore di A se esiste un vettore $\underline{v} \in R^{n}$:

$$A\underline{v} = \lambda \underline{v}$$

Per trovare gli autovalori e autovettori di A

ava= eig(A)

[V D] = eig(A)

ava -> vettore colonna degli autovalori di A

D -> matrice diagonale contenente gli autovalori di A

V -> matrice le cui colonne sono gli autovettori di A relativi agli autovalori in D

ESEMPIO $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

```
[V D] = eig(A)
V*V'
V'*V
```

$A \in R^{n \times n}$ **diagonalizzabile =>**

$$\exists P \in R^{n \times n} \det(P) \neq 0 : P^{-1}AP = D, D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

- esiste una base di R^n formata da autovettori di A
- A simmetrica => A diagonalizzabile
  - $\exists U \in R^{n \times n} ortogonale : U^{-1}AU = \Lambda$
  - in questo caso eig restituisce una matrice V ortogonale

ESERCIZIO 2

Data la matrice A,

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

costruire la matrice A*A'

1. dire se è diagonalizzabile
2. trovare la matrix P che la diagonalizza