

Analisi di Fourier

*Una introduzione alla teoria
e applicazioni*

Dispense A.A. 2013/2014

Prefazione

Fu agli inizi del diciannovesimo secolo che Joseph Fourier ebbe la straordinaria intuizione che ogni funzione periodica si potesse scrivere come somma di infiniti seni e coseni. Nella sua memoria *Teoria analitica del calore* (1807) affrontò e risolse il problema di diffusione del calore: trovare come varia nel tempo la temperatura di un corpo di cui è nota la temperatura iniziale ⁽¹⁾. Fourier derivò dalle leggi della fisica l'equazione differenziale del calore; nel risolvere l'equazione in casi particolari come una lamina, una sbarra, una sfera trovò gli sviluppi in serie di seni e coseni. L'affermazione di Fourier “ogni funzione definita su un intervallo limitato può essere scritta come somma di infiniti seni e coseni,” (inesatta) fu molto criticata dai grandi matematici del suo tempo come Lagrange e Laplace perchè scardinava un credo: essi erano convinti che la somma (finita o infinita) di seni e coseni dovesse necessariamente essere infinitamente differenziabile. Infatti le loro obiezioni all'affermazione di Fourier non riguardavano tanto la convergenza della serie o l'integrabilità della funzione, quanto il fatto che fosse possibile scrivere una funzione non derivabile come somma di seni e coseni. La disputa che ne scaturì era complicata dal fatto che molti concetti di base non erano ancora chiari: la nozione di somma di una serie era ancora imprecisa, e persino sul concetto di funzione vi erano opinioni diverse. Una gran parte dell'analisi matematica che si è sviluppata successivamente è stata dedicata al tentativo di rendere precise le affermazioni di Fourier.

Sebbene le affermazioni di Fourier non fossero esatte e le argomentazioni non rigorose, le sue idee e la sua intuizione furono molto profonde e precorsero di decenni lo sviluppo della teoria. Oggi l'analisi di Fourier è uno strumento potente e usato largamente in matematica, fisica, ingegneria, chimica, astronomia, geofisica.

Queste note sono organizzate come segue: nel primo capitolo studiamo le serie di Fourier e ne mostriamo alcune applicazioni alle equazioni differenziali. Il Capitolo II è dedicato all'integrale di Fourier per le funzioni assolutamente integrabili e per le funzioni di quadrato sommabile su \mathbb{R} . Nel Capitolo III studiamo la trasformata di Fourier discreta e della Fast Fourier Transform, un algoritmo per il calcolo efficiente della trasformata di Fourier. L'esistenza di questo algoritmo ha esteso enormemente l'uso della trasformata di Fourier negli ultimi 30 anni. Infine il Capitolo IV è dedicato ad una introduzione all'analisi in tempo frequenza e alla trasformata di Gabor (1946).

Queste dispense sono una versione estesa delle lezioni del corso *Analisi di Fourier* per la laurea magistrale del corso di laurea in matematica, presso l'Università di Genova. Si assume che lo studente abbia familiarità con il programma della prima

parte di *Istituzioni di Analisi Superiore*.

Gli esercizi sono alla fine di ogni capitolo, quelli contrassegnati con uno o più asterischi sono più difficili. Alcune dimostrazioni sono lasciate per esercizio e generalmente viene indicato l'esercizio relativo.

Gli studenti sono incoraggiati a consultare altri libri, per esempio quelli contenuti nella bibliografia e quelli consigliati sulla pagina Web del corso.

Tutti i grafici sono stati realizzati con Matlab.

Capitolo I

Serie di Fourier

Regarding the researches of d'Alembert and Euler could one not add that if they knew this expansion, they made but a very imperfect use of it. They were both persuaded that an arbitrary and discontinuous function could never be resolved in series of this kind, and it does not even seem that anyone had developed a constant in cosines of multiple arcs, the first problem which I had to solve in the theory of heat.

J. Fourier 1808-9

In questo capitolo studiamo le serie di Fourier e mostriamo alcune loro applicazioni. Il capitolo è organizzato come segue: la Sezione 1 contiene notazioni e richiami sullo spazio L_T^2 delle funzioni periodiche di quadrato sommabile sull'intervallo $[0, T]$ e sulle loro serie di Fourier. Come noto, lo spazio L_T^2 è uno spazio di Hilbert e la serie di Fourier di una funzione di questo spazio altro non è che il suo sviluppo rispetto ad una particolare base ortonormale, che converge in norma. La Sezione 2 è dedicata allo spazio L_T^1 delle funzioni periodiche di periodo T assolutamente integrabili su $[0, T]$. La serie di Fourier di queste funzioni in generale non rappresenta la funzione né in senso classico (cioè come somma puntuale) né nel senso della convergenza in norma. Tuttavia, vedremo che è possibile estendere la nozione di convergenza della serie di Fourier di una funzione in L_T^1 introducendo la nozione di *nucleo di sommabilità* o *identità approssimata*. In questo modo si giunge ad una nuova rappresentazione della funzione mediante i suoi coefficienti di Fourier ed è possibile ricostruire la funzione a partire da essi.

Nella Sezione 3 dimostriamo che, se una funzione è sufficientemente regolare, è somma della sua serie di Fourier e la serie converge puntualmente; inoltre mettiamo in relazione la rapidità di convergenza della serie con la regolarità della funzione. Anche la Sezione 4 contiene dei risultati di convergenza puntuale, come il teorema sulle funzioni con discontinuità a salto e una discussione del fenomeno di Gibbs; quest'ultimo riguarda il modo in cui convergono le somme parziali delle serie di Fourier di funzioni con salto. Le ultime tre sezioni sono dedicate ad applicazioni della teoria svolta alle equazioni differenziali per l'equazione del calore su una semiretta, l'equazione di Laplace e l'equazione del calore su un filo circolare. In

questi esempi otterremo delle formule risolutive seguendo un procedimento puramente euristico, trascurando perciò tutte le questioni sull'esistenza e unicità delle soluzioni che sono state viste nel corso Equazioni Differenziali.

1. Serie di Fourier di funzioni di quadrato integrabile

Denoteremo con ℓ^p , $1 \leq p < \infty$, lo spazio delle successioni $c = (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ di numeri complessi tali che $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^p < \infty$, munito della norma

$$\|c\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Con ℓ^∞ denoteremo lo spazio delle successioni, definite su \mathbb{Z} , limitate, munito della norma

$$\|c\|_\infty = \sup |c_n|.$$

Lo spazio ℓ^p , $1 \leq p \leq \infty$, è uno spazio di Banach. Lo spazio ℓ^2 è anche uno spazio di Hilbert, con prodotto interno

$$(b, c)_{\ell^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n \overline{c_n}.$$

Denoteremo con C_T^0 lo spazio delle funzioni reali a valori complessi, periodiche di periodo T , continue su \mathbb{R} , munito della norma

$$\|f\|_{C_T^0} = \max_{[0, T]} |f(x)|.$$

Con C_T^k , $k > 0$, denoteremo lo spazio delle funzioni periodiche di periodo T , continue su \mathbb{R} con tutte le derivate fino all'ordine k , munito della norma

$$\|f\|_{C_T^k} = \max_{0 \leq j \leq k} \|\partial^j f\|_{C_T^0} = \max_{0 \leq j \leq k} \max_{[0, T]} |\partial^j f(x)|.$$

Con C_T^∞ denoteremo lo spazio delle funzioni appartenenti a C_T^k per ogni $k > 0$ (2). Un polinomio trigonometrico è una espressione della forma

$$(1.1) \quad \sum_{|k| \leq n} a_k e^{2\pi i k x / T},$$

con $n \in \mathbb{N}$; i numeri k che appaiono in (1.1) si chiamano frequenze. Il più grande intero k tale che $|a_k| + |a_{-k}| \neq 0$ è chiamato grado del polinomio. Denoteremo con \mathcal{P}_T l'insieme dei polinomi trigonometrici (1.1).

Denoteremo con L_T^p , $1 \leq p < \infty$, lo spazio delle funzioni su \mathbb{R} , periodiche di periodo T , tali che $|f|^p$ è integrabile sull'intervallo $[0, T]$, munito della norma

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

(³). Come noto dal corso di Istituzioni di Analisi Superiore, si tratta di uno spazio di Banach e L_T^2 è uno spazio di Hilbert con prodotto interno

$$(f, g) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Con L_T^∞ denoteremo lo spazio delle funzioni definite quasi ovunque su \mathbb{R} , periodiche di periodo T , essenzialmente limitate, munito della norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, T]} \text{ess}|f(x)|.$$

Gli spazi L_T^p sono invarianti per traslazioni; infatti siano $f \in L_T^p$, h un numero reale e denotiamo con τ_h la funzione $\tau_h f(x) = f(x - h)$. Si ha

$$(1.2) \quad f \in L_T^p \Leftrightarrow \tau_h f \in L_T^p, \quad \|f\|_p = \|\tau_h f\|_p.$$

(vedi Esercizio 1.1). Ci riferiremo a questa proprietà come *l'invarianza per traslazioni dello spazio L_T^p* .

La famiglia di funzioni $\{e^{\frac{2\pi}{T}inx}, n \in \mathbb{Z}\}$ è una base ortonormale di L_T^2 , cioè un sistema ortonormale completo. Dunque gli elementi della famiglia sono ortogonali a due a due, hanno norma 1 e ogni elemento dello spazio si può rappresentare in maniera unica come combinazione lineare infinita degli elementi della base. Denoteremo con $\hat{f} = (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ la successione dei coefficienti di Fourier di una funzione $f \in L_T^2$ rispetto a tale base:

$$(1.3) \quad \hat{f}(n) = (f, e^{\frac{2\pi}{T}inx}) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-\frac{2\pi}{T}inx} dx \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dalla teoria degli spazi di Hilbert (corso di Istituzioni di Analisi Superiore) si ha il seguente

Teorema 1.1. *Sia $f \in L_T^2$. Allora*

$$(1.4) \quad f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{\frac{2\pi}{T}inx}$$

dove la serie, detta serie di Fourier di f , converge in norma (⁴). Si ha

$$(1.5) \quad \|f\|_2 = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Inoltre, data una successione (c_n) soddisfacente la condizione $\sum_n |c_n|^2 < \infty$, esiste un'unica funzione $f \in L_T^2$ tale che $c_n = \hat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Siano infine f e $g \in L_T^2$ allora

$$(1.6) \quad \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}.$$

La relazione (1.5) si chiama *identità di Parseval*, talvolta ci si riferisce alla (1.6) col nome di *identità di Parseval polarizzata*. Dunque i coefficienti di Fourier rappresentano la funzione in modo unico perchè ci permettono di ricostruire la funzione f attraverso (e nel senso) della relazione (1.4). Questa operazione di ricostruzione viene anche detta di *sintesi*, mentre la determinazione delle funzioni elementari $\hat{f}(n)e^{\frac{2\pi}{T}inx}$, $n \in \mathbb{Z}$ viene detta di *analisi*.

Si noti che dal teorema segue subito che \mathcal{P}_T è denso in L_T^2 . Inoltre i due spazi L_T^2 e ℓ^2 sono isomorfi come spazi di Hilbert. Infatti l'applicazione $\hat{\cdot} : L_T^2 \rightarrow \ell^2$ definita da

$$\hat{f} = \left(\hat{f}(n) \right)_{n \in \mathbb{Z}}$$

chiamata *Trasformata di Fourier*, è una applicazione biunivoca che preserva la struttura lineare di L_T^2 perchè $(\alpha f + \beta g)(n) = \alpha \hat{f}(n) + \beta \hat{g}(n)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, e $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$. Inoltre preserva la struttura metrica, perchè conserva le distanze e i prodotti interni (vedi le (1.5) e (1.6)).

Osserviamo infine che la successione dei coefficienti di Fourier di una funzione L_T^2 è infinitesima per $|n| \rightarrow +\infty$. Questo risultato, che segue subito dalla identità di Parseval (1.5), viene chiamato *Teorema di Riemann-Lebesgue*.

Per semplicità d'ora in poi fisseremo $T = 2\pi$. I risultati che otterremo si possono scrivere facilmente per un periodo generico T .

Oltre alla base ortonormale $\mathcal{E} = \{e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}\}$ di $L_{2\pi}^2$ è molto utile anche la seguente base reale

$$\mathcal{S} = \{1, \sqrt{2} \sin kx, \sqrt{2} \cos kx, \quad k \in \mathbf{N}\}.$$

La relazione fra i coefficienti di Fourier secondo le due basi è fornita nell'Esercizio 1.2 nella Sezione 9 di questo capitolo.

Interpretiamo i precedenti risultati con un esempio tratto dall'ingegneria elettrica. Un segnale elettrico periodico di periodo 2π si rappresenta mediante una funzione del tempo f periodica di periodo 2π . L'energia del segnale è rappresentata dalla norma

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Quindi i segnali 2π -periodici di energia finita sono elementi di $L_{2\pi}^2$. Lo sviluppo in serie di Fourier di un segnale di energia finita $f : f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{int}$ dove

$$(1.7) \quad \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

costituisce una rappresentazione del segnale come sovrapposizione di infiniti segnali elementari. Il termine generale della serie si chiama n -esima componente armonica di f ed è un segnale elementare, di ampiezza $|\hat{f}(n)|$, periodo $\frac{2\pi}{n}$ e di energia $|\hat{f}(n)|^2$. Si noti che la frequenza della generica armonica cresce con n .

Proposizione 1.2. *Gli spazi $L_{2\pi}^\infty$ e $L_{2\pi}^2$ sono densi in $L_{2\pi}^1$.*

Dimostrazione. Poiché $L_{2\pi}^\infty \subset L_{2\pi}^2 \subset L_{2\pi}^1$, basta provare che $L_{2\pi}^\infty$ è denso in $L_{2\pi}^1$. Sia $f \in L_{2\pi}^1$ e sia (f_n) la successione così definita

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| \leq n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si ha $\lim_n f_n(x) = f(x)$ per q.o. x . Poiché inoltre $|f_n| \leq |f|$ e $f \in L_{2\pi}^1$, per il Teorema della convergenza dominata si ha che f_n tende a f in $L_{2\pi}^1$. \square

Ricordiamo le seguenti ovvie inclusioni fra gli spazi introdotti in questa sezione

$$(1.8) \quad \mathcal{P}_{2\pi} \subset C_{2\pi}^\infty \subset C_{2\pi}^k \subset L_{2\pi}^\infty \subset L_{2\pi}^2 \subset L_{2\pi}^1$$

(⁵). Poiché $\mathcal{P}_{2\pi}$ è denso in $L_{2\pi}^2$ (Teorema 1.1), anche $C_{2\pi}^\infty$ e $C_{2\pi}^k$ sono densi in $L_{2\pi}^2$. Ne segue che gli spazi $\mathcal{P}_{2\pi}$, $C_{2\pi}^\infty$ e $C_{2\pi}^k$ sono densi anche in $L_{2\pi}^1$, perché $L_{2\pi}^2$ è denso in $L_{2\pi}^1$ e inoltre la norma in $L_{2\pi}^1$ si maggiora con la norma in $L_{2\pi}^2$. In sintesi, includendo anche le affermazioni della precedente proposizione, possiamo dire che tutti gli spazi nella (1.8) che sono a sinistra di $L_{2\pi}^2$ sono densi in $L_{2\pi}^2$, tutti gli spazi a sinistra di $L_{2\pi}^1$ sono densi in $L_{2\pi}^1$.

Concludiamo questa sezione richiamando alcuni importanti risultati, già visti nel corso di Istituzioni di Analisi Superiore, che verranno spesso richiamati in queste dispense.

Come noto, la convergenza in norma L^p , $1 \leq p < \infty$ non implica la convergenza quasi ovunque, come mostrano i seguenti due esempi

Esempio 1.1 La successione delle funzioni periodiche di periodo 1 definita da

$$f_n(x) = \sqrt{n} \chi_{[0, \frac{1}{n}]}(x) \quad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N},$$

dove $\chi_{[0, a]}$ denota la funzione caratteristica dell'intervallo $[0, a]$, converge puntualmente a zero ma non converge in L_1^2 .

Esempio 1.2 Per ogni $n \in \mathbb{N}$ siano k e $j = 0, \dots, 2^k - 1$ due interi tali che $n = 2^k + j$. Denotiamo con $I_{k,j}$ l'intervallo $[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}]$. Sia (f_n) la successione

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in I_{k,j} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora si ha $\lim_n f_n = 0$ in norma L_1^2 , ma $(f_n(x))$ non converge per nessun $x \in [0, 1]$. Alcuni dei teoremi elencati qui di seguito stabiliscono le condizioni sotto le quali la convergenza in norma L^p implica la convergenza quasi ovunque e viceversa. Qui denotiamo con $L^p(\mu)$ lo spazio delle funzioni il cui modulo ha potenza p integrabile rispetto ad una qualunque misura positiva μ .

Teorema 1.3. Se $\lim_n f_n = f$ in $L^p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, allora esiste una estratta che converge ad f quasi ovunque.

Teorema 1.4. Sia $\lim_n f_n = f$ in $L^p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$. Se esiste una funzione g tale che $\lim_n f_n = g$ μ q.o., allora f coincide con g μ q.o.

Teorema 1.5. (Teorema della convergenza dominata) Sia (f_n) una successione di funzioni di $L^1(\mu)$, tale che $\lim_n f_n = f$ μ q.o. Se esiste una funzione $h \in L^1(\mu)$ tale che $|f_n| \leq h$ per ogni n , allora $f \in L^1(\mu)$, f_n converge in norma a f e

$$(1.9) \quad \lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

Corollario 1.6. Sia (f_n) una successione di funzioni di $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, tale che $\lim_n f_n = f$ μ q.o. Se esiste una funzione $h \in L^1(\mu)$ tale che $|f_n|^p \leq h$ per ogni n , allora $\lim_n f_n = f$ in $L^p(\mu)$.

Teorema 1.7. (Teorema della convergenza dominata per serie) Sia (f_n) una successione di funzioni di $L^1(\mu)$, tale che $\sum_n f_n = f$ μ q.o. ed esista una funzione $h \in L^1(\mu)$ tale che $|\sum_{0 \leq k \leq n} f_k| \leq |h|$ μ q.o. per ogni n . Allora la serie converge a f nella norma di $L^1(\mu)$ e

$$(1.10) \quad \sum_k \int f_k d\mu = \int \sum_k f_k d\mu.$$

Teorema 1.8. Sia (g_n) una successione di funzioni di $L^1(\mu)$, tale che $\lim_n g_n = g$ in $L^1(\mu)$. Allora

$$(1.11) \quad \lim_n \int g_n d\mu = \int g d\mu$$

Teorema 1.9. Sia (f_n) una successione di funzioni di $L^1(\mu)$, tale che $\sum_{n=0}^n f_n = f$ in $L^1(\mu)$. Allora

$$(1.12) \quad \lim_n \int \sum_{k=0}^n f_k d\mu = \int f d\mu$$

N.B. La tesi si può scrivere anche

$$(1.13) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \int f_k d\mu = \int \sum_{k=0}^{\infty} f_k d\mu$$

2. Serie di Fourier di funzioni assolutamente integrabili

In questa sezione ci occuperemo delle serie di Fourier delle funzioni assolutamente integrabili. Se una funzione f è in $L^1_{2\pi}$, l'integrale in (1.7) è finito e quindi ha senso scrivere, almeno formalmente, la sua *serie di Fourier*

$$(2.1) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}.$$

Mentre la serie di Fourier di una funzione di $L^2_{2\pi}$ converge in norma (Teorema 1.1) e, come vedremo, anche quasi ovunque (Teorema 3.4), la serie di Fourier di una funzione di $L^1_{2\pi}$ in generale non converge né in norma né quasi ovunque. Infatti il suo comportamento può essere pessimo: A. N. Kolmogorov nel 1926 trovò una funzione assolutamente integrabile la cui serie di Fourier non converge in nessun punto.

In questa sezione mostriamo che se una funzione f è in $L^1_{2\pi}$, allora è determinata univocamente dai suoi coefficienti di Fourier ($\hat{f}(n)$); inoltre mostriamo come si può ricostruire f a partire da ($\hat{f}(n)$).

Il seguente teorema stabilisce alcune proprietà della trasformata di Fourier; la dimostrazione viene lasciata per esercizio.

Teorema 2.1. *Siano f e $g \in L^1_{2\pi}$ e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$*

$$(i) \quad \widehat{(\alpha f + \beta g)}(n) = \alpha \hat{f}(n) + \beta \hat{g}(n)$$

$$(ii) \quad \widehat{\tau_h f}(n) = e^{-inh} \hat{f}(n)$$

$$(iii) \quad \widehat{\bar{f}}(n) = \overline{\hat{f}(-n)}$$

$$(iv) \quad |\hat{f}(n)| \leq \|f\|_1 \text{ per ogni } n \in \mathbb{Z}.$$

Osservazione 2.1 La proprietà (ii) mostra che una traslazione della funzione ha per effetto la moltiplicazione di ($\hat{f}(n)$) per la successione (e^{-inh}) avente modulo 1. La proprietà (iii) mostra la relazione fra trasformata di Fourier e coniugazione: a meno di una riflessione, le due operazioni commutano. La proprietà (iv) mostra che la trasformata di una funzione $L^1_{2\pi}$ è una successione limitata. In realtà è infinitesima, come mostra il seguente

Teorema 2.2. *(Teorema di Riemann-Lebesgue) Se $f \in L^1_{2\pi}$ allora ($\hat{f}(n)$) è infinitesima per $|n| \rightarrow \infty$.*

Dimostrazione. Poiché la tesi vale per le funzioni di $L^2_{2\pi}$, proveremo il teorema sfruttando la densità di $L^2_{2\pi}$ in $L^1_{2\pi}$ (vedi Proposizione 1.2). Sia dunque $f \in L^1_{2\pi}$; fissato $\epsilon > 0$, esiste un elemento di $L^2_{2\pi}$, sia esso g_ϵ , tale che

$$\|f - g_\epsilon\|_1 < \frac{\epsilon}{2}.$$

D'altra parte, poichè g_ϵ è di quadrato integrabile, la successione $(\hat{g}_\epsilon(n))$ è infinitesima, e quindi esiste un indice ν tale che $|\hat{g}_\epsilon(n)| < \frac{\epsilon}{2}$ per ogni $n > \nu$. Dalla relazione

$$|\hat{f}(n)| \leq |\hat{f}(n) - \hat{g}_\epsilon(n)| + |\hat{g}_\epsilon(n)|$$

usando il Teorema 2.1 possiamo concludere che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un indice ν tale che per ogni $n > \nu$ si ha $|\hat{f}(n)| \leq \|f - g_\epsilon\|_1 + |\hat{g}_\epsilon(n)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Il ragionamento per n tendente a $-\infty$ è identico. \square

Nel seguito denoteremo con $S_n f(x)$ la somma parziale n -esima della serie di Fourier di f : $S_n f(x) = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) e^{ikx}$. Nei due esempi seguenti introduciamo due polinomi trigonometrici utili nel seguito: il nucleo di Dirichlet e il nucleo di Fejèr.

Esempio 2.1 La funzione

$$(2.2) \quad D_n(x) = \sum_{|k| \leq n} e^{ikx}$$

si chiama *nucleo di Dirichlet*. Si noti che è una funzione pari, che la successione dei suoi coefficienti di Fourier è la funzione caratteristica su \mathbb{Z} dell'intervallo $[-n, n]$, e che

$$\widehat{D}_n(0) = 1 \quad D_n(0) = 2n + 1$$

per ogni n . Quindi D_n ha media 1 per ogni n . Inoltre si ha la seguente espressione di D_n in "forma chiusa"

$$(2.3) \quad D_n(x) = \frac{\sin[(2n+1)x/2]}{\sin(x/2)} \quad x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Infine per $f \in L^1_{2\pi}(\mathbf{R})$ vale la seguente formula

$$(2.4) \quad S_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(y) f(x-y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-y) f(y) dy,$$

detta *rappresentazione integrale della somma parziale mediante il nucleo di Dirichlet*. La dimostrazione delle formule (2.3) e (2.4) è assegnata per esercizio (Esercizio 1.10, Sezione 9 del Capitolo 1).

Esempio 2.2 La funzione

$$(2.5) \quad F_n(x) = \sum_{|k| \leq n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikx}$$

si chiama *nucleo di Fejèr*. Si noti: è una funzione pari ed ha media 1. Si ha

$$(2.6) \quad F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x).$$

$$(2.7) \quad F_n(x) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin[(n+1)x/2]}{\sin(x/2)} \right)^2.$$

$x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. La dimostrazione di queste due formule è assegnata come esercizio (Esercizio 1.11 della Sezione 9, Capitolo 1).

Esempio 2.3 (Nucleo di Poisson) Sia $0 < r < 1$ la serie

$$(2.8) \quad P_r(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|k|} e^{ikx}$$

converge uniformemente perchè converge totalmente. Usando il teorema di derivazione termine a termine si ottiene che P_r è in $C_{2\pi}^{\infty}(\mathbb{R})$. Si noti inoltre che P_r è pari e che ha media uguale ad 1. La funzione può essere scritta “in forma chiusa” nel modo seguente (Sezione 9 del Capitolo 1).

$$(2.9) \quad P_r(x) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(x)}.$$

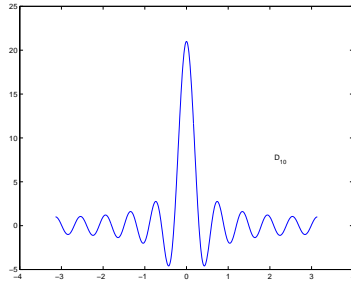


Figura 1 Il nucleo di Dirichlet D_{10} .

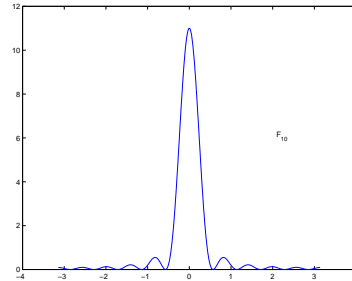


Figura 2 Il nucleo di Fejèr F_{10}

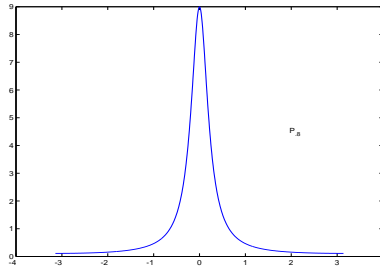


Figura 3 Il nucleo di Poisson.

Il prodotto di convoluzione in $L^1_{2\pi}$.

Abbiamo visto che la somma parziale ennesima della serie di Fourier di una funzione di $L^1_{2\pi}$ può essere rappresentata in forma integrale mediante il nucleo di Dirichlet (2.4). Possiamo pensare a questa rappresentazione come a un “prodotto” delle funzioni D_n ed f . Questo prodotto, detto “prodotto di convoluzione”, gioca un ruolo importante nello studio degli operatori lineari che commutano con le traslazioni, come ad esempio gli operatori di derivazione o, più in generale, gli operatori differenziali a coefficienti costanti.

Definizione 2.1 *Siano f e $g \in L^1_{2\pi}$. La funzione definita dalla relazione*

$$(2.10) \quad f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y)g(x-y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y)g(y) dy$$

si chiama prodotto di convoluzione fra f e g .

Teorema 2.3. *Siano f e $g \in L^1_{2\pi}$ allora $f * g \in L^1_{2\pi}$ e si ha*

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &\leq \|f\|_1 \|g\|_1 \\ \widehat{(f * g)}(n) &= \hat{f}(n) \hat{g}(n) \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Denotiamo con I l'integrale doppio

$$I = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x-y)g(y)| dx dy.$$

Si vede subito che uno dei due integrali iterati è finito:

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |f(x-y)g(y)| dx \right) dy = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} |g(y)| \left(\int_0^{2\pi} |f(x-y)| dx \right) dy$$

e quindi

$$(2.11) \quad \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |f(x-y)g(y)| dx \right) dy = \|f\|_1 \|g\|_1$$

Allora per i Teoremi di Fubini e Tonelli anche I è finito ed è uguale ai due integrali iterati; in particolare si ha

$$(2.12) \quad I = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |f(x-y)g(y)| dy \right) dx < \infty$$

da cui segue che la funzione $y \mapsto f(x-y)g(y)$ è assolutamente integrabile, e quindi integrabile, per q.o. $x \in [0, 2\pi]$. Abbiamo così provato che il prodotto $f * g$ ha senso per q.o. $x \in [0, 2\pi]$. Dalle formule (2.12) (2.11) si ha anche che $f * g$ è in $L^1_{2\pi}$,

inoltre

$$\frac{1}{(2\pi)} \int_0^{2\pi} |f * g(x)| dx = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(y)g(x-y) dy \right| dx \leq I = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Moltiplicando e dividendo per e^{-iny} l'integrale che esprime $\widehat{f * g}(n)$ e invertendo gli ordini di integrazione si ha

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g)}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f * g)(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(y)g(x-y) dy \right) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-iny} \left(\int_0^{2\pi} g(x-y) e^{-in(x-y)} dx \right) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\int_0^{2\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) \left(\int_0^{2\pi} g(z) e^{-inz} dz \right) \\ &= \hat{f}(n) \hat{g}(n). \end{aligned}$$

□

Il Teorema 2.3 permette di scrivere la serie di Fourier del prodotto $f * g$ di due funzioni in $L_{2\pi}^1$, ma in generale nulla si sa sulla convergenza di tale serie a $f * g$. Vedi inoltre la Nota ⁽⁹⁾ sul prodotto di convoluzione negli spazi di successioni.

Teorema 2.4. *Siano f, g, h in $L_{2\pi}^1$ e siano $\alpha \in \mathbb{C}$ e $s \in \mathbf{R}$. Denotiamo con $e_n, n \in \mathbf{Z}$ la funzione $x \mapsto e^{inx}$. Si ha*

- (i) $\alpha(f * g) = (\alpha f) * g = f * (\alpha g)$
- (ii) $f * (g + h) = f * g + f * h$
- (iii) $f * g = g * f$
- (iv) $(f * g) * h = f * (g * h)$
- (v) $\tau_s(f * g) = \tau_s f * g = f * \tau_s g$.
- (vi) $f * e_n = \hat{f}(n)e_n$

La dimostrazione viene lasciata per esercizio. Si noti: le prime quattro proprietà mostrano che $L_{2\pi}^1$ è una algebra commutativa rispetto al prodotto di convoluzione.

Esercizio 2.1 Sia $f \in L_{2\pi}^1$. Scrivere la serie di Fourier della funzione $f * D_n$, e provare che si ha

$$(2.13) \quad D_n * f = S_n f.$$

Esercizio 2.2 Sia $f \in L_{2\pi}^1$. Mostrare che la serie di Fourier della funzione $f * F_n$ è $\sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikx}$. Spiegare perchè si ha

$$(2.14) \quad F_n * f(x) = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikx}.$$

Provare infine la relazione

$$(2.15) \quad F_n * f = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n S_j f.$$

Le somme $\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n S_j f$ si chiamano *Medie di Cesaro* (della successione S_j).

Esercizio 2.3 Utilizzando il teorema della convergenza dominata provare che se $f \in L_{2\pi}^1$ allora

$$(2.16) \quad P_r * f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) r^{|k|} e^{ikx}.$$

Abbiamo visto che $L_{2\pi}^1$ è una algebra commutativa rispetto al prodotto di convoluzione. Dal Teorema 2.3 segue che non esiste l'identità del prodotto di convoluzione in $L_{2\pi}^1$. Infatti, se esistesse una funzione $\delta \in L_{2\pi}^1$ tale che $\delta * f = f$ per ogni $f \in L_{2\pi}^1$, per ogni f si avrebbe $\hat{\delta}(n) \hat{f}(n) = \hat{f}(n)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. E quindi $\hat{\delta}(n) = 1$ per ogni n ; ma questo contrasta con il Teorema di Riemann Lebesgue. In questa sezione mostreremo tuttavia che si possono facilmente trovare successioni (u_n) di funzioni di $L_{2\pi}^1$ tali che $\lim_n u_n * f = f$ in $L_{2\pi}^1$. L'idea originaria è dovuta a Fejèr; egli osservò che se una successione (s_j) converge a s , allora anche la successione

$$(2.17) \quad \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n s_j,$$

detta *successione delle medie di Cesaro* di (s_j) , converge ad s ; ma queste medie possono convergere anche se la successione originale non converge. Per esempio la successione $(s_j) = (-1)^j$ non converge, mentre la successione delle medie tende a zero perchè $|\sigma_n| \leq \frac{1}{n+1}$.

Teorema 2.5. *Sia (s_j) una successione di numeri reali convergente ad s ; allora la successione (σ_n) delle medie di Cesaro converge ad s .*

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$ fissato. Per l'ipotesi esiste un indice ν tale che per ogni $j > \nu$ si ha

$$|s_j - s| < \epsilon.$$

Per ogni $n > \nu$ si ha allora

$$\begin{aligned} |\sigma_n - s| &= \frac{1}{n+1} \left[\sum_{j=0}^n s_j - \sum_{j=0}^n s \right] \leq \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n |s_j - s| \\ &= \frac{1}{n+1} \left[\sum_{j=0}^{\nu} |s_j - s| + \sum_{j=\nu+1}^n |s_j - s| \right] \\ &\leq \frac{1}{n+1} [A + (n - \nu)\epsilon], \end{aligned}$$

dove abbiamo posto $A = \sum_{j=0}^{\nu} |s_j - s|$. E quindi abbiamo trovato che per ogni $n > \nu$ si ha

$$|\sigma_n - s| \leq \frac{A}{n+1} + \epsilon.$$

Sia ora μ un intero maggiore di $A\epsilon^{-1}$. Per $n > \mu$ si avrà $A < \epsilon\mu < \epsilon(n+1)$. Posto allora $\nu_1 = \max(\nu, \mu)$ possiamo concludere che per ogni $n > \nu_1$ si ha $|\sigma_n - s| < 2\epsilon$. Il teorema è così provato. \square

Trasferendo il risultato del precedente teorema alle serie di Fourier, si ha che se la serie delle somme parziali $(S_n f)$ converge, allora la successione di termine generale

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n S_j f$$

converge alla stessa somma, e che inoltre la successione delle medie potrebbe convergere anche se la successione $(S_n f)$ non converge. Ma questa media altro non è che il prodotto di convoluzione fra la funzione f e il nucleo di Fejèr (vedi la formula (2.15)). Dunque ci aspettiamo che $F_n * f$ si comporti meglio di $S_n f$. In effetti mostreremo che se f è assolutamente integrabile, allora $\lim_n F_n * f = f$ in norma $L_{2\pi}^1$, e che in ogni punto x in cui f è continua si ha $\lim_n F_n * f(x) = f(x)$.

In realtà il ruolo svolto dalla famiglia (F_n) non è cruciale in questa teoria. Infatti, come mostreremo, questi risultati valgono ugualmente se la famiglia (F_n) viene sostituita con una qualunque famiglia di funzioni, dette *identità approssimate*, e definite come segue.

Definizione 2.2 Una famiglia (u_n) di funzioni di $L_{2\pi}^1$ tale che

- (i) $\|u_n\|_1 \leq M, \quad M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (ii) $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(x) dx = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (iii) $\forall 0 < \delta < \pi$

$$\lim_n \int_{\delta < |x| < \pi} |u_n(x)| dx = 0$$

si chiama *identità approssimata* in $L_{2\pi}^1$.

Si noti: se le funzioni u_n sono non negative, la prima condizione è superflua. Qualche volta si considerano famiglie (u_r) dipendenti da un parametro continuo r invece del parametro discreto n . Così la famiglia P_r in (2.8) che, come vedremo, è una identità approssimata, è definita per $0 < r < 1$. In questo caso la (iii) deve essere sostituita con il limite per r che tende a 1 (vedi Esercizio 2.4 più avanti).

Osservazione 2.2 Se alla condizione (iii) si sostituisce la seguente

$$(2.18) \quad \forall 0 < \delta < \pi \quad \lim_n \sup_{\delta < |x| < \pi} |u_n(x)| = 0$$

allora si dice che (u_n) è una identità approssimata *in senso forte*.

Proposizione 2.6. *Le famiglie (F_n) e $\{P_r, 0 < r < 1\}$ sono identità approssimate in senso forte.*

Dimostrazione. La dimostrazione è assegnata per esercizio (Esercizi 1.14 e 1.15) \square

Proposizione 2.7. *La famiglia (D_n) non è una identità approssimata*

Dimostrazione. La dimostrazione consiste nel provare che $\|D_n\| \geq \frac{4}{\pi^2} \log(2n+2)$ ed è proposta come esercizio (Esercizio 1.15). \square

Nel Teorema 2.9 proviamo che se (u_n) è una famiglia di identità approssimate, allora $\lim_n u_n * f = f$ in norma. Premettiamo un lemma che mostra che la traslazione è una operazione continua in $L_{2\pi}^1$.

Lemma 2.8. *Sia $f \in L_{2\pi}^1$. Allora $\lim_{y \rightarrow 0} \|\tau_y f - f\|_1 = 0$.*

Dimostrazione. Proviamo prima la tesi per $g \in C_{2\pi}^\infty$. Per la continuità di g si ha

$$\lim_{y \rightarrow 0} (\tau_y g - g)(x) = 0, \quad |(\tau_y g - g)(x)| \leq 2 \max |g| \quad \forall x.$$

Per il teorema della convergenza dominata ne segue che $\lim_{y \rightarrow 0} \|\tau_y g - g\|_1 = 0$.

Sia ora $f \in L_{2\pi}^1$ e sia $\epsilon > 0$ fissato. Poichè $C_{2\pi}^\infty$ è denso in $L_{2\pi}^1$, esiste una funzione $g_o \in C_{2\pi}^\infty$ tale che $\|f - g_o\|_1 < \epsilon$. Aggiungendo e togliendo stesse quantità e applicando la disuguaglianza triangolare si ottiene

$$\|\tau_y f - f\|_1 \leq \|\tau_y f - \tau_y g_o\|_1 + \|\tau_y g_o - g_o\|_1 + \|f - g_o\|_1 = 2\|f - g_o\|_1 + \|\tau_y g_o - g_o\|_1.$$

Osserviamo ora che il primo addendo è minore di 2ϵ mentre l'ultimo addendo tende a zero per la prima parte della dimostrazione, possiamo concludere che esiste un δ tale che per $|y| \leq \delta$ si ha $\|\tau_y f - f\|_1 \leq 3\epsilon$. \square

Teorema 2.9. *Sia (u_n) una identità approssimata. Allora*

$$\lim_n \|u_n * f - f\|_1 = 0 \quad \forall f \in L_{2\pi}^1.$$

Dimostrazione. Per la proprietà (ii) delle identità approssimate si ha

$$\begin{aligned}
 \|u_n * f - f\|_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u_n * f(x) - f(x)| dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) u_n(y) dy - f(x) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(y) dy \right| dx \\
 &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(\tau_y f - f)(x)| |u_n(y)| dy dx \\
 &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} |u_n(y)| \left(\int_{-\pi}^{\pi} |(\tau_y f - f)(x)| dx \right) dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u_n(y)| \|\tau_y f - f\|_1 dy
 \end{aligned}$$

Sia ϵ assegnato. Per il Lemma 2.8 esiste un δ tale che $\|\tau_y f - f\|_1 < \epsilon$ per $|y| < \delta$. Usiamo tale maggiorazione nell'intervallo $[-\delta, \delta]$ dopo aver spezzato l'integrale in corrispondenza di $\pm\delta$

$$\begin{aligned}
 \|u_n * f - f\|_1 &< \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u_n(y)| \|\tau_y f - f\|_1 dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{|y| < \delta} |u_n(y)| \|\tau_y f - f\|_1 dy + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |y| < \pi} |u_n(y)| \|\tau_y f - f\|_1 dy
 \end{aligned}$$

Maggiorando $\|\tau_y f - f\|_1$ con ϵ nel primo integrale e usando la proprietà triangolare nel secondo si ha

$$\|u_n * f - f\|_1 \leq \epsilon \|u_n\|_1 + \frac{1}{2\pi} 2\|f\|_1 \int_{\delta < |y| < \pi} |u_n(y)| dy.$$

Per la proprietà (i) delle identità approssimate il primo addendo può essere maggiorato con ϵM e per la proprietà (iii) l'integrale a secondo membro è minore di ϵ se n è abbastanza grande. Quindi si ha

$$(2.19) \quad \|u_n * f - f\|_1 < \epsilon M + 2\|f\|_1 \epsilon = C \epsilon$$

se n è abbastanza grande; qui C è una costante dipendente solo da f e da M . \square

Abbiamo così visto che in $L_{2\pi}^1$ non esiste l'identità per il prodotto di convoluzione (vedi l'osservazione dopo il Teorema 2.3) ma esistono delle successioni (u_n) tali che per ogni $f \in L_{2\pi}^1$ si ha $\lim_n u_n * f = f$ in norma; questo spiega l'origine del nome "identità approssimate".

Il seguente corollario mostra che la trasformata di Fourier di una funzione f in $L_{2\pi}^1$ è unica e che, viceversa, la successione delle trasformate di Fourier individua unicamente la funzione (a meno di insiemi di misura nulla).

Corollario 2.10. *Sia $f \in L_{2\pi}^1$. Se $\hat{f}(k) = 0 \forall k$ allora $f = 0$ q.o. Viceversa, se $f = 0$ q.o. allora $\hat{f}(k) = 0 \forall k$.*

Dimostrazione. Sia $f \in L^1_{2\pi}$ e sia $\hat{f}(k) = 0 \ \forall k$. Per la (2.14) possiamo concludere che $F_n * f = 0 \ \forall n$. Dal Teorema 2.9 segue che f è nulla quasi ovunque. Il viceversa è ovvio. \square

Esercizio 2.4 Sia (u_n) una identità approssimata di $L^1_{2\pi}$. Allora

$$\lim_n \widehat{u_n}(k) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

La seguente proposizione fornisce una diversa dimostrazione di un risultato già visto nella Sezione 1.

Proposizione 2.11. *Lo spazio $\mathcal{P}_{2\pi}$ è denso in $L^1_{2\pi}$.*

Dimostrazione. Sia $f \in L^1$. Dal Teorema 2.9, scegliendo come identità approssimata il nucleo di Fejèr, si ha che la successione $(F_n * f)$ che, per la (2.14), è di polinomi trigonometrici, tende a f nella norma $L^1_{2\pi}$. \square

Il Teorema 2.13 mostra che se f è continua e u_n una i.a., allora $u_n * f$ è continua per ogni n e converge uniformemente a f . Premettiamo il seguente

Lemma 2.12. *Sia $f \in C^0_{2\pi}$. Allora si ha $\lim_{y \rightarrow 0} \|\tau_y f - f\|_{C^0_{2\pi}} = 0$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è molto simile a quella del Lemma 2.8 ed è assegnata come esercizio. \square

Teorema 2.13. *Sia $f \in C^0_{2\pi}$ e (u_n) una identità approssimata di $L^1_{2\pi}$. Allora*

$$\lim_n \|u_n * f - f\|_{C^0_{2\pi}} = 0$$

Dimostrazione. La dimostrazione è molto simile a quella del Teorema 2.9 ed è assegnata come esercizio (Esercizio 1.18 della Sezione 9). \square

La seguente proposizione, conseguenza immediata del precedente teorema, fornisce una diversa dimostrazione di un risultato già visto nella Sezione 1.

Proposizione 2.14. *$\mathcal{P}_{2\pi}$ è denso in $C^0_{2\pi}$.*

Con il seguente Teorema 2.16 raggiungiamo uno degli obiettivi che si siamo proposti all'inizio di questa sezione, cioè che è possibile ricostruire una funzione di $L^1_{2\pi}$ a partire dai suoi coefficienti di Fourier. Premettiamo un lemma che fornisce una condizione sulla trasformata di Fourier $(\hat{f}(n))$ affinché una funzione assolutamente integrabile sia somma della sua serie di Fourier.

Lemma 2.15. *Siano $f \in L^1_{2\pi}$ e $(\hat{f}(n)) \in \ell^1$. Allora*

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

per q.o. x ; più precisamente, la somma della serie è una funzione continua che coincide quasi ovunque con f .

Dimostrazione. Per l'ipotesi la serie a secondo membro converge uniformemente ad una funzione continua, sia essa g . I suoi coefficienti di Fourier sono uguali a quelli di f ; infatti per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha

$$\hat{g}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \hat{f}(k) e^{i(k-n)x} dx = \hat{f}(n).$$

Si noti che lo scambio fra l'integrale e la serie è lecito perchè la serie converge uniformemente e quindi è possibile integrare termine a termine. Per il Corollario 2.10 ne segue che $f = g$ quasi ovunque. \square

Teorema 2.16. *Sia (u_n) una i.a. con $(\widehat{u_n}(k)) \in \ell^1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora per ogni $f \in L^1_{2\pi}$ si ha*

$$(2.20) \quad f(x) = \lim_n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{u_n}(k) \hat{f}(k) e^{ikx}$$

nella norma $L^1_{2\pi}$.

Dimostrazione. Poichè $(\widehat{u_n * f})(k) = \widehat{u_n}(k) \hat{f}(k)$ la successione $((\widehat{u_n * f})(k))$ è in ℓ_1 per ogni n . Allora, per il precedente lemma, si ha

$$u_n * f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{u_n}(k) \hat{f}(k) e^{ikx}$$

per *q.o.x.*, e la tesi segue subito dal Teorema 2.9. \square

La formula (2.20) è detta *formula di inversione mediante (u_n)* perchè permette di ricostruire una funzione di $L^1_{2\pi}$ a partire dalla sua trasformata di Fourier. Concludendo, la serie di Fourier di una funzione assolutamente integrabile in generale non rappresenta la funzione né in senso classico (cioè come convergenza puntuale) né nel senso della convergenza in norma; tuttavia, introducendo le identità approssimate, abbiamo ottenuto una nuova rappresentazione di una funzione di $L^1_{2\pi}$ mediante i suoi coefficienti di Fourier.

Con la formula (2.20) viene modificata la nozione di convergenza della serie di Fourier di una funzione di $L^1_{2\pi}$: moltiplicando termine a termine la serie per i coefficienti di Fourier di u_n si ottiene una serie sommabile. Per questa ragione le funzioni (u_n) si chiamano anche *nuclei di sommabilità*.

Terminiamo questa sezione chiedendoci se le funzioni di $L^1_{2\pi}$ si possono caratterizzare in termini della loro trasformata di Fourier, come abbiamo visto accadere per le funzioni di quadrato sommabile (e, come vedremo, accade per le funzioni di classe $C^\infty_{2\pi}$).

Per rispondere, il primo punto da chiarire è il seguente: se $f \in L^1_{2\pi}$, allora $(\hat{f}(n))$ è una successione infinitesima con un certo ordine? La risposta è no, come mostrano i due seguenti controesempi

$$\sum_2^\infty \frac{\cos(nt)}{\log(n)} \quad 1 + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{|n|} e^{int}.$$

Si dimostra infatti che queste sono le serie di Fourier di due funzioni in $L^1_{2\pi}$ (vedi Katznelson pag 22).

Visti questi esempi, la domanda naturale da chiedersi è la seguente: se (a_n) è una successione infinitesima, allora $\sum a_n e^{inx}$ è la serie di Fourier di una funzione di $L^1_{2\pi}$? Anche a questa domanda la risposta è negativa: si prova infatti che la serie

$$\sum_2^{\infty} \frac{\sin(nt)}{\log(n)}$$

non è la serie di Fourier di una funzione $L^1_{2\pi}$.

3. Convergenza puntuale

Nearly fifty years had passed without any progress on the question of analytic representation of an arbitrary function, when an assertion of Fourier threw new light on the subject, Thus a new era began for the development of this part of Mathematics and this was heralded in a stunning way by major developments in Mathematical Phisycs.
B. Riemann (1854)

Nelle precedenti sezioni abbiamo visto che la serie di Fourier di una funzione di quadrato sommabile converge alla funzione in norma e che la serie di Fourier di una funzione di $L^1_{2\pi}$ in generale non converge né in norma né quasi ovunque. Questa sezione è dedicata alla ricerca di condizioni su f che garantiscono la convergenza puntuale della sua serie di Fourier.

La problematica sulla convergenza delle serie di Fourier fu affrontata inizialmente nel diciottesimo secolo, e si può dire che fu esaurientemente risolta 150 anni dopo. Bernoulli, Eulero, Lagrange si erano accorti che per qualche semplice funzione la serie di Fourier convergeva alla funzione puntualmente. Fourier, nella sua *Teoria analitica del calore* (1807) affermò che *ogni grafico su un intervallo limitato si può ottenere come sovrapposizione di infiniti seni e coseni*. Come vedremo in questa sezione, l'affermazione era incorretta ma l'idea contenuta era straordinaria per quei tempi. Fu Dirichlet, nel 1828, a provare che se una funzione è continua con la sua derivata prima, la sua serie di Fourier converge uniformemente alla funzione ⁽⁵⁾. Nel Teorema 3.2, dovuto a Dirichlet, si prova che se $f \in C^1_{2\pi}$ allora la sua serie di Fourier converge uniformemente. Il teorema fornisce anche una stima dell'errore: quanto più è regolare la funzione tanto più rapida è la convergenza. Premettiamo il seguente lemma che mostra la stretta relazione fra regolarità della funzione e la rapidità con cui i suoi coefficienti di Fourier tendono a zero.

Lemma 3.1. *Sia $f \in C^q_{2\pi}$, $q \geq 1$. Per ogni $p \leq q$ si ha*

$$(3.1) \quad \widehat{f^{(p)}}(k) = (ik)^p \widehat{f}(k),$$

per ogni $k \in \mathbb{Z}$ ⁽⁶⁾.

Dimostrazione. Integrando per parti si ha

$$\widehat{f^{(1)}}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) (-ik) e^{-ikx} dx = (ik) \widehat{f}(k),$$

Per $q > 1$ si procede per induzione. □

Teorema 3.2. (Teorema di Dirichlet) Sia $f \in C_{2\pi}^q$ $q \geq 1$. Allora la serie di Fourier di f converge uniformemente ad f e si ha

$$(3.2) \quad \left\| f - \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) e^{ikx} \right\|_{C_{2\pi}^0} \leq \frac{c}{n^{q-1/2}} \|f^{(q)}\|_{L_{2\pi}^2},$$

dove $c = \sqrt{2}/\sqrt{2q-1}$.

Dimostrazione. Sia $S_n f(x) = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) e^{ikx}$ la somma parziale n -esima della serie di Fourier di f . Mostriamo che $(S_n f)$ è una successione di Cauchy nella norma $C_{2\pi}^0$. Siano $n \leq m$ due numeri naturali. Per il Lemma 3.1 si ha

$$\left| S_m f(x) - S_n f(x) \right| \leq \sum_{|k|=n+1}^m |\hat{f}(k)| < \sum_{|k|>n} |\hat{f}(k)| = \sum_{|k|>n} \frac{|\widehat{f^{(q)}}(k)|}{|k|^q}.$$

E quindi, per la disuguaglianza di Schwartz

$$\left| S_n f(x) - S_m f(x) \right| \leq \left(\sum_{|k|>n} \frac{1}{|k|^{2q}} \right)^{1/2} \left(\sum_{|k| \in \mathbb{Z}} |\widehat{f^{(q)}}(k)|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{|k|>n} \frac{1}{|k|^{2q}} \right)^{1/2} \|f^{(q)}\|_{L_{2\pi}^2}.$$

Sia $2q-1 > 0$, per il criterio integrale, si ha

$$\begin{aligned} \sum_{|k|>n} \frac{1}{|k|^{2q}} &< 2 \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^{2q}} = 2 \left[\frac{x^{1-2q}}{1-2q} \right]_n^{+\infty} \\ &= \frac{2}{2q-1} \frac{1}{n^{2q-1}}. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$(3.3) \quad \left| S_n f(x) - S_m f(x) \right| \leq \sqrt{\frac{2}{2q-1}} \frac{1}{n^{q-1/2}} \|f^{(q)}\|_{L_{2\pi}^2},$$

e quindi la successione $(S_n f)$ è di Cauchy in $C_{2\pi}^0$. Allora esiste una funzione continua g tale che $\lim_n S_n f = g$. D'altra parte, usando la convergenza uniforme della serie a g si vede facilmente che f e g hanno gli stessi coefficienti di Fourier. Per il Corollario 2.10 ne segue che $f = g$ quasi ovunque. Ma se due funzioni coincidono quasi ovunque e sono continue, coincidono ovunque. Ne segue che $f = g$ e quindi $S_n f$ converge uniformemente a f . La stima (3.2) segue subito dalla stima (3.3) facendo il limite per $m \rightarrow \infty$ e passando al massimo in $[0, 2\pi]$. \square

Dirichlet lasciò aperta il seguente questione: *la serie di Fourier di una funzione continua converge puntualmente alla funzione?* Egli pensava che la risposta fosse positiva, e come lui la pensarono per 40 anni Riemann, Weiestrass, Dedekind, fino a che G. Du Bois Reymond fornì un controesempio provando il seguente

Teorema 3.3. (Du Bois-Reymond (1875)) *Esiste una funzione continua la cui serie di Fourier diverge in un punto.*

Anche Fejer produsse un esempio ⁽⁷⁾. Dopo questo risultato fu formulata la seguente congettura: *esiste una funzione continua la cui serie di Fourier non converge in nessun punto*. Questa congettura fu smentita dal seguente teorema

Teorema 3.4. (*L. Carleson (1966)*) *La serie di Fourier di una funzione di quadrato integrabile converge quasi ovunque alla funzione stessa.*

La dimostrazione del teorema è un intero libro ⁽⁸⁾. Poichè le funzioni continue sono anche in $L^2_{2\pi}$, possiamo concludere che *la serie di Fourier di una funzione continua converge alla funzione q.o.* Ci si può chiedere se sulla convergenza della serie di Fourier di una funzione continua si possa ottenere di meglio. La risposta è no, come mostra il seguente

Teorema 3.5. (*Katznelson 1964*) *Per ogni insieme E di misura nulla esiste una funzione continua la cui serie di Fourier diverge su E .*

Proponiamo esempi di serie di Fourier di alcune funzioni elementari.

Esempio 3.1 La serie di Fourier della funzione $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ 1 & \text{se } x \in [0, \pi) \end{cases}$ è

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

Esempio 3.2 La serie di Fourier della funzione di periodo 2π che nell'intervallo $(-\pi, \pi]$ è uguale a x è

$$2 \sum_1^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \sin(nx)$$

Esempio 3.3 La serie di Fourier della funzione che nell'intervallo $(-\pi, \pi]$ è uguale a $|x|$ è

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_1^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)x).$$

Esempio 3.4 La serie di Fourier della funzione che nell'intervallo $(-\pi, \pi]$ è uguale a x^2 è

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

L'Esercizio 2.9 (Sezione 9 del Capitolo 1) è utile per capire il comportamento di questi tipi di funzioni, che sono ottenute “tagliando” funzioni polinomiali e “periodizzandole”. Si noti che le funzioni dei primi due esempi non sono continue mentre le ultime due sono continue ma non sono derivabili. Perciò il Teorema di Dirichlet non si applica a nessuna di esse. Tuttavia mostreremo successivamente (Teorema

sulle funzioni con discontinuità a salto) negli ultimi due esempi la serie di Fourier converge uniformemente alla funzione. Infine si confronti il comportamento asintotico delle successioni di Fourier di queste quattro funzioni e del nucleo di Poisson in relazione alla regolarità delle funzioni stesse.

Concludiamo questa sezione mostrando una caratterizzazione delle funzioni di $C_{2\pi}^\infty$ in termini della trasformata di Fourier e discutendo l'effetto regolarizzante dell'operazione di convoluzione per una funzione regolare.

Definizione 3.1 Una successione di numeri complessi (α_n) si dice a decrescenza rapida se per ogni $q \in \mathbb{N}$ esiste una costante C_q tale che

$$(3.4) \quad |\alpha_n| \leq C_q(1 + |n|^q)^{-1}$$

Il seguente teorema fornisce una caratterizzazione delle funzioni $C_{2\pi}^\infty$ in termini della loro trasformata di Fourier.

Teorema 3.6. *Se $f \in C_{2\pi}^\infty$ allora $(\hat{f}(n))$ è a decrescenza rapida. Viceversa, se $f \in L_{2\pi}^1$ e $(\hat{f}(n))$ è a decrescenza rapida, allora f coincide quasi ovunque con una funzione di $C_{2\pi}^\infty$.*

Dimostrazione. Sia $f \in C_{2\pi}^\infty$ allora per la (3.1) per ogni intero q si ha

$$|\hat{f}(n)| = \left| \frac{\widehat{f^{(q)}}(n)}{n^q} \right| \leq \frac{c_q}{|n|^q} \quad \forall n \neq 0.$$

dove $c_q = \|f^{(q)}\|_{L_{2\pi}^1}$. Poichè la successione $((1 + |n|^q)/|n|^q)_{n \neq 0}$ è limitata, si ha dunque $|\hat{f}(n)| < c_q M(1 + |n|^q)^{-1} = C_q(1 + |n|^q)^{-1}$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Viceversa, se $\hat{f}(n)$ è a decrescenza rapida, la serie di Fourier di f converge (totalmente e quindi) uniformemente ad una funzione continua g . Per l'ipotesi, applicando ripetutamente il teorema di derivazione termine a termine, si ottiene che g è in $C_{2\pi}^\infty$. D'altra parte, usando la convergenza uniforme della serie a g si vede facilmente che f e g hanno gli stessi coefficienti di Fourier. Per il Corollario 2.10 ne segue che $f = g$ q.o. \square

Il nucleo di Poisson \mathcal{P}_r soddisfa le ipotesi del precedente teorema.

Il seguente teorema mostra che il prodotto di convoluzione di una funzione di $L_{2\pi}^1$ per una funzione $C_{2\pi}^q$ è ancora in $C_{2\pi}^q$.

Teorema 3.7. *Sia $f \in C_{2\pi}^q$, $q \geq 0$ e sia $g \in L_{2\pi}^1$. Allora $f * g \in C_{2\pi}^q$ e si ha*

$$\partial^j (f * g) = (\partial^j f) * g \quad j \leq q.$$

Dimostrazione. Sia $q = 1$. Proviamo che $f * g$ è continua

$$(f * g)(x + h) - f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(x - y + h) - f(x - y)]g(y)dy.$$

Per l'ipotesi l'integranda tende a zero per h tendente a zero e si maggiora con una costante per $|g|$, che è integrabile. Allora, per il Teorema della convergenza

dominata, il secondo membro tende a zero per h tendente a zero. Così abbiamo provato che $f * g$ è continua. Proviamo che è in $C_{2\pi}^1$. Sia x fissato

$$\frac{(f * g)(x + h) - f * g(x)}{h} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{f(x - y + h) - f(x - y)}{h} \right] g(y) dy$$

L'integranda tende a $\partial f(x - y)g(y)$, e in modulo si maggiora con una costante per $|g|$. Applicando di nuovo il teorema della convergenza dominata otteniamo che il secondo membro tende a $(\partial f * g)(x)$. Abbiamo così provato che $f * g$ è derivabile in ogni punto e si ha $\partial(f * g) = (\partial f) * g$.

Sia $q > 1$. La dimostrazione, per induzione su q , è lasciata per esercizio. □

4. Altri risultati di convergenza puntuale.

In questa sezione ci occuperemo della convergenza delle serie di Fourier di funzioni che sono continue tranne al più che in un numero finito di punti dove però hanno delle discontinuità a salto.

Definizione 4.1 Una funzione f definita in un intervallo I si dice *continua a tratti* se è continua in tutti i punti di I tranne al più in un numero finito di punti dove però esistono finiti i limiti sinistro e destro della funzione.

Definizione 4.2 Una funzione f , definita in un intervallo I , si dice *regolare a tratti* se è continua a tratti e se esiste la sua derivata in ogni punto di I , eccetto al più in un numero finito di punti dove però esistono finiti i limiti sinistro e destro del rapporto incrementale.

Una funzione periodica si dice *regolare a tratti* se è regolare a tratti in un intervallo di ampiezza uguale al periodo. Le funzioni in tutti gli esempi della Sezione 3 sono regolari a tratti. Data una funzione f , denoteremo con $f(x^+)$ e con $f(x^-)$ rispettivamente il limite destro e sinistro di f in x .

Teorema 4.1. Sia f una funzione periodica di periodo 2π , regolare a tratti in $[0, 2\pi]$. Allora la sua serie di Fourier converge puntualmente in ogni punto di continuità, mentre nei punti di discontinuità converge alla media dei limiti destro e sinistro:

$$(4.1) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx} = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

Dimostrazione. Dalla rappresentazione integrale della somma parziale mediante il nucleo di Dirichlet (2.4) si ha che

$$S_n f(x) = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 D_n(u) f(x+u) du + \int_0^{\pi} D_n(u) f(x+u) du \right).$$

Sia x fissato. Per stimare la differenza

$$(4.2) \quad S_n f(x) - \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$$

è conveniente moltiplicare il secondo addendo per l'integrale di D_n ; ricordiamo che

$$1 = \widehat{D}_n(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 D_n(u) du + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(u) du.$$

e poichè D_n è pari, ciascuno dei due addendi è uguale a $\frac{1}{2}$. Pertanto si ha

$$\begin{aligned} S_n f(x) - \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x+u) D_n(u) du - f(x^-) \int_{-\pi}^0 D_n(u) du \right] \\ &+ \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} f(x+u) D_n(u) du - f(x^+) \int_0^{\pi} D_n(u) du \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 [f(x+u) - f(x^-)] D_n(u) du + \int_0^{\pi} [f(x+u) - f(x^+)] D_n(u) du \right]. \end{aligned}$$

Utilizzando la (2.3) scriviamo ora le due integrande come prodotto di una funzione G , continua a tratti, per seni e coseni. Si ha

$$(4.3) \quad S_n f(x) - \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(x, u) \sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right) du$$

dove abbiamo posto

$$G(x, u) = \begin{cases} \frac{f(x+u) - f(x^-)}{\sin(u/2)} & \text{se } u \in (-\pi, 0] \\ \frac{f(x+u) - f(x^+)}{\sin(u/2)} & \text{se } u \in (0, \pi]. \end{cases}$$

La funzione $u \mapsto G(x, u)$ è continua a tratti. Questo è ovvio nei punti diversi da zero, perchè f è continua a tratti e il denominatore è diverso da zero. Poichè inoltre f ha derivate destra e sinistra finite in ogni punto, la funzione

$$\frac{f(x+u) - f(x^-)}{\sin(u/2)} = 2 \frac{f(x+u) - f(x^-)}{u} \frac{u/2}{\sin(u/2)}$$

ha limite sinistro finito in zero. Analogamente la funzione

$$\frac{f(x+u) - f(x^+)}{\sin(u/2)}$$

ha limite destro finito in zero. Abbiamo così verificato che la funzione $u \mapsto G(x, u)$ è continua a tratti. Quindi nella formula (4.3), che riscriviamo,

$$\begin{aligned} S_n f(x) - \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(x, u) \cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin(nu) du + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(x, u) \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos(nu) du \end{aligned}$$

abbiamo espresso la differenza (4.2) in termini di coefficienti di Fourier di un funzioni continue a tratti e perciò di quadrato sommabile. Allora per il teorema di

Riemann-Lebesgue il secondo membro tende a zero per n tendente a $+\infty$. Il teorema è così provato. \square

Teorema 4.2. *Sia $f \in C_{2\pi}^0$ e sia f' continua a tratti. Allora la serie di Fourier di f converge uniformemente ad f .*

Dimostrazione. Sia f continua e f' è continua a tratti. Allora f' è assolutamente integrabile, perciò possiamo scrivere i suoi coefficienti di Fourier. Mostriamo che, nelle ipotesi del teorema, si ha

$$(4.4) \quad \hat{f}'(n) = in\hat{f}(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

La funzione f' è integrabile perchè limitata, quindi possiamo calcolare i suoi coefficienti di Fourier. Siano $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_N < 2\pi$ i punti in cui f' ha un salto. Poniamo $a_0 = 0$ e $a_{N+1} = 2\pi$. Allora integrando per parti

$$\begin{aligned} \hat{f}'(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx} dx = \sum_{k=1}^{N+1} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f'(x)e^{-inx} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N+1} \left[f(x)e^{-inx} \right]_{a_{k-1}}^{a_k} + in \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N+1} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)e^{-inx} dx = \\ &= in \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx} dx = in \hat{f}(n). \end{aligned}$$

Nel penultimo passaggio abbiamo usato che la somma telescopica

$$\sum_{k=1}^{N+1} \left[f(x)e^{-inx} \right]_{a_{k-1}}^{a_k} = f(0) - f(2\pi)$$

è zero perchè la funzione è periodica. Dalla (4.4), per la disuguaglianza di Schwarz, si ha

$$\sum_{k \neq 0} |\hat{f}(k)| = \sum_{k \neq 0} |\hat{f}'(k)| \frac{1}{|k|} \leq \left(\sum_{k \neq 0} |\hat{f}'(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Poichè f' è limitata, è in $L_{2\pi}^2$; ne segue che l'ultimo membro è finito, e quindi la serie al primo membro converge. Abbiamo così provato che la serie di Fourier di f converge uniformemente. \square

Si noti che le funzioni degli Esempi 3.3 e 3.4 soddisfano le ipotesi di questo teorema.

Fino ad ora ci siamo occupati di studiare la convergenza puntuale delle serie di Fourier di funzioni con discontinuità a salto. Vogliamo ora indagare un aspetto più numerico della convergenza della serie di Fourier, il cosiddetto fenomeno di Gibbs, dal nome del fisico che lo spiegò. Pochi anni prima del 1900 il fisico Michelson si era accorto che il grafico della somma parziale della funzione dell'Esempio 3.1 non somigliava alla funzione ma presentava una gobba in corrispondenza dei punti di discontinuità. Questo accadeva anche per le somme parziali con molti termini (ne calcolò 80). In realtà il fenomeno si presenta ogni volta che si calcolano le somme parziali di funzioni con discontinuità a salto. La Figura 4 riporta i grafici delle somme parziali S_n , $n = 20, 40, 60, 80$, della serie di Fourier della funzione

$$(4.5) \quad f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-\frac{1}{2}, 0) \\ 1 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}) \end{cases}$$

Ringrazio Sara Sommariva e Gabriele Zaccaria per il programma che ha generato questo grafico.

Come si vede, tutti i grafici in corrispondenza del punto di discontinuità presentano una gobba che al crescere di n si appiattisce sull'asse delle ordinate ma non diminuisce in altezza. La Figura 5 mostra il comportamento di alcune somme parziali vicino a zero. Questo comportamento delle somme parziali, che non è in contraddizione con la convergenza puntuale della serie, si manifesta sempre in corrispondenza dei punti di discontinuità delle funzioni. Il fenomeno fu spiegato per la prima volta da Gibbs nel 1899.

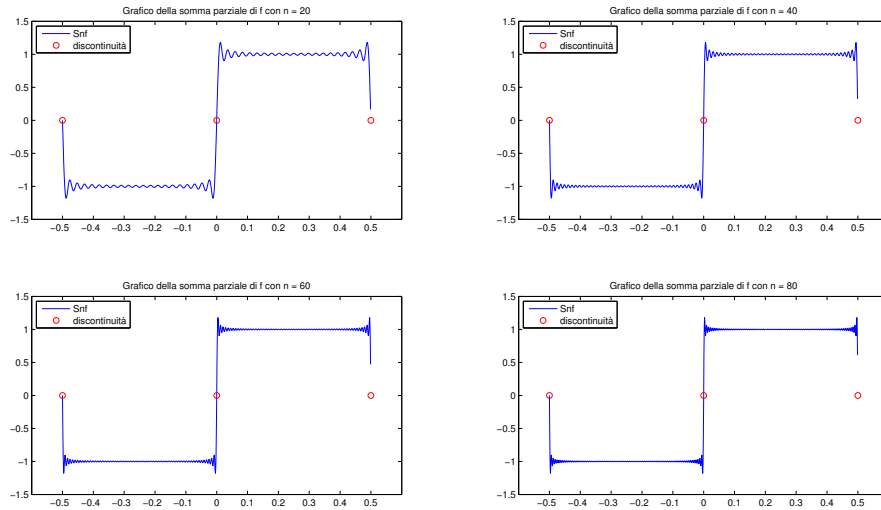


Figura 4 Somme parziali $S_{20}, S_{40}, S_{60}, S_{80}$.

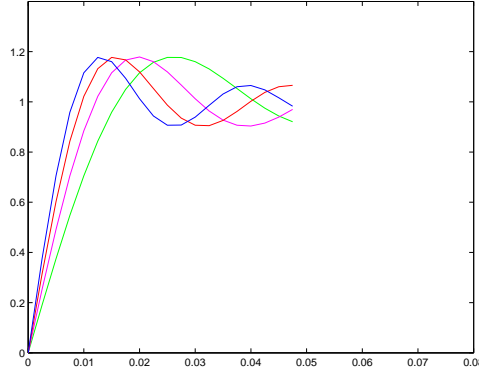


Figura 5 Zoom sui grafici delle somme parziali S_n $n = 60, 80, 100, 120$.

Il seguente Teorema 4.3 dimostra il fenomeno di Gibbs per la funzione in (4.5). Il teorema fa uso della rappresentazione integrale della somma parziale mediante il nucleo di Dirichlet che per periodo uguale ad 1 si scrive

$$(4.6) \quad D_n(x) = \sum_{|k| \leq n} e^{2\pi i k x} = \frac{\sin(2n+1)\pi x}{\sin(\pi x)}.$$

Teorema 4.3. *Sia f la funzione periodica di periodo 1 che è uguale a -1 nell'intervallo $(-\frac{1}{2}, 0]$ ed uguale a 1 in $(0, \frac{1}{2}]$. Si ha*

$$(4.7) \quad \lim_n \max_{[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]} S_n f(x) = 1.08949\dots$$

Dimostrazione. Esprimiamo la somma parziale S_n in forma integrale mediante il nucleo di Dirichlet

$$(4.8) \quad S_n f(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_n(x-y) f(y) dy = \int_0^{\frac{1}{2}} D_n(x-y) dy - \int_{-\frac{1}{2}}^0 D_n(x-y) dy.$$

Operando il cambiamento di variabili $x-y=z$ e usando che D_n è una funzione pari si ottiene

$$S_n f(x) = - \int_x^{x-\frac{1}{2}} D_n(z) dz + \int_{x+\frac{1}{2}}^x D_n(z) dz = \int_{-x}^{-x+\frac{1}{2}} D_n(z) dz - \int_x^{x+\frac{1}{2}} D_n(z) dz.$$

Osserviamo ora che se $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ si ha $-x < x \leq -x + \frac{1}{2} \leq x + \frac{1}{2}$ e quindi i contributi degli integrali sull'intervallo $(x, -x + \frac{1}{2})$ si cancellano; perciò questa

formula si può riscrivere come segue

$$S_n f(x) = \int_{-x}^x D_n(y) dy - \int_{-x+\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} D_n(y) dy.$$

e, denotando con I_n il secondo integrale

$$(4.9) \quad S_n f(x) = \int_{-x}^x D_n(y) dy + I_n(x).$$

Con un argomento simile si vede che la (4.9) vale anche se $-\frac{1}{4} \leq x < 0$.

Abbiamo così scritto $S_n f$ come somma di due funzioni integrali. Si noti che se $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ allora l'intervallo di integrazione del primo integrale è contenuto in $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. Invece poichè $-x + \frac{1}{2}$ e $x + \frac{1}{2}$ saranno nell'intervallo $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, l'intervallo di integrazione del secondo integrale si trova agli estremi dell'intervallo di periodicità, laddove l'area sotto il grafico diviene piccola al crescere di n (vedi Figura 6). Proviamo infatti che la seconda funzione integrale in (4.9) si maggiora con una costante per n^{-1} . Integrando per parti si ha

$$I_n(x) = \int_{-x+\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \frac{\sin(2n+1)\pi y}{\sin(\pi y)} dy = \left[-\frac{\cos(2n+1)\pi y}{(2n+1)\pi} \frac{1}{\sin(\pi y)} \right]_{-x+\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} + \\ - \int_{-x+\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \frac{\cos(2n+1)\pi y}{(2n+1)\pi} \frac{\pi \cos(\pi y)}{\sin^2(\pi y)} dy.$$

Come abbiamo già osservato, se $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ l'intervallo di integrazione in questa formula è contenuto in $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. Poiché in questo intervallo la funzione $\sin(\pi y)$ è limitata dal di sotto da una costante positiva, maggiorando si ottiene facilmente che

$$(4.10) \quad |I_n(x)| \leq C \frac{1}{n}, \quad x \in [-1/4, 1/4]$$

dove C e C' sono due costanti. Abbiamo così stimato il secondo addendo nella formula (4.9).

Stimiamo ora il primo integrale, riscriviamo l'integranda al primo membro

$$D_n(y) = \frac{\sin(2n+1)\pi y}{\sin(\pi y)} = \sin((2n+1)\pi y) \left[\frac{1}{\sin(\pi y)} - \frac{1}{\pi y} \right] + \frac{\sin(2n+1)\pi y}{\pi y};$$

denotiamo con φ la funzione in parentesi quadra e integriamo

$$\int_{-x}^x D_n(y) dy = \int_{-x}^x \sin((2n+1)\pi y) \varphi(y) dy + \int_{-x}^x \frac{\sin(2n+1)\pi y}{\pi y} dy.$$

Indicando con J_n il primo integrale questa relazione si riscrive

$$(4.11) \quad \int_{-x}^x D_n(y) dy = J_n(x) + \int_{-x}^x \frac{\sin(2n+1)\pi y}{\pi y} dy.$$

Mostriamo che

$$(4.12) \quad |J_n(x)| \leq C \frac{1}{n}, \quad x \in [-1/4, 1/4].$$

Infatti la funzione φ si può scrivere

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sin(\pi y)} - \frac{1}{\pi y} = \frac{\pi y - \sin(\pi y)}{(\pi y)^2} \frac{\pi y}{\sin(\pi y)},$$

dunque nell'intervallo $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ è prolungabile per continuità ad una funzione di classe C^1 (anzi C^∞). Quindi è lecito integrare per parti e si ha

$$J_n(x) = \int_{-x}^x \sin((2n+1)\pi y) \varphi(y) dy = \left[\frac{\cos(2n+1)\pi y}{(2n+1)\pi} \varphi(y) \right]_{-x}^x + \int_{-x}^x \frac{-\cos(2n+1)\pi y}{(2n+1)\pi} \varphi'(y) dy.$$

Riassunto, abbiamo finora provato che se $x \in [-1/4, 1/4]$ si ha

$$(4.13) \quad S_n f(x) = \int_{-x}^x \frac{\sin(2n+1)\pi y}{\pi y} dy + I_n(x) + J_n(x),$$

dove $|I_n(x)|$ e $|J_n(x)|$ si maggiorano con c/n (vedi (4.9) e (4.11)). Non ci rimane che da stimare l'integrale a secondo membro; operiamo il cambiamento di variabili $t = (2n+1)\pi y$

$$\int_{-x}^x \frac{\sin(2n+1)\pi y}{\pi y} dy = 2 \int_0^x \frac{\sin(2n+1)\pi y}{\pi y} dy = \frac{2}{\pi} \int_0^{(2n+1)\pi x} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

Si verifica che il massimo della funzione integrale $\int_0^z \frac{\sin(t)}{t} dt$ è assunto nel più piccolo zero positivo di $\sin(t)$, quindi in $z = \pi$ (Esercizio 4.5). Calcolando numericamente $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt$ si trova che è uguale a 1.08949.... E quindi la funzione composta $\frac{2}{\pi} \int_0^{(2n+1)\pi x} \frac{\sin(t)}{t} dt$ assume il suo massimo (che è 1.08949...) nel punto $x_n = 1/(2n+1)$, che, per $n > 1$ è in $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. Ne segue che per ogni $n > 1$ si ha

$$\max_{[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]} \int_0^x \frac{\sin((2n+1)\pi y)}{\pi y} dy = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt = 1.08949....$$

Da ciò e da (4.13), per la (4.10) e la (4.12), si ha la tesi. Il teorema è completamente dimostrato. \square

Esercizio 4.5 Mostrare che in $z = \pi$ la funzione $\int_0^z \frac{\sin(t)}{t} dt$ ha massimo assoluto e calcolare numericamente $2/\pi \int_0^\pi \sin(t)/t dt$.

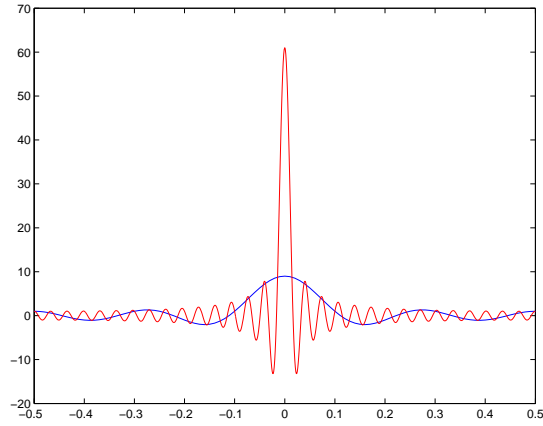


Figura 6 Nucleo di Dirichlet D_n $n = 4$ e 30 .

5. La temperatura della terra.

The differential equations of the propagation of heat express the most general conditions, and reduce the physical questions to problems of pure analysis, and this is the proper object of theory.

J. Fourier e Analytical Theory of Heat

La rimanente parte di questo capitolo è dedicata ad alcune applicazioni della teoria al problema della diffusione del calore in vari contesti. Fu lo studio della diffusione del calore, ed ancor prima il problema della corda vibrante, che condussero allo sviluppo delle serie di Fourier. Le leggi che governano questi due fenomeni furono espresse per mezzo di due equazioni differenziali alle derivate parziali, appunto l'equazione delle onde e l'equazione del calore, e furono risolte per mezzo delle serie di Fourier. L'equazione del calore in una dimensione si scrive

$$(5.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

dove t è il tempo, x la posizione di un punto di un conduttore uno-dimensionale e $u = u(t, x)$ è la temperatura del punto in x al tempo t , k è una costante che dipende dal corpo. Non mostreremo come l'equazione (5.1) viene derivata dalle leggi della fisica, perchè questo aspetto del problema è stato già ampiamente discusso nel corso di *Modelli di sistemi continui ed applicazioni*. Invece risolveremo tre problemi di diffusione del calore usando le serie di Fourier.

I Problema. La temperatura della terra Supponiamo di conoscere l'evoluzione nel tempo della temperatura di un punto della superficie terrestre nell'arco di un anno. Vogliamo sapere a quale profondità accade che “le stagioni si invertano completamente” e si ha la massima temperatura d'inverno e la minima d'estate. Chiariremo meglio in seguito questa richiesta. La temperatura di un punto della superficie terrestre varia in funzione del tempo e grosso modo si può pensare che il suo andamento si ripeta periodicamente anno dopo anno. È ragionevole pensare quindi ad un modello espresso da una funzione di periodo 1 (un anno). Si può pensare ad esempio alla funzione $\sin(2\pi t)$ in un intervallo di ampiezza 1, ad esempio $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Denotiamo con x la misura della profondità, in metri. Ci aspettiamo che, al crescere del parametro x , l'escursione termica annua (cioè la differenza tra le temperature massima e minima annuali) diminuisca. Inoltre ci aspettiamo anche che i massimi e i minimi si manifestino con un certo ritardo rispetto alla superficie.

Il modello Sia $f(t), t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ la temperatura di un punto P sulla superficie terrestre. Supporremo f continua con la sua derivata prima. Denotiamo con $u(x, t)$ la temperatura di un punto alla profondità x , al tempo t . La funzione u dovrà essere soluzione dell'equazione (5.1) dove $x > 0$, $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ e $k > 0$ è una costante di diffusione termica che dipende dal terreno. Le condizioni iniziali sono

$$u(0, t) = f(t) \quad t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = cost = l.$$

Per calcolare la soluzione, scegliamo la costante $k = 0.5$, valore che rende più semplice la sua espressione. Dunque per trovare l'evoluzione della temperatura in profondità dobbiamo risolvere il seguente problema:

Determinare una funzione $u : [0, +\infty) \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- (i) per ogni t la funzione $x \rightarrow u(x, t)$ è C^2 in $(0, +\infty)$
- (ii) per ogni $x > 0$ la funzione $t \rightarrow u(x, t)$ è C_1^1 .

Inoltre

$$(5.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$(5.3) \quad u(0, t) = f(t) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = l \quad \forall t$$

Procederemo in maniera euristica: supponendo che una soluzione esista, troveremo una formula risolutiva e successivamente verificheremo che si tratta di una soluzione.

Se la soluzione esiste, per ogni x fissato deve essere sviluppabile in serie di Fourier in termini della variabile t . Sia dunque

$$u(x, t) = \sum_n c_n(x) e^{2\pi nit}$$

il suo sviluppo per ogni $x \in \mathbb{R}$. Supponendo sia lecito derivare sotto il segno di somma una volta rispetto a t e due volte rispetto a x , si ottiene

$$(5.4) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 2\pi i \sum_n c_n(x) n e^{2\pi nit} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_n c_n''(x) e^{2\pi nit}.$$

Poichè u è soluzione dell'equazione (5.2) si ha

$$2\pi i \sum_n c_n(x) n e^{2\pi i n t} = \frac{1}{2} \sum_n c_n''(x) e^{2\pi i n t},$$

e quindi per l'unicità della trasformata di Fourier

$$(5.5) \quad c_n''(x) = 4\pi i n c_n(x) \quad n \in \mathbb{Z}$$

per ogni $x > 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Abbiamo così trovato che i coefficienti $c_n(x)$ dello sviluppo in serie di u sono soluzioni di un sistema infinito di equazioni differenziali omogenee a coefficienti costanti nella variabile x . Si noti che ciascuna equazione è indipendente dalle altre. Per trovare le condizioni iniziali dell'ennesima equazione, bisognerà attingere alle due condizioni iniziali (5.3) del problema. Dalla prima otteniamo che i coefficienti di Fourier di $u(0, t)$ e $f(t)$ sono gli stessi, cioè

$$(5.6) \quad c_n(0) = \hat{f}(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Poichè i coefficienti di Fourier di una funzione costante sono tutti zero tranne quello di posto zero, la seconda condizione in termini dei coefficienti di Fourier può essere espressa al seguente modo

$$(5.7) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} c_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 0 \\ l & \text{se } n = 0. \end{cases}$$

Abbiamo così ottenuto le due condizioni iniziali (5.6) e (5.7) per l'equazione differenziale (5.5) di posto n . Ora l'equazione caratteristica di tale equazione è

$$(5.8) \quad \lambda^2 = 4\pi i n$$

e le sue soluzioni dipendono dal segno di n ; poichè le radici di i sono $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ e quelle di $-i$ sono $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$, le soluzioni sono

$$\begin{array}{lll} \lambda_1(n) = \sqrt{2\pi|n|}(1+i) & \lambda_2(n) = -\sqrt{2\pi|n|}(1+i) & n > 0 \\ \lambda_1(n) = \sqrt{2\pi|n|}(1-i) & \lambda_2(n) = -\sqrt{2\pi|n|}(1-i) & n < 0 \\ \lambda_1(n) = 0 & \lambda_2(n) = 0 & n = 0 \end{array}$$

Quindi se $n \neq 0$ l'integrale generale dell'equazione (5.5), è

$$c_n(x) = \alpha e^{\lambda_1(n)x} + \beta e^{\lambda_2(n)x}.$$

Applicando le condizioni iniziali (5.6) e (5.7) per $n \neq 0$ si ottiene che $\alpha = 0$ e $\beta = \hat{f}(n)$. Se $n = 0$ la soluzione è ovviamente $c_0(x) = \hat{f}(0)$. Riassumendo abbiamo trovato la soluzione

$$c_n(x) = \hat{f}(n) e^{\lambda_2(n)x} \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Conviene scrivere λ_2 in forma più “compatta” usando la funzione $\text{sign}(n)$: $\lambda_2(n) x = -\sqrt{2\pi|n|}(1 + i\text{sign}(n))x$ e quindi

$$c_n(x) = \hat{f}(n)e^{-\sqrt{2\pi|n|}(1+i\text{sign}(n))x} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Abbiamo così trovato tutti i coefficienti di una possibile soluzione del problema. Scriviamo allora lo sviluppo in serie di u .

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{-\sqrt{2\pi|n|}(1+i\text{sign}(n))x} e^{2\pi int}.$$

Separando la parte reale dalla parte immaginaria nell’esponente delle esponenziali e raccogliendo a fattore si ottiene finalmente

$$(5.9) \quad u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{-\sqrt{2\pi|n|x}} e^{[2\pi nt - \sqrt{2\pi|n|x} \text{sign}(n)]i}.$$

Abbiamo così una possibile soluzione del problema. Dobbiamo verificare che soddisfa tutte le condizioni del problema. Calcolando in $x = 0$ entrambi i termini si ottiene, per la regolarità assunta su f , che è soddisfatta la condizione $u(0, t) = f(t)$ per ogni t .

Per il teorema sulla caratterizzazione delle funzioni C_1^∞ si ha che, per ogni $x > 0$, la funzione $t \rightarrow u(x, t)$ è C_1^∞ . Infatti i coefficienti di Fourier della serie in (5.9) sono una successione a decrescenza rapida:

$$|\hat{f}(n)e^{-\sqrt{2\pi|n|x}} e^{-\sqrt{2\pi|n|x} \text{sign}(n)i}| < \|f\|_1 e^{-\sqrt{2\pi|n|x}}.$$

Proviamo che per ogni $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ la funzione $x \rightarrow u(x, t)$ è in $C^\infty(0, +\infty)$. Sia t fissato e sia $\delta > 0$, in ogni intervallo $(\delta, +\infty)$ la serie (5.9) converge totalmente e quindi uniformemente, e quindi u è continua rispetto a x in $(0, +\infty)$. Applicando il teorema di derivazione termine a termine si ottiene che u è C^∞ rispetto a x in $(0, +\infty)$.

Queste considerazioni ci assicurano che le operazioni di derivazione sotto il segno eseguite nella procedura euristica sono lecite, e quindi la funzione in (5.9) è soluzione del problema.

Interpretazione della formula risolutiva e risposta al problema iniziale.

Dalla formula (5.9) si vede come cambia la componente armonica di posto n nel passaggio dalla superficie alla profondità x : l’ampiezza $\hat{f}(n)$ viene moltiplicata per il fattore $e^{-\sqrt{2\pi|n|x}}$ mentre il termine $e^{2\pi int}$ viene modificato in $e^{[2\pi nt - \sqrt{2\pi|n|x} \text{sign}(n)]i}$. Quindi l’armonica viene smorzata e traslata.

Assumiamo come modello per l’evoluzione della temperatura sulla superficie nell’arco di un anno la funzione seno:

$$f(t) = \sin(2\pi t) = \frac{e^{2\pi ti} - e^{-2\pi ti}}{2i}.$$

Poichè tutti i coefficienti di Fourier di f sono zero tranne $\hat{f}(1) = \frac{1}{2i}$ e $\hat{f}(-1) = -\frac{1}{2i}$ dalla (5.9) si ha

$$u(x, t) = \frac{1}{2i} e^{-\sqrt{2\pi} x} \left[-e^{(\sqrt{2\pi} x - 2\pi t)i} + e^{(-\sqrt{2\pi} x + 2\pi t)i} \right] = e^{-\sqrt{2\pi} x} \sin(2\pi t - \sqrt{2\pi} x)$$

Possiamo ora chiarire il significato della richiesta di individuare la profondità a cui le stagioni si invertono completamente. Vogliamo trovare la profondità a cui l'andamento della temperatura presenta un massimo esattamente quando in superficie si ha un minimo e viceversa. Ovviamente ciò accadrà quando la traslazione sarà di mezzo periodo, cioè alla profondità $x_o = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$.

Ora se al posto del coefficiente $k = 0.5$ sostituiamo il coefficiente di conducibilità termica del suolo si ottiene la profondità di 4 metri.

Esercizio 5.6 L'ipotesi $f \in C_1^0$ può bastare per arrivare allo stesso risultato ?

6. Il problema del calore in un disco isolato.

Heat, like gravity, penetrates every substance of the universe, its rays occupy all parts of space. The object of our work is to set forth the mathematical laws which this element obeys. The theory of heat will hereafter form one of the most important branches of general physics.

J. Fourier - Analytical Theory of Heat

In questa sezione risolviamo il problema di Dirichlet. L'equazione del calore in due dimensioni è la seguente

$$(6.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = k \Delta u = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

In condizioni di equilibrio termico la soluzione è indipendente dal tempo e l'equazione si riduce a

$$\Delta u = 0.$$

Problema di Dirichlet. Sia

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}, \quad \bar{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

e

$$\partial D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Sia $f : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Vogliamo trovare una funzione $u : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- i) $u \in C^2(D) \cap C^0(\bar{D})$
- ii) $\Delta u = 0$ su D
- iii) $u = f$ su ∂D

Discussione euristica. Per trovare una formula risolutiva procediamo euristica-mente, supponendo che una soluzione del problema esista. Conviene introdurre le coordinate polari. Denotiamo con $U : (0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e con $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni

$$\begin{aligned} U(r, \theta) &= u(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \\ F(\theta) &= f(\cos(\theta), \sin(\theta)) \end{aligned}$$

Esprimendo il Laplaciano in coordinate polari si ottiene che U è soluzione dell'equazione

$$(6.2) \quad U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} = 0.$$

per ogni $(r, \theta) \in (0, 1) \times \mathbb{R}$. Inoltre per la condizione al bordo si ha

$$(6.3) \quad U(1, \theta) = F(\theta)$$

per ogni $\theta \in \mathbb{R}$. Supponiamo che per ogni $0 < r < 1$ fissato $U(r, \theta)$ sia sviluppabile in serie di Fourier e sia

$$U(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(r) e^{in\theta},$$

il suo sviluppo. Per trovare i coefficienti $a_n, n \in \mathbb{Z}$ supponiamo di poter derivare termine a termine due volte e sostituiamo nell'equazione differenziale (6.2). Si ha

$$\sum_n \left[a_n''(r) + \frac{1}{r}a_n'(r) + \frac{1}{r^2}(in)^2 a_n(r) \right] e^{in\theta} = 0$$

per ogni θ e $0 < r < 1$. E quindi si ha

$$(6.4) \quad a_n''(r) + \frac{1}{r}a_n'(r) - \frac{n^2}{r^2}a_n(r) = 0$$

per ogni $n \in \mathbb{Z}$ e $0 < r < 1$. Abbiamo così ottenuto un sistema di infinite equazioni differenziali di tipo omogeneo nell'incognita r . La condizione al bordo da affiancare alla n -sima equazione si ottiene dalla (6.3):

$$(6.5) \quad a_n(1) = \hat{F}(n)$$

$n \in \mathbb{Z}$. Per risolvere (6.4) cerchiamo una soluzione della forma $a_n(r) = c_n r^p$ dove $c_n \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{Z}$. Sostituendo questa funzione nell'equazione (6.4) si ha

$$p(p-1)r^{p-2} + \frac{1}{r}pr^{p-1} - \frac{n^2}{r^2}r^p = 0$$

e raccogliendo a fattore r^{p-2} , si ottiene $p = \pm|n|$. Pertanto la soluzione generale della (6.4) è una combinazione lineare delle due soluzioni linearmente indipendenti $a_n(r) = r^{-|n|}$ e $a_n(r) = r^{|n|}$. La prima soluzione va scartata perchè non è infinitesima per $|n| \rightarrow \infty$ e contrasta con il Teorema di Riemann Lebesgue, si ottiene così $a_n(r) = c_n r^{|n|}$. Dalla (6.3) si ha $a_n(1) = \hat{F}(n) = c_n$. Abbiamo così ottenuto i coefficienti di Fourier di U

$$a_n(r) = \hat{F}(n)r^{|n|} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Quindi

$$(6.6) \quad U(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{F}(n)r^{|n|}e^{in\theta} = P_r * F(\theta).$$

Passando alle coordinate polari, abbiamo così trovato una possibile formula risolutiva per il problema di Dirichlet.

Dobbiamo ora verificare che l'espressione trovata (6.6) è effettivamente soluzione del problema. Osserviamo che, spezzando in due la somma, il primo membro si può scrivere

$$(6.7) \quad U(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(n) r^n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{F}(-n) r^n e^{-in\theta},$$

che suggerisce di usare la teoria delle funzioni di variabile complessa. Poniamo $z = x + iy = re^{i\theta}$ identificando un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con il punto $z = x + iy$ del piano complesso. Scriveremo perciò indifferentemente $u(x, y)$ oppure $u(z)$, o ancora $u(re^{i\theta})$ e $f(\cos(\theta), \sin(\theta))$ oppure $f(e^{i\theta})$. Cambiando variabile, la (6.7) si riscrive

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(n) z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{F}(-n) \bar{z}^n = L_1(z) + L_2(\bar{z}),$$

dove abbiamo posto

$$(6.8) \quad L_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(n) z^n \quad L_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{F}(-n) z^n$$

(si noti che le funzioni dipendono dal dato al bordo f). Possiamo dunque dedurre la regolarità di u da quella delle funzioni L_1 e L_2 .

Lemma 6.1. *Sia $f : \partial D \rightarrow \mathbf{C}$ una funzione continua e sia F la funzione definita da $F(\theta) = f(e^{i\theta})$. Allora si ha*

i) *le funzioni L_1 e L_2 in (6.8) sono analitiche in D .*

ii) *La funzione*

$$L(z) = \begin{cases} L_1(z) + L_2(\bar{z}) & \text{se } z \in D \\ f(z) & \text{se } z \in \partial D. \end{cases}$$

è C^∞ su D e continua su \bar{D} .

iii) *se f è reale anche L è reale.*

Dimostrazione. i) Poichè F è continua la successione $(\hat{F}(n))$ è infinitesima e quindi limitata. Quindi le serie che definiscono L_1 e L_2 hanno raggio di convergenza almeno 1. Quindi L_1 e L_2 sono analitiche in D .

ii) $L_2(\bar{z})$ non è analitica, perché la coniugazione non preserva l'analiticità, però è C^∞ in D . Quindi la funzione L è C^∞ in D ; proviamo che è continua sul bordo, cioè che per ogni P_o di coordinate polari $(1, \theta_0)$ si ha

$$\lim_{(r, \theta) \rightarrow (1, \theta_0)} L(re^{i\theta}) = F(\theta_0).$$

Osserviamo che

$$(6.9) \quad L(re^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{F}(n)r^{|n|}e^{in\theta} = P_r * F(\theta)$$

e stimamo la differenza

$$(6.10) \quad |L(re^{i\theta}) - F(\theta_0)| \leq |P_r * F(\theta) - F(\theta)| + |F(\theta) - F(\theta_0)|.$$

Poichè F è continua, per il Teorema 2.13 si ha $\|P_r * F - F\|_{C_{2\pi}^0} \rightarrow 0$, cioè

$$\lim_{r \rightarrow 1} \max_{\theta \in [0, 2\pi)} |P_r * F(\theta) - F(\theta)| = 0.$$

Dalla (6.10), per la continuità di F ne segue la tesi.

iii) Dalla (6.9) la tesi segue subito perché il prodotto di convoluzione fra due funzioni reali è reale. \square

Teorema 6.2. *Sia $f : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ continua e denotiamo con F la funzione definita da $F(\theta) = f(e^{i\theta})$ per $\theta \in \mathbb{R}$. Sia $u = u(x, y)$ la funzione su \bar{D} definita da*

$$(6.11) \quad u(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \begin{cases} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{F}(n)r^{|n|}e^{in\theta} & \text{se } 0 < r < 1 \\ F(\theta) & \text{se } r = 1. \end{cases}$$

$x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta)$. Allora $u \in C^\infty(D) \cap C^0(\bar{D})$ ed è soluzione del problema di Dirichlet.

Dimostrazione. Dalla formula (6.11) che esprime u , spezzando la somma, si ha

$$\begin{aligned} u(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) &= \sum_{n \geq 0} \hat{F}(n)r^{|n|}e^{in\theta} + \sum_{n < 0} \hat{F}(n)r^{|n|}e^{in\theta} \\ &= \sum_{n \geq 0} \hat{F}(n)r^{|n|}e^{in\theta} + \sum_{n > 0} \hat{F}(-n)r^{|n|}e^{-in\theta}. \end{aligned}$$

Ponendo $z = x + iy = re^{i\theta}$ si ottiene:

$$u(x, y) = L_1(x + iy) + L_2(x - iy)$$

dove $L_1(z)$ e $L_2(z)$ sono le funzioni in (6.8). Dal Lemma 6.1 segue subito che $u \in C^\infty(D) \cap C^0(\bar{D})$. Per provare che $\Delta u = 0$ basta osservare che, per la regolarità di u , sono lecite tutte le operazioni di derivazione sotto il segno di serie fatte nella discussione euristica che precede il Lemma 6.1. \square

7. Il problema del calore su un filo circolare.

In questa sezione risolviamo il seguente problema: assegnata la temperatura iniziale in tutti i punti di un filo conduttore circolare, si vuole determinare la temperatura di ogni punto del filo negli istanti successivi.

Come vedremo, procedendo in maniera euristica, si trova una famiglia di identità approssimate “naturalmente e intrinsecamente associata al problema”, che svolge un ruolo analogo a quello svolto dal nucleo di Poisson nel problema del disco isolato. Prima di formulare analiticamente il problema introduciamo questa nuova famiglia: la famiglia

$$(7.1) \quad \omega_t(x) = \sum_n e^{-n^2 t} e^{inx} \quad t > 0$$

si chiama *nucleo di Gauss-Weierstrass* o *nucleo del calore*.

Teorema 7.1. *i) Per ogni $t > 0$ la funzione ω_t è in $C_{2\pi}^\infty$ e soddisfa l'identità di Jacobi:*

$$\omega_t(x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_k e^{-(x-2k\pi)^2/4t}.$$

*ii) La famiglia $\omega_t, t > 0$, è una identità approssimata in senso forte e per ogni $f \in L_{2\pi}^1$ si ha $f * \omega_t \in C_{2\pi}^\infty$; inoltre*

$$f * \omega_t(x) = \sum_n \hat{f}(n) e^{-n^2 t} e^{inx}.$$

Dimostrazione. i) Sia $t > 0$; allora $\omega_t \in C_{2\pi}^\infty$ perchè i suoi coefficienti di Fourier sono una successione a decrescenza rapida. Lasciamo come esercizio la dimostrazione dell'identità di Jacobi (Esercizio 2.16). Osserviamo che l'identità è conseguenza immediata della formula di sommazione di Poisson, che vedremo più avanti.

ii) Poichè le funzioni ω_t sono positive e hanno media 1, dobbiamo provare solo che vale la (2.18) che riscriviamo

$$(7.2) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \max_{\delta \leq |x| \leq \pi} \omega_t(x) = 0, \quad 0 < \delta < \pi.$$

Sia $0 < \delta < \pi$, denotiamo con I_δ l'insieme definito da $\delta \leq |x| \leq \pi$. Dall'identità di Jacobi, spezzando la somma e cambiando variabile si ha

$$(7.3) \quad \omega_t(x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \left(\sum_{|k| \leq 1} e^{-(x-2k\pi)^2/4t} + \sum_{k=2}^{+\infty} e^{-(x-2k\pi)^2/4t} + \sum_{k=2}^{+\infty} e^{-(x+2k\pi)^2/4t} \right)$$

Stimiamo la prima somma; si ha

$$\max_{I_\delta} e^{-x^2} = e^{-\delta^2}.$$

Poichè in I_δ le funzioni $e^{-(x-2\pi)^2}$ e $e^{-(x+2\pi)^2}$ sono rispettivamente crescente e decrescente si ha

$$\max_{I_\delta} e^{-(x-2\pi)^2} = e^{-\pi^2} \leq e^{-\delta^2}, \quad \max_{I_\delta} e^{-(x+2\pi)^2} = e^{-\pi^2} \leq e^{-\delta^2}.$$

Così abbiamo provato che la prima somma si maggiora con $3 e^{-\frac{\delta^2}{4t}}$. Stimiamo ora la seconda somma in (7.3); poichè per $k \geq 2$ si ha $(1-2k)^2 > k^2$, allora per $x \in I_\delta$ si ha

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{+\infty} e^{-(x-2k\pi)^2/4t} &< \sum_{k=2}^{+\infty} e^{-\pi^2(1-2k)^2/4t} < \sum_{k=2}^{+\infty} e^{-\pi^2 k^2/4t} < \\ &< \int_1^{+\infty} e^{-\pi^2 x^2/4t} dx = \frac{\sqrt{4t}}{\pi} \int_{\pi/\sqrt{4t}}^{+\infty} e^{-y^2} dy. \end{aligned}$$

In maniera analoga si prova che la terza somma in (7.3) si maggiora con la stessa quantità. Quindi

$$\max_{\delta \leq |x| \leq \pi} \omega_t(x) \leq \sqrt{\frac{\pi}{t}} \left[3 e^{-\frac{\delta^2}{4t}} + 2 \frac{\sqrt{4t}}{\pi} \int_{\pi/\sqrt{4t}}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right]$$

Poichè il secondo membro tende a zero per $t \rightarrow 0$ abbiamo provato la (7.2) e quindi che la famiglia (ω_t) è una identità approssimata in senso forte. Il resto del punto ii) è diretta conseguenza della teoria svolta nella Sezione 3 (Lemma 3.7). Il teorema è così completamente dimostrato. \square

Il problema Supponiamo sia assegnata la temperatura iniziale f di ogni punto di un conduttore circolare di raggio 1. È conveniente pensare alla funzione temperatura iniziale come ad una funzione f definita su tutto \mathbb{R} , periodica di periodo 2π . Sia $u(x, t)$, $x \in [0, 2\pi]$ e $t \in [0, +\infty)$ la temperatura del punto x all'istante t . Denotiamo con \mathcal{S} la striscia $\mathcal{S} = [0, 2\pi] \times (0, +\infty)$. Supporremo per semplicità che la costante di diffusione termica nell'equazione del calore sia uguale ad 1. Il problema da risolvere è dunque il seguente: assegnata $f \in C_{2\pi}^0$, determinare una funzione u definita in $\overline{\mathcal{S}}$ tale che

- i) per ogni $t > 0$ la funzione $x \rightarrow u(x, t)$ è in $C_{2\pi}^2$ e per ogni $x \in [0, 2\pi]$ la funzione $t \rightarrow u(x, t)$ è in C^1 in $(0, +\infty)$
- ii) si ha

$$(7.4) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

per ogni $(x, t) \in S$

iii) $u(x, 0) = f(x)$ per ogni $x \in [0, 2\pi]$

Anche in questo caso troveremo una formula risolutiva ragionando in maniera euristica. Supponiamo che esista una soluzione del problema e che per ogni $t \geq 0$ la funzione $x \rightarrow u(x, t)$ sia sviluppabile in serie di Fourier:

$$(7.5) \quad u(x, t) = \sum c_n(t) e^{inx}$$

Supponendo che sia lecito, deriviamo sotto il segno di somma due volte rispetto a x e una volta rispetto a t . Uguagliando i coefficienti di Fourier degli sviluppi in serie delle derivate, si ottiene il sistema di infinite equazioni differenziali del primo ordine a coefficienti costanti:

$$c'_n(t) = -n^2 c_n(t) \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Le condizioni iniziali di queste equazioni si ottengono dalla condizione iniziale del problema che si traduce, in termini dei coefficienti di Fourier, $c_n(0) = \hat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. La soluzione di

$$c'_n(t) = -n^2 c_n(t) \quad c_n(0) = \hat{f}(n)$$

è $c_n(t) = \hat{f}(n) e^{-n^2 t}$. Abbiamo così ottenuto la formula

$$(7.6) \quad u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t} \hat{f}(n) e^{inx} = \omega_t * f(x), \quad t > 0$$

che esprime u come prodotto di convoluzione della funzione condizione iniziale per il nucleo di Weierstrass. Mostriamo ora che la funzione

$$(7.7) \quad u(x, t) = \begin{cases} \omega_t * f(x) & \text{se } t > 0 \\ f(x) & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

è soluzione del problema. Verifichiamo che le operazioni di derivazione sotto il segno di somma sono lecite. Sia $\delta > 0$ si ha

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |e^{-n^2 t} \hat{f}(n) e^{inx}| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |e^{-n^2 \delta} \hat{f}(n)| \quad t \geq \delta.$$

Poichè la successione $(\hat{f}(n))$ è limitata, possiamo concludere che la serie in (7.6) converge uniformemente in $[0, 2\pi] \times [\delta, +\infty)$. Usando ripetutamente il teorema di derivazione termine a termine, si ottiene che u e tutte le sue derivate sono continue come funzioni di due variabili in $[0, 2\pi] \times [\delta, +\infty)$ per ogni $\delta > 0$, e quindi u è in $C^\infty(\mathcal{S})$.

Mostriamo ora che la funzione u in (7.7) è continua in $\bar{\mathcal{S}}$. Sia $x_o \in [0, 2\pi]$ fissato. Aggiungendo e togliendo $f(x_o)$ si ottiene

$$|u(x, t) - f(x_o)| \leq |u(x, t) - f(x)| + |f(x) - f(x_o)|.$$

Per il Teorema 2.13 $u = \omega_t * f$ converge uniformemente a f per $t \rightarrow 0$; da ciò e dalla continuità di f si ottiene

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} u(x,t) = f(x_0).$$

Infine, la funzione u in (7.7) è soluzione dell'equazione (7.4) in S perchè, per le considerazioni fatte sopra, le derivazioni sotto il segno eseguite nella derivazione euristica della funzione u sono lecite.

Abbiamo così completamente risolto il problema.

8. Note

- 1 Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), era un amministratore un diplomatico e un matematico. Dal carattere rivoluzionario, condusse una vita avventurosa: presidente di comitati rivoluzionari, docente alla École Polytechnique, al seguito di Napoleone nella campagna d'Egitto. Vedi il primo capitolo del libro [10] di E. Prestini .
- 2 Ricordiamo che esiste una metrica su C_T^∞ , che però non è indotta da una norma.
- 3 Quando si guarda a $L_{2\pi}^p, 0 \leq p \leq \infty$, si deve pensare ad uno spazio i cui elementi non sono funzioni ma classi di equivalenza, due funzioni appartengono ad una stessa classe di equivalenza se e solo se coincidono quasi ovunque. Per semplicità di linguaggio lasceremo sottintesa questa distinzione e continueremo a parlare di questi spazi come spazi di funzioni.
- 4 In queste note la convergenza (puntuale o in norma) della serie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}$ è intesa come limite (puntuale o in norma) della somma parziale "simmetrica"

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n)e^{inx}.$$

Ricordiamo che un sistema ortonormale $\{\mathcal{E} = e_n : n \in Z\}$ di elementi di uno spazio di Hilbert si dice completo se l'unico elemento dello spazio ortogonale a tutti gli elementi di \mathcal{E} è l'elemento nullo.

Inoltre una famiglia $F = \{f_n : n \in Z\}$ di elementi di uno spazio di Hilbert è una base se ogni elemento dello spazio si può scrivere in un unico modo come combinazione lineare (eventualmente infinita) degli elementi della base (convergente nel senso della norma).

Sappiamo dalla teoria degli spazi di Hilbert che ogni base ortonormale è un sistema ortonormale completo e viceversa.

- 5 Più generale: se $0 < q < p < \infty$ allora $L_{2\pi}^p \subset L_{2\pi}^q$ e $\|f\|_q \leq \|f\|_p$. La dimostrazione di questa disuguaglianza, che è basata sulla disuguaglianza di Hölder, si può trovare sul libro di R. E. Edwards [4], pag 28.
 Ricordiamo la disuguaglianza di Hölder: siano $1 \leq r, s \leq \infty$ e $1/r + 1/s = 1$. Se $f \in L_{2\pi}^r, g \in L_{2\pi}^s$ allora si ha $\|fg\|_1 \leq \|f\|_r \|g\|_s$.
 Nello stesso volume (pag 29) si possono trovare le inclusioni relative agli spazi ℓ^p : se $0 < q < p < \infty$ si ha

$$\ell^q \subset \ell^p \subset \ell^\infty$$

$$\text{e } \|c\|_\infty \leq \|c\|_p \leq \|c\|_q.$$

- 5 Lejeune Dirichlet visse nel 1800 e diede rilevanti contributi in Teoria algebrica dei numeri, Teoria analitica dei numeri, Teoria del potenziale e Serie di Fourier.

6 In realtà le ipotesi del lemma si possono indebolire; infatti basta che $f \in C_{2\pi}^{q-1}$ e f^{q-1} assolutamente continua. Una funzione si dice assolutamente continua se è derivabile q.o., $f' \in L_{2\pi}^1$ e $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)dt$.

7 L'esempio di Fejer si può trovare in [4] p.161.

8 M. Lacey e C.Thiele hanno provato questo risultato in maniera più semplice e molto più breve (10 pagine).

9 Si può definire il prodotto di convoluzione anche fra successioni: se $a = (a_n)$ e $b = (b_n)$ il prodotto di convoluzione fra a e b è la successione definita da

$$(8.1) \quad (a * b)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{n-k} b_k \quad n \in \mathbb{Z}$$

Vale il seguente

Teorema Siano $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ e r tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Se $a \in \ell^p$ e $b \in \ell^q$ allora si ha $a * b \in \ell^r$ e

$$(8.2) \quad \|a * b\|_{\ell^r} \leq \|a\|_{\ell^p} \|b\|_{\ell^q}.$$

Per p e q uguali ad 1 la dimostrazione è molto semplice.

9 . Esercizi. Serie di Fourier in $L^2_{2\pi}$ e $L^1_{2\pi}$.

1.1 Sia $f \in L^p_T(\mathbf{R})$ provare che per ogni numero reale a si ha $\int_0^T |f(x)|^p dx = \int_a^{a+T} |f(x)|^p dx$. Dedurre l'invarianza per traslazioni dello spazio L^p_T

1.2 (S) Questo esercizio stabilisce le relazioni (vedi (9.1) (9.2) qui sotto) fra i coefficienti di Fourier di una funzione secondo i due sistemi ortonormali completi di $L^2_{2\pi}$

$$\mathcal{E} = \{e^{ikx}, k \in \mathbf{Z}\} \quad \mathcal{S} = \{1, \sqrt{2} \sin kx, \sqrt{2} \cos kx, k \in \mathbf{N}\}.$$

Sapendo che \mathcal{S} è una base ortonormale di $L^2_{2\pi}$ (visto nel corso di IAS) verificare che anche \mathcal{E} lo è.

La serie di Fourier di una funzione $f \in L^2_{2\pi}$ secondo il sistema reale \mathcal{S} , si scrive

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

dove

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx,$$

$n \in \mathbf{N}$. Mostrare le relazioni

$$(9.1) \quad a_0 = 2\hat{f}(0), \quad a_n = \hat{f}(n) + \hat{f}(-n) \quad b_n = i[\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)],$$

dalle quali si ricava

$$(9.2) \quad \hat{f}(n) = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad \hat{f}(-n) = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \quad n \geq 0.$$

1.3 (S) Dimostrare le proprietà della trasformata di Fourier (Teorema 2.1).Provare inoltre che se $f \in L^1_{2\pi}$ e $k, \ell \in \mathbf{Z}$ si ha $\widehat{e_k f} = \hat{f}(\ell - k)$ dove $e_k(x) = e^{ikx}$.

1.4 (S)

i) Sia $f \in L^2_{2\pi}$ e sia $c_n = \hat{f}(n), n \in \mathbf{Z}$. Mostrare che

$$\begin{aligned} f \text{ reale} &\Leftrightarrow c_{-n} = \overline{c_n}, \quad n \in \mathbf{Z} \\ f \text{ reale} &\Leftrightarrow a_n \text{ e } b_n \text{ reali, } n \in \mathbf{N} \\ f \text{ pari} &\Leftrightarrow c_{-n} = c_n, \quad n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow b_n = 0, \quad n \in \mathbf{N} \\ f \text{ dispari} &\Leftrightarrow c_{-n} = -c_n, \quad n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow a_n = 0, \quad n \in \mathbf{N} \\ f \text{ reale, pari} &\Leftrightarrow (c_n) \text{ reale pari} \\ f \text{ reale, dispari} &\Leftrightarrow (c_n) \text{ immaginaria, dispari} \end{aligned}$$

Le proprietà sulla sinistra sono intese in senso quasi ovunque.

- ii) Sia $f \in L_T^2$. Allora $f \in L_{2T}^2$. Trovare la relazione fra i coefficienti di Fourier delle due funzioni. Scrivere le due espansioni in serie di Fourier.

Dunque il punto i) mostra che la successione dei coefficienti di Fourier $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ riflette la parità o disparità della funzione. Inoltre nella serie di Fourier di una funzione pari compaiono solo i termini nei coseni, e nella serie di Fourier di una funzione dispari compaiono solo i seni.

1.5 (S) Scrivere la serie di Fourier della funzione di periodo 2π che nell'intervallo $[0, 2\pi]$ coincide con $\sin^2(x)$.

1.6 Sia $f \in L_{2\pi}^1$ e sia $P(x) = \sum_{|n| \leq N} c_n e^{inx}$. Trovare i coefficienti di Fourier di fP . (Confrontare con il risultato dell'esercizio 2.16, punto iv) più avanti).

1.7 Sia f la funzione 2π -periodica tale che nell'intervallo $[0, \pi]$ è uguale a $\sin(t)$ e in $(\pi, 2\pi]$ è uguale a zero. La sua serie di Fourier è

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin t - \frac{2}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{1}{(2n)^2 - 1} \cos(2nt).$$

Usando una delle proprietà del Teorema 2.1, trovare la serie di Fourier della funzione dello stesso periodo tale che

$$g(t) = \begin{cases} -\cos t & \text{se } t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi] \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1.8 Trovare la serie di Fourier della funzione f , periodica di periodo 2, che nell'intervallo $(-1, 1)$ è uguale a $e^{i\pi z t}$, $z \in \mathbf{C}$.

Dedurre la relazione

$$\frac{\pi^2}{(\sin(\pi x))^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x - n)^2} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}.$$

1.9 *** È assegnata la funzione f , 2π -periodica così definita in $[0, 2\pi)$

$$f(x) = \log(2 \sin(x/2))$$

- i) verificare che f è pari.
 ii) dire se è in $L_{2\pi}^1$ e se è in $L_{2\pi}^2$

iii) Mostrare che la sua serie di Fourier è

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(nx).$$

Per calcolare i coefficienti $a_n, n \geq 1$ di questa serie utilizzare l'osservazione (da verificare) che

$$I_n = \int_0^{\pi} \cot(x/2) \sin(nx) dx \quad n \geq 1$$

non dipende da n . Per mostrare che $a_0 = 0$ utilizzare il seguente integrale

$$\int_0^{\pi/2} \log(\sin(x)) dx = -\pi/2 \log(2)$$

che può essere ottenuto mediante integrazione complessa (non è richiesto il calcolo dell'integrale).

1.10 Mostrare tutte le affermazioni contenute nell'Esempio 2.1

1.11 Provare tutte le affermazioni contenute nell'Esempio 2.2.

1.12 Provare tutte le affermazioni contenute nell'Esempio 2.3.

Sugg:
$$\sum_0^{\infty} r^n e^{inx} = \frac{1 - r \cos x}{1 - 2r \cos x + r^2} + i \frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2}.$$

1.13 Provare gli Esercizi 2.1, 2.2, 2.3 sul prodotto di convoluzione fra una funzione di L^1 e i nuclei di Dirichlet, di Fejer e di Poisson contenuti della Sezione 2 del Capitolo.1.

1.14 Provare che la famiglia $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ è un'identità approssimata in senso forte (Proposizione 2.6).

1.15 Provare che la famiglia $\{P_r, 0 < r < 1\}$ è un'identità approssimata in senso forte (Proposizione 2.6).

1.16 (*)** Mostrare che la famiglia $\{D_n, n \in \mathbb{N}\}$ non è una identità approssimata

1.17 Verificare che nella dimostrazione del Corollario 2.10 si può usare il nucleo di Poisson al posto del nucleo di Fejer (usare la formula (2.16)).

1.18 Provare il Lemma 2.12 e il Teorema 2.13.

Suggerimento: Per la verifica della continuità di $u_n * f$ usare il teorema della convergenza dominata. Le dimostrazioni del lemma e del teorema sono analoghe a quelle del Lemma 2.8 e del Teorema 2.9.

1.19 Usando il Teorema 2.9 mostrare che il sistema ortogonale $\{e^{inx} | n \in \mathbb{Z}\}$ in $L^2_{2\pi}$ è completo ⁽²⁾.

Quindi, abbiamo una dimostrazione che si tratta di una base di $L^2_{2\pi}$ ⁽²⁾.

1.20 Provare che $\mathcal{P}_{2\pi}$ è denso in $C^0_{2\pi}$ usando il Teorema 2.13.

1.21 Costruire un esempio di identità approssimata.

1.22 Mostrare che se P è un polinomio trigonometrico non nullo di grado al più n allora P ha al più $2n$ zeri in $[0, 1)$.

Sugg Sia $P(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{2\pi i k x}$ considerare $Q(z) = z^n \sum_{|k| \leq n} c_k z^k$.

10 . Esercizi. Convergenza puntuale e applicazioni

2.1 i) Scrivere la serie di Fourier (nelle due forme reale e complessa) della funzione f periodica di periodo 2π che nell'intervallo $[0, 2\pi)$ è uguale a x^2 . Dedurne la serie della funzione $\tau_\pi f$.

ii) Scrivere la serie di Fourier (nelle due forme reale e complessa) della funzione periodica di periodo 2π che nell'intervallo $[-\pi, \pi)$ è uguale a x^2 . Confrontare i coefficienti di Fourier di questa funzione con quelli della funzione al punto i)

iii) Usando l'identità di Parseval (1.5), mostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

2.2 Scrivere le serie di Fourier della funzione periodica di periodo 2 che nell'intervallo $[-1, 1)$ è uguale a x . In alternativa trovare le serie di x^2 o di x^3 (sempre con periodo 2).

2.3 (***) Sia $f \in L^1_{2\pi}(\mathbf{R})$. Mostrare che sono equivalenti le proposizioni

i) Esistono due numeri reali positivi K e σ tali che $|\hat{f}(n)| \leq Ke^{-\sigma|n|}$ $n \in \mathbf{Z}$

ii) Esiste un $\epsilon > 0$ tale che f ammette una estensione analitica nella striscia $|\text{Im}(z)| < \epsilon$.

2.4 (***) Si consideri la funzione di variabile complessa dipendente dal parametro $0 < r < 1$:

$$F(z) = (1 - r^2) \frac{z}{(z - r)(1 - rz)}$$

Verificare che è olomorfa in una corona circolare contenente la circonferenza unitaria. Spiegare la relazione fra il suo sviluppo di Laurent e la serie di Fourier della funzione $P_r(x)$ in (2.8).

2.5 Sia f periodica di periodo 2π , derivabile e con derivata continua. Provare che la sua serie di Fourier converge uniformemente ad f eseguendo i seguenti passi:

a) mostrare che $\sum n^2 |\hat{f}(n)|^2 < \infty$,

b) dedurne che $\sum |\hat{f}(n)| < \infty$, e quindi che $\sum \hat{f}(n)e^{inx}$ converge ad una funzione g continua,

d) osservare che $f = g$ e concludere.

2.6 (S) Dire se la famiglia di funzioni 1-periodiche definite da

$$u_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } |x| \leq \frac{1}{2n} \\ 0, & \text{se } \frac{1}{2n} < |x| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

è una identità approssimata.

2.7 (*) Una funzione periodica di periodo 2π si dice assolutamente continua, e si scrive f A.C., se

i) è derivabile q.o.,

ii) f' è assolutamente integrabile in $[0, 2\pi]$ e, per ogni x , si ha

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt.$$

Mostrare che se $f \in C_{2\pi}^{q-1}(\mathbf{R})$, $q \geq 1$ e $f^{(q-1)}$ A.C. allora si ha

$$\widehat{f^{(p)}}(k) = (ik)^p \hat{f}(k)$$

per $p \leq q$ e per ogni $k \in \mathbf{Z}$. Ciò mostra che la tesi del Lemma 1.1 è vera in ipotesi più deboli.

2.8 (*) Usando il risultato dell'esercizio precedente mostrare che la serie di Fourier della funzione periodica di periodo 2π che nell'intervallo $[-\pi, \pi)$ è uguale a x^2 si può dedurre dalla serie di Fourier di x . Si può usare lo stesso risultato per dedurre la serie di x^3 da quella di x^2 ?

2.9 i) Sia f una funzione, continua nell'intervallo $[0, 2\pi)$, tale che

$$\lim_{x \rightarrow 2\pi^-} f(x) = f(2\pi^-) < \infty$$

e $f(0) \neq f(2\pi^-)$. Sia inoltre f' continua in $(0, 2\pi)$ con derivate finite agli estremi dell'intervallo. Allora la successione dei coefficienti di Fourier della funzione f_p ottenuta periodizzando f con periodo 2π è infinitesima di ordine 1.

Sugg: scrivere $\hat{f}_p(k)$ e integrare per parti.

ii) Usando il risultato del punto i) dire quale è l'ordine di infinitesimo delle successioni di Fourier delle funzioni periodiche di periodo 2π che nell'intervallo $[0, 2\pi)$, coincidono con e^x , x^3 , $\sinh(x)$.

2.10 Fornire una seconda dimostrazione del Teorema 3.7 per $n = 0$.

Sugg Usare l'osservazione che se $f \in C_{2\pi}^0$ e $g \in L_{2\pi}^1$ allora

$$\sup_{x \in [0, 2\pi]} |f * g(x)| \leq \|f\|_{C_{2\pi}^0} \|g\|_1$$

e che la traslazione τ_h è una operazione continua in $C_{2\pi}^0$ rispetto al parametro h (vedi Lemma 2.12).

2.11 (S) Siano f, g, h le tre funzioni 2π -periodiche così definite in $[0, 2\pi]$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad g(x) = \sin(x/2) \quad h(x) = \frac{3}{5 - 4 \cos x},$$

- a) trovare la loro serie di Fourier
- b) dire se, e in che senso, la somma parziale della loro serie di Fourier tende alla funzione.
- c) mettere in relazione la regolarità di ciascuna funzione con l'andamento a zero della successione dei coefficienti di Fourier.

2.12 (S) Si considerino le funzioni

$$f(x) = \frac{x}{2} \quad f(x) = \frac{|x|}{\pi} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } 0 < x \leq \pi \\ -\frac{1}{2} & \text{se } -\pi < x \leq 0. \end{cases}$$

disegnare il grafico di S_n e $f * F_n$. Dove compare il fenomeno di Gibbs?

2.13 Denotiamo con $\theta_t, t > 0$ la funzione introdotta nel Teorema 7.1

$$\theta_t(x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_k e^{-(x-2k\pi)^2/4t}.$$

e sia $w_t(x) = \sum e^{-n^2 t} e^{inx}$ (cfr (7.1)). Provare che $\theta_t(x) = w_t(x)$ per ogni x .
Sugg. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier, utilizzando la formula

$$\int e^{-x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx = \sqrt{\pi} e^{-\pi \xi^2}.$$

che sarà provata nel Cap.2.

2.14 Sia ω un numero reale minore di π . Denotiamo con χ_ω la funzione 2π -periodica definita da

$$\chi_\omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < \frac{\omega}{2} \\ 0 & \text{se } \frac{\omega}{2} < |x| < \pi \end{cases}$$

- i) Mostrare che la sua serie di Fourier è

$$\frac{\omega}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{sinc}\left(\frac{k\omega}{2}\right) e^{ikx}.$$

e dire se tende alla funzione, in caso positivo specificare in che senso.

- ii) Trovare la somma delle due serie

$$\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{sinc}^2\left(\frac{k\omega}{2}\right) e^{ikx} \quad i \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \text{sinc}^2\left(\frac{k\omega}{2}\right) e^{ikx}.$$

2.15 Dire se le seguenti implicazioni sono vere o false, motivando le risposte

- i) $f \in L^1_{2\pi} \Rightarrow \hat{f}(n) \rightarrow 0$
- ii) $a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ è la serie di Fourier di una funzione di $L^1_{2\pi}$
- iii) $f \in L^2_{2\pi} \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 < +\infty$
- iv) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 < +\infty \Rightarrow f \in L^2_{2\pi}$
- v) $f \in C^q_{2\pi}, \quad q \geq 1 \Rightarrow |\hat{f}(n)| < \text{cost}/|n|^q \quad \forall n$
- vi) $f \in C^1_{2\pi} \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty$
- vii) $f \in L^2_{2\pi}, \sum |\hat{f}(n)||n| < \infty \Rightarrow f \in C^1_{2\pi}$ (precisare il senso)

2.16 *** (Serie di Fourier di un prodotto) Siano f e g in $L^2_{2\pi}$. La formula (10.2) qui sotto fornisce i coefficienti di Fourier di fg .

- i) Mostrare che $fg \in L^1_{2\pi}$
- ii) Denotiamo con h_N il prodotto

$$h_N(x) = S_N(f, x)S_N(g, x) \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Mostrare che

$$(10.1) \quad \widehat{h_N}(n) = \begin{cases} \sum_{j \in \mathcal{I}_{n,N}} \hat{f}(n-j)\hat{g}(j) & \text{se } |n| \leq 2N \\ 0, & \text{se } |n| > 2N. \end{cases}$$

dove $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{n,N} = \{j : |j| \leq N, |j-n| \leq N\}$; vale a dire

$$\mathcal{I}_{n,N} = \{j : \max(n-N, -N) \leq j \leq \min(n+N, N)\}.$$

- iii) Provare che h_N tende a fg in $L^1_{2\pi}$.
- iv) Provare che

$$(10.2) \quad \widehat{(fg)}(n) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n-j)\hat{g}(j) \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- iv) Mettere in relazione questo risultato con l'Esercizio 1.6.

Capitolo II

Integrale di Fourier

Questo capitolo è dedicato all'integrale di Fourier

$$\int f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx$$

e alla trasformata di Fourier per le funzioni assolutamente integrabili e per le funzioni di quadrato integrabile su \mathbb{R} . Abbiamo visto che una funzione periodica di periodo T abbastanza regolare può essere sviluppata in serie di Fourier, cioè può essere scritta come combinazione lineare delle funzioni $e_n \in \mathbb{Z}$, $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$ con coefficienti dati da (1.3). In maniera analoga vedremo che, in opportune ipotesi, una funzione su \mathbb{R} può essere scritta come sovrapposizione continua delle funzioni esponenziali $e_y(x) = e^{2\pi i x y}$, aventi modulo 1, con coefficienti dipendenti da y (3.11). Gran parte dei risultati di questo capitolo hanno una forte analogia con fatti visti nel contesto delle serie di Fourier. Altri sono nuovi, come ad esempio le proprietà di invarianza della trasformata di Fourier sotto l'azione di dilatazioni (vedi il Teorema 3.1).

Nella Sezione 1 stabiliamo alcuni teoremi di densità necessari per la teoria e richiamiamo alcuni fatti visti nel corso di Istituzioni di Analisi Superiore. La Sezione 2 è dedicata al prodotto di convoluzione su \mathbb{R} e alle identità approssimate. Nella Sezione 3 introduciamo la trasformata di Fourier di funzioni assolutamente integrabili e la sua relazione con i principali operatori come la traslazione, la modulazione, la dilatazione e la derivazione. Inoltre affrontiamo il problema della inversione della trasformata di Fourier nel contesto delle funzioni assolutamente integrabili. Ultimo argomento di questa sezione è la Formula di Poisson, che riguarda entrambi i mondi delle funzioni definite su \mathbb{R} e delle funzioni periodiche. Questa formula riguarda la *periodizzazione* delle funzioni definite su \mathbb{R} , cioè la costruzione di una funzione periodica mediante sovrapposizione di infinite traslate di una funzione assegnata. La Sezione 4 è dedicata alla trasformata di Fourier di funzioni di quadrato sommabile, che in questo spazio assume una veste particolarmente elegante.

La Sezione 6 è dedicata interamente alle funzioni cosiddette a banda limitata, cioè le funzioni la cui trasformata di Fourier ha supporto in un intervallo limitato. Per queste funzioni vale il Teorema del campionamento di Shannon che ha

come conseguenza che ogni funzione a banda può essere ricostruita esattamente da campionature in punti equidistanti. La spaziatura fra i punti è ineversamente proporzionale all'ampiezza della banda. La Sezione 7 contiene una breve introduzione alla derivata debole in L^2 e agli spazi di Sobolev.

1 . Notazioni e richiami.

Con L^∞ denoteremo lo spazio delle funzioni essenzialmente limitate su \mathbb{R} , munito della norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} \text{ess}|f(x)|.$$

Con il simbolo L^p , $1 \leq p \leq \infty$, denoteremo lo spazio delle funzioni definite su \mathbb{R} , misurabili e tali che $|f|^p$ è integrabile su \mathbb{R} , munito della norma

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Lo spazio L^p , $1 \leq p < \infty$, è uno spazio di Banach. Lo spazio L^2 è anche uno spazio di Hilbert con prodotto interno

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Osservazione 1.1 In queste note studieremo gli integrali di Fourier per funzioni in L^1 e in L^2 . Si noti che $L^2 \not\subset L^1$ e $L^1 \not\subset L^2$. Una funzione di L^2 deve avere singolarità al finito meno “gravi” di quelle di una funzione di L^1 , in quanto fare il quadrato di una quantità grande la rende ancora più grande. All’infinito il discorso si rovescia: poichè fare il quadrato di quantità piccole le rende ancora più piccole, una funzione di L^2 può decrescere all’infinito più lentamente di una funzione di L^1 . Si pensi ad esempio alle funzioni

$$f(x) = \begin{cases} x^{-2/3} & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^{-2/3} & \text{se } x > 1, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La prima è in L^1 ma non in L^2 , mentre la seconda è in L^2 ma non in L^1 . Ricordiamo tuttavia che, in generale, una funzione di L^p non tende necessariamente a zero all’infinito. Ricordiamo che anche per lo spazio L^p su \mathbb{R} valgono le considerazioni fatte alla fine della Sezione 1 del Capitolo 1. Cioè la convergenza in norma non implica la convergenza quasi ovunque, né vale il viceversa.

Denoteremo con C^n , $n \geq 0$ lo spazio delle funzioni continue su \mathbb{R} con tutte le loro derivate fino all’ordine n e con C^∞ lo spazio delle funzioni che sono in C^n per ogni $n \geq 0$. Con C_c^n , $n \in \mathbb{N}$ o $n = +\infty$, denoteremo lo spazio delle funzioni in C^n che sono a supporto compatto.

Denoteremo con \mathcal{S} lo spazio delle funzioni in C^∞ a decrescenza rapida, cioè tali che

$$(1.1) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^{2k} |D^j \varphi(x)| = 0 \quad \forall j, k \in \mathbb{N}.$$

Si noti che questa condizione equivale a dire che per ogni $j, k \in \mathbb{N}$ esiste una costante $C_{j,k}$, dipendente solo da φ , tale che

$$(1.2) \quad |D^j \varphi(x)| \leq \frac{C_{j,k}}{(1+x^2)^k}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La verifica di questo è assegnata come esercizio (Esercizio 1.1 nella Sezione 8 di questo Capitolo).

In \mathcal{S} si definisce una famiglia di norme $\rho_k, k \in \mathbb{N}$, ponendo per ogni $f \in \mathcal{S}$

$$(1.3) \quad \rho_k(f) = \max_{0 \leq j \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)^k |D^j f(x)|.$$

Il fatto che per ogni k ρ_k sia una norma in \mathcal{S} si verifica facilmente. Si introduce inoltre la seguente nozione di convergenza ⁽¹⁾.

Definizione 1.1. Diremo che la successione (f_n) converge ad f in \mathcal{S} se si ha

$$(1.4) \quad \rho_k(f_n - f) \rightarrow 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Si prova che \mathcal{S} è completo rispetto alla convergenza della Definizione 1.1, cioè che ogni successione di Cauchy in converge. Più esplicitamente: se (f_n) è una successione di \mathcal{S} tale che $\lim_{n,m} \rho_k(f_n - f_m) = 0$ per ogni k , allora esiste una funzione $f \in \mathcal{S}$ tale che $\lim_n \rho_k(f_n - f) = 0$ per ogni k . (Per la dimostrazione vedi la prima parte del Teorema 7.4 in [10] pag. 168).

Introduciamo ora alcuni risultati di densità che ci saranno utili nel seguito.

Proposizione 1.2. Sia $1 \leq p < +\infty$. Si ha

$$C_c^\infty \subset C_c^0 \subset L^p$$

Inoltre C_c^∞ è denso in C_c^0 (nella norma del massimo) ed è denso in L^p .

Dimostrazione. Le inclusioni sono ovvie.

Il fatto che C_c^0 è denso in L^p è stato visto nel corso di *Istituzioni di Analisi Superiore*. Per provare che C_c^∞ è denso in C_c^0 nella norma del massimo, sia $f \in C_c^0$. Sia $T > 0$ tale che

$$\text{supp } f \subset \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right].$$

Per dimostrare la tesi ci serviremo del fatto che ogni funzione periodica continua può essere approssimata con polinomi trigonometrici (\mathcal{P}_{2T} è denso in C_{2T}^0 vedi Proposizione 2.14). Denotiamo con f^* la funzione periodica di periodo $2T$ che coincide con f nell'intervallo $[-T, T]$ (vedi Figura 1). Poichè $f^* \in C_{2T}^0$ si ha che per ogni $\epsilon > 0$ assegnato, esiste un polinomio trigonometrico P , di periodo $2T$, tale che

$$(1.5) \quad \max |f^* - P| < \epsilon.$$

A partire dal polinomio trigonometrico P costruiamo ora una funzione a supporto compatto che approssima f . Denotiamo con φ una funzione in C_c^∞ (2) tale che

$$0 \leq \varphi \leq 1 \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{se } |x| \geq T. \end{cases}$$

Si noti che, per come è stata costruita la funzione φ , si ha $f = \varphi f^*$ (vedi Figura 2).

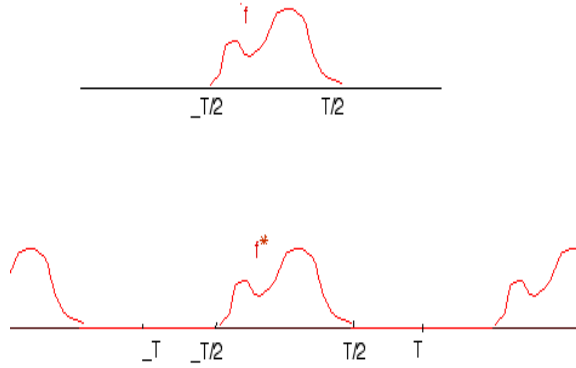


Figura 1 Le funzioni f e f^*

La funzione Φ definita da $\Phi = \varphi P$ è la funzione cercata. Infatti ha supporto contenuto in $[-T, T]$, è in C_c^∞ e inoltre si ha

$$f - \Phi = \varphi(f^* - P)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, e quindi per la (1.5) $\max_{\mathbb{R}} |f - \Phi| \leq \max_{\mathbb{R}} |f^* - P| < \epsilon$. Abbiamo così provato che per ogni $\epsilon > 0$ esiste una funzione $\Phi \in C_c^\infty$ tale che $\max_{\mathbb{R}} |f - \Phi| < \epsilon$ e quindi la prima parte del teorema è provata.

Sia ora $f \in L^p$. Poichè C_c^0 è denso in L^p , per ogni ϵ assegnato esiste una funzione h in C_c^0 tale che $\|f - h\|_p < \epsilon$. Sia T tale che il supporto di h sia contenuto in $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Per la prima parte della dimostrazione esiste una funzione Φ in C_c^∞ , avente supporto in $[-T, T]$, tale che $\max_{\mathbb{R}} |\Phi - h| < \epsilon(2T)^{-1/p}$. Per la proprietà triangolare si ha

$$\|f - \Phi\|_p < \|f - h\|_p + \|h - \Phi\|_p.$$

Il primo addendo è minore di ϵ . Anche il secondo è minore di ϵ : poichè $h - \Phi$ è continua ed ha supporto di ampiezza $2T$ si ha $\|h - \Phi\|_p \leq \max |h - \Phi| (2T)^{1/p}$. Ciò mostra che si ha $\|f - \Phi\|_p < 2\epsilon$ e quindi la dimostrazione è conclusa. \square

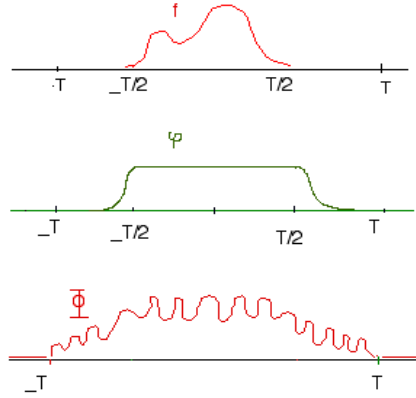


Figura 2 Le funzioni f, φ e il polinomio trigonometrico Φ .

Proposizione 1.3. *Sia $1 \leq p < +\infty$. Si ha*

$$C_c^\infty \subset \mathcal{S} \subset L^p$$

e ciascuno di questi spazi è denso nel successivo.

Dimostrazione. La prima inclusione è immediata; inoltre se $f \in \mathcal{S}$ si può scrivere $f(x) = (1+x^2)^{-1}(1+x^2)f(x) \leq C(1+x^2)^{-1}$ perchè $(1+x^2)f(x)$ è limitata; quindi f è in L^p per ogni $p \geq 1$. Poichè C_c^∞ è denso in L^p , lo spazio \mathcal{S} è denso in L^p . Il teorema sarà dimostrato se proviamo che C_c^∞ è denso in \mathcal{S} . Sia dunque $\varphi \in \mathcal{S}$, dobbiamo mostrare che esiste una successione $(\varphi_n) \subset C_c^\infty$ tale che

$$\lim_n \rho_k(\varphi_n - \varphi) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

cioè, per (1.3),

$$(1.6) \quad \lim_n \max_{0 \leq j \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)^k |D^j(\varphi_n - \varphi)(x)| = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Sia ψ una funzione di C_c^∞ tale che $\psi(x) = 1$ se $|x| \leq 1$. Denotiamo con (φ_n) la successione

$$\varphi_n(x) = \varphi(x)\psi\left(\frac{x}{n}\right).$$

Si noti: $\varphi_n \in C_c^\infty$ per ogni n e $\varphi_n(x) = \varphi(x)$ se $|x| \leq n$.

Sia $k \in \mathbb{N}$ fissato. Per stimare $\rho_k(\varphi_n - \varphi)$ calcoliamo

$$\begin{aligned} D^j(\varphi_n - \varphi)(x) &= D^j \left[\varphi(x) \left(\psi\left(\frac{x}{n}\right) - 1 \right) \right] \\ &= \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} D^{j-i} \varphi(x) D^i \left(\psi\left(\frac{x}{n}\right) - 1 \right) \\ &= D^j \varphi(x) \left(\psi\left(\frac{x}{n}\right) - 1 \right) + \sum_{i=1}^j \binom{j}{i} D^{j-i} \varphi(x) D^i \left(\psi\left(\frac{x}{n}\right) - 1 \right). \end{aligned}$$

Moltiplicando per $(1+x^2)^k$ primo e ultimo membro e maggiorando si ha

$$(1+x^2)^k |D^j(\varphi_n - \varphi)(x)| \leq \\ (1+x^2)^k |D^j\varphi(x)| \left| \psi\left(\frac{x}{n}\right) - 1 \right| + \sum_{i=1}^j \binom{j}{i} (1+x^2)^k |D^{j-i}\varphi(x)| |D^i(\psi\left(\frac{x}{n}\right) - 1)|.$$

Denotiamo con $I_1(x)$ e con $I_2(x)$ i due addendi del secondo membro (si noti che dipendono da k e da j) e passiamo all'estremo superiore su \mathbb{R} e al massimo su j , si ha

$$(1.7) \quad \max_{0 \leq j \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)^k |D^j(\varphi_n - \varphi)(x)| \leq \max_{0 \leq j \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}} I_1(x) + \max_{0 \leq j \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}} I_2(x)$$

Stimiamo I_1 . Poichè I_1 è zero per $|x| \leq n$, φ è in \mathcal{S} e ψ è in C_c^∞ , si ha

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbb{R}} I_1(x) &\leq \sup_{|x| \geq n} (1+x^2)^k |D^j\varphi(x)| \left| \psi\left(\frac{x}{n}\right) - 1 \right| \\ &\leq \alpha_\psi \sup_{|x| \geq n} |(1+x^2)^k |D^j\varphi(x)| \\ &\leq \alpha_\psi \sup_{|x| \geq n} (1+x^2)^k \frac{C_{j,k+1}}{(1+x^2)^{k+1}} \\ &\leq \alpha_\psi C_{j,k+1} \frac{1}{(1+n^2)} \\ &< C_{j,k+1} \frac{\alpha_\psi}{n} \end{aligned}$$

dove α_ψ è una costante dipendente solo da ψ e $C_{j,k+1}$ è la costante che compare nella (1.2). Quindi, denotando con c_k la più grande delle costanti $C_{j,k+1}$, $0 \leq j \leq k$, si ha

$$(1.8) \quad \max_{0 \leq j \leq k} \sup_{\mathbb{R}} I_1(x) < c_k \frac{\alpha_\psi}{n}$$

Stimiamo il secondo addendo I_2 in (1.7). Per la regola di derivazione delle funzioni composte, tutte le derivate di $\psi(x/n)$ fino all'ordine k si possono maggiorare con $1/n$ per una costante $\beta_{\psi,k}$ dipendente solo da ψ e da k ; quindi

$$\begin{aligned} I_2(x) &= \sum_{i=1}^j \binom{j}{i} (1+x^2)^k |D^{j-i}\varphi(x)| |D^i(\psi\left(\frac{x}{n}\right) - 1)| \\ &\leq \frac{\beta_{\psi,k}}{n} \sum_{i=1}^j \binom{j}{i} (1+x^2)^k |D^{j-i}\varphi(x)| \end{aligned}$$

Dalla (1.2)

$$(1+x^2)^k |D^{j-i}\varphi(x)| \leq C_{j-i,k}.$$

si ottiene allora che

$$\sup_{\mathbb{R}} I_2(x) \leq \frac{\beta_{\psi,k}}{n} \sum_{i=1}^j \binom{j}{i} C_{j-i,k} = d_{j,k} \frac{\beta_{\psi,k}}{n}$$

dove abbiamo posto $d_{j,k} = \sum_{i=1}^j \binom{j}{i} C_{j-i,k}$. Quindi

$$(1.9) \quad \max_{0 \leq j \leq k} \sup_{\mathbb{R}} I_2(x) < c'_k \frac{\beta_{\psi,k}}{n}$$

Sostituiamo le stime (1.8) e (1.9) così ottenute nella (1.7); ponendo

$$c(\psi, k) = \max\{c_k \alpha_{\psi}, c'_k \beta_{\psi,k}\}$$

e si ottiene

$$\max_{0 \leq j \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)^k |D^j(\phi_n(x) - \varphi(x))| \leq \frac{c(\psi, k)}{n}.$$

Da ciò segue subito la (1.6) e la dimostrazione è conclusa. □

2. Convoluzione e identità approssimate.

La convoluzione di due funzioni f e g definite su \mathbb{R} è la funzione $f * g$ definita da

$$(2.1) \quad f * g(x) = \int f(x - y)g(y)dy = \int f(y)g(x - y)dy$$

se gli integrali esistono per q.o. x . Si possono imporre varie condizioni su f e g che assicurino che l'integrale sia assolutamente convergente per q.o. $x \in \mathbb{R}$, ad esempio se $f \in L^1$ e $g \in L^\infty$ allora si ha $f * g \in L^\infty$ e

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Infatti

$$\int |f(x - y)g(y)|dy \leq \|g\|_\infty \int |f(x - y)| dy \leq \|g\|_\infty \int |f(y)|dy \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Quanto appena provato e il seguente teorema sono un caso particolare del Teorema Young (vedi Teorema 5.2 nella Sezione 5 di questo capitolo).

Teorema 2.1. *Siano $f, g \in L^1$. Allora $f * g \in L^1$. Inoltre*

$$(2.2) \quad \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

Dimostrazione. Per il teorema di Fubini si ha

$$(2.3) \quad \int \left(\int |f(x - y)| |g(y)| dx \right) dy = \int \left(\int |f(x - y)| |g(y)| dy \right) dx$$

nel senso che i due integrali sono entrambi divergenti positivamente o sono convergenti e uguali. Poichè il secondo di questi integrali si può anche scrivere

$$(2.4) \quad \int |g(y)| \left(\int |f(x - y)| dx \right) dy = \int |g(y)| dy \int |f(x - y)| dx = \|f\|_1 \|g\|_1$$

e l'ultimo membro è finito per ipotesi, anche il primo integrale nella (2.3) è finito. Da ciò segue che

- i) la funzione $y \rightarrow f(x - y)g(y)$ è assolutamente integrabile per q. o. $x \in \mathbb{R}$
- ii) la funzione $x \rightarrow \int f(x - y)g(y)dy$ è assolutamente integrabile in \mathbb{R}
- iii) $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

Il teorema è così provato. □

Teorema 2.2. Siano $f, g, h \in L^1$ e $\alpha \in \mathbf{C}$. Allora

$$(i) \alpha(f * g) = (\alpha f) * g = f * (\alpha g)$$

$$(ii) f * (g + h) = f * g + f * h$$

$$(iii) f * g = g * f$$

$$(iv) (f * g) * h = f * (g * h)$$

$$(v) \tau_s(f * g) = (\tau_s f) * g = f * (\tau_s g), \quad s \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione La dimostrazione viene lasciata per esercizio.

Si noti: le prime quattro proprietà mostrano che L^1 è una algebra commutativa rispetto al prodotto di convoluzione.

Esempio 2.1 Denotiamo con χ la funzione caratteristica dell'intervallo $[-1/2, 1/2]$ e con t il prodotto di convoluzione $t = \chi * \chi$. Si ha $t(x) = (1 - |x|)_+$ dove y_+ indica il massimo fra y e zero e quindi

$$t(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq -1, \\ 1 + x & \text{if } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{if } x \geq 1. \end{cases}$$

Infatti si ha

$$(\chi * \chi)(x) = \int \chi(x - y)\chi(y) dy = \int_{-1/2}^{1/2} \chi(x - y) dy = \int_{x-1/2}^{x+1/2} \chi(y) dy$$

e quindi

$$(\chi * \chi)(x) = \text{mis}\left([-1/2, 1/2] \cap [x - 1/2, x + 1/2]\right)$$

e questa è la funzione *tenda*

Osservazione 2.1 Facciamo ora qualche osservazione sul significato del prodotto di convoluzione. Pensiamo al primo degli integrali in (2.1) come al limite di somme di Riemann

$$\int f(x - y)g(y)dy \approx \sum f(x - y_j)g(y_j)\Delta y_j.$$

La somma al secondo membro è una combinazione lineare di traslate di f con coefficienti $g(y_j)\Delta y_j$. Quindi possiamo pensare $f * g$ come una “combinazione lineare continua” di traslate di f . Naturalmente, scambiando i ruoli di f e g , $f * g$ può essere pensato anche come una “combinazione lineare continua” di traslate di g .

Una seconda interpretazione della convoluzione è quella di “media pesata mobile”. Ricordiamo che la media pesata di una funzione f su un intervallo I , rispetto ad

una funzione peso non negativa ω è

$$\frac{\int_I f(y)\omega(y) dy}{\int_I \omega(y) dy}.$$

Supponiamo ora che g sia non negativa ed abbia integrale 1. Allora dalla formula

$$f * g(x) = \int f(y)g(x - y) dy$$

si vede che $f * g(x)$ è la media pesata di f (su tutto \mathbb{R}) rispetto alla funzione peso $\omega(y) = g(x - y)$.

Se g è la funzione caratteristica normalizzata di un intorno dell'origine, $f * g(x)$ si può interpretare come la media di f su un intorno di x , e quindi come una versione "sfocata" di f ; versione tanto più sfocata quanto più grande è il supporto di g , viceversa più simile ad f se il supporto di g è piccolo. Naturalmente le stesse considerazioni valgono se g è una qualunque funzione normalizzata con supporto in un intervallo, oppure, più in generale, se è trascurabile fuori di un intervallo.

Vogliamo ora mostrare che il prodotto di convoluzione con una funzione "liscia" ha un effetto regolarizzante. Si noti l'analogia con la convoluzione di funzioni periodiche.

Denoteremo con C_b^n $n \in \mathbb{N}$ l'insieme delle funzioni aventi tutte le derivate fino all'ordine n continue e limitate. Il seguente teorema mostra che il prodotto di convoluzione con una funzione C_b^n è ancora in C_b^n . Quindi $f * g$ è "liscia" almeno quanto f e g , anche se una delle due funzioni non ha nessuna regolarità.

Teorema 2.3. *Siano $f \in C_b^n$ e $g \in L^1$. Allora $f * g \in C_b^n$. e si ha*

$$\partial^k(f * g) = (\partial^k f) * g.$$

Dimostrazione. Poichè f è limitata e $g \in L^1$, $f * g(x)$ è definita per ogni x ed è limitata. Proviamo che $f * g$ è continua: per le proprietà della convoluzione

$$\begin{aligned} \tau_h(f * g)(x) - (f * g)(x) &= (\tau_h f) * g(x) - f * g(x) = (\tau_h f - f) * g \\ &= \int (f(x - y - h) - f(x - y)) g(y) dy. \end{aligned}$$

Per il teorema della convergenza dominata l'integrale tende a zero per $h \rightarrow 0$, e ciò prova che $f * g$ è continua. La limitatezza di $f * g$ segue dal fatto che f è limitata (e $g \in L^1$).

Sia ora $n = 1$, proviamo che $f * g$ è in C_b^1 . Si ha

$$\frac{\tau_h(f * g) - (f * g)}{h}(x) = \int \frac{f(x - y - h) - f(x - y)}{h} g(y) dy = \int \Phi_h(x, y) dy.$$

dove abbiamo posto

$$\Phi_h(x, y) = \frac{f(x - y - h) - f(x - y)}{h} g(y).$$

Mostriamo che

$$(2.5) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \int \Phi_h(x, y) dy = \int f'(x - y) g(y) dy = f' * g(x).$$

Poiché $f \in C_b^1$, per il Teorema di Lagrange esiste un $0 < \theta < 1$, dipendente da x e y , tale che

$$|\Phi_h(x, y)| \leq |f'(x - y + \theta h)| |g(y)| \leq M |g(y)|.$$

Poiché d'altra parte $\lim_{h \rightarrow 0} \Phi_h(x, y) = f'(x - y) g(y)$ la (2.5) segue dal teorema della convergenza dominata. Abbiamo così provato che $f * g$ è derivabile e che

$$(2.6) \quad (f * g)' = f' * g.$$

La continuità e la limitatezza di $(f * g)'$ segue dalla (2.6) e dalla prima parte della dimostrazione. Possiamo così concludere che $f * g \in C_b^1$.

La dimostrazione per $n > 1$ si ottiene con un ragionamento induttivo. \square

Teorema 2.4. *Siano f in C_c^∞ e g in C_c^0 allora $f * g$ è in C_c^∞ .*

Dimostrazione. Il fatto che $f * g \in C^\infty$ segue dal precedente teorema. Poiché il supporto di una funzione è sempre chiuso, dobbiamo solo provare che $\text{supp}(f * g)$ è limitato. Si prova che ⁽³⁾

$$(2.7) \quad \text{supp}(f * g) \subset \text{supp} f + \text{supp} g$$

(vedi Esercizio 1.2); poiché l'insieme a secondo membro è limitato, anche $\text{supp}(f * g)$ è limitato. \square

Abbiamo visto che L^1 è una algebra commutativa rispetto al prodotto di convoluzione. Come vedremo nella prossima sezione, non esiste l'elemento neutro per il prodotto di convoluzione, cioè, non esiste una funzione $\delta \in L^1$ tale che $\delta * f = f$ per ogni $f \in L^1$. Mostriamo che tuttavia si possono facilmente costruire famiglie $(g_T), T > 0$ di funzioni in L^1 tali che $f * g_T \rightarrow f$ in L^1 , come accade nello spazio $L_{2\pi}^1$. L'idea per la costruzione di tali famiglie è suggerita dall'osservazione che segue l'Esempio 2.1: se una funzione g ha integrale uguale ad 1 ed è zero (o trascurabile) fuori da un intervallo $|x| < a$ allora $f * g$ è una "versione" di f che, via via che a diventa piccolo, diventa più simile ad f .

Queste considerazioni conducono alla seguente definizione di "identità approssimata"

Definizione 2.5. *Una famiglia u_T di funzioni di L^1 si dice una identità approssimata (i.a.) se*

$$(i) \quad u_T \geq 0 \quad \forall T$$

$$(ii) \quad \int u_T(x) dx = 1 \quad \forall T$$

$$(iii) \text{ si ha } \lim_{T \rightarrow 0} \int_{\delta < |x|} u_T(x) dx = 0 \quad \forall \delta > 0$$

La condizione (i) non è indispensabile, ma semplifica l'esposizione dei risultati. Il seguente lemma fornisce un esempio di identità approssimata. Altri esempi saranno proposti in seguito.

Lemma 2.6. *La famiglia (ω_T) , definita da*

$$(2.8) \quad \omega_T(x) = \sqrt{\frac{\pi}{T}} e^{-\frac{\pi^2}{T}x^2}$$

è un'identità approssimata.

Dimostrazione. La proprietà (i) è ovvia. Per provare la (ii) basta ricordare che $\int e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ e operare il cambiamento di variabili $z = \pi x/\sqrt{T}$. Infine, sia $\delta > 0$ allora

$$\int_{\delta < |x|} \omega_T(x) dx = 2\sqrt{\frac{\pi}{T}} \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{\pi^2}{T}x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\pi\delta/\sqrt{T}}^{+\infty} e^{-y^2} dy.$$

Poichè l'ultimo membro tende a zero per $T \rightarrow 0$, la (iii) è provata. □

Lemma 2.7. *Sia $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$ e sia (u_T) una identità approssimata. Allora*

$$(2.9) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$$

La dimostrazione viene lasciata per esercizio .

Teorema 2.8. *Sia $f \in L^1$ e sia (u_T) una identità approssimata. Allora per si ha*

$$(2.10) \quad \lim_{T \rightarrow 0} \|u_T * f - f\|_1 = 0$$

La dimostrazione viene lasciata per esercizio (Esercizio 1.5, Capitolo 2).

Teorema 2.9. *Siano f una funzione limitata e (u_T) una identità approssimata. Allora*

$$(2.11) \quad \lim_{T \rightarrow 0} u_T * f(x) = f(x)$$

in tutti i punti in cui f è continua.

Lasciamo la dimostrazione per esercizio (Esercizio 1.7 del Capitolo 2).

3. La trasformata di Fourier di funzioni di L^1 .

Sia f una funzione di L^1 , si chiama trasformata di Fourier di f la funzione \hat{f} definita da

$$(3.1) \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx$$

con $\xi \in \mathbb{R}$. Poichè $e^{-2\pi i x \xi}$ ha modulo 1, l'integrale converge. Si noti l'analogia con la formula $\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi i n x} dx$ che definisce i coefficienti di Fourier di una funzione di periodo 1.

Dunque mentre in L^1_1 le funzioni sono definite su \mathbb{R} e le loro trasformate sono definite sugli interi, in $L^1(\mathbb{R})$ sia le funzioni sia le trasformate sono definite sulla retta reale. È conveniente considerare due copie della retta reale, una per la funzione l'altra per la sua trasformata. Con il linguaggio usato nell'analisi del segnale useremo il termine *dominio dei tempi* quando si descrive l'analisi di un segnale (funzione) rispetto al tempo e *dominio delle frequenze* quando si descrive l'analisi di un segnale rispetto alle sue frequenze. La stessa terminologia viene usata anche per le funzioni periodiche, dove le frequenze sono gli interi relativi (se il periodo è 1) e la trasformata di Fourier è una funzione discreta.

Calcoliamo ora la trasformata di Fourier di alcune funzioni elementari. Denoteremo con χ_T la funzione caratteristica dell'intervallo $[-T, T]$. Qualche volta useremo anche la notazione $\chi_{[-T, T]}$.

Esempio 3.1 La trasformata di χ_T è

$$\widehat{\chi_T}(\xi) = \int_{-T}^T e^{-2\pi i x \xi} dx = 2T \frac{\sin(2\pi \xi T)}{2\pi \xi T}.$$

Si noti l'analogia con il nucleo di Dirichlet (2.3). Si noti inoltre che $\widehat{\chi_T} \notin L^1$. Come vedremo, la funzione χ_T e la sua trasformata giocano un ruolo importante nell'analisi di Fourier e più in generale nella matematica applicata; la funzione $\sin(x)/x$ si chiama *seno cardinale* o più brevemente *sinc* e viene denotata con *sinc*. Sia $a > 0$, l'operatore definito da $\delta_a f(x) = f(ax)$ si chiama di dilatazione. In realtà il grafico di f viene dilatato (lungo la direzione dell'asse x) solo se $a > 1$, viceversa se $0 < a < 1$ si tratta di una contrazione.

Teorema 3.1. *Siano $f, g \in L^1$ e siano α, β due numeri complessi. Si ha*

$$(i) \quad \widehat{(\alpha f + \beta g)} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$$

$$(ii) \quad \widehat{\tilde{f}}(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$$

$$(iii) \quad \widehat{(\tau_h f)}(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-2\pi i h \xi} \quad \tau_h \hat{f}(\xi) = \widehat{(f(x)e^{2\pi i x h})}(\xi)$$

$$(iv) \|\hat{f}\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$$

$$(v) \widehat{\delta_a f}(\xi) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$$

La dimostrazione è lasciata come esercizio.

Esercizio Denotiamo con $e_\xi, \xi \in \mathbb{R}$, la funzione $e_\xi(x) = e^{2\pi i \xi x}$. Provare che

$$(f * e_\xi)(x) = \hat{f}(\xi) e_\xi(x)$$

Osservazione 3.1 La (ii) esprime la relazione fra trasformata di Fourier e coniugazione: a meno di una riflessione esse commutano. La (iii) esprime la relazione fra trasformata di Fourier e traslazione: ad una traslazione nel piano dei tempi corrisponde la moltiplicazione per una esponenziale di modulo 1 nel piano delle frequenze (questa operazione viene chiamata *modulazione*). Viceversa ad una traslazione nel piano delle frequenze corrisponde una modulazione nel piano dei tempi.

La proprietà (iv) mostra che la trasformata di una funzione in L^1 è limitata. Più oltre proveremo che è anche continua. L'ultima proprietà mostra che la trasformata della dilatata ($a > 1$) di una funzione è una contrazione normalizzata della trasformata. Si noti: delle prime quattro proprietà esiste l'analoga per le serie di Fourier.

Il seguente teorema stabilisce la relazione fra trasformata di Fourier e derivazione. Si noti l'analoga fra la formula (3.2) e la (3.1) per le funzioni periodiche.

Teorema 3.2. *i) Sia $f \in C^n, n \geq 1$ e siano $f^{(j)} \in L^1, \forall 0 \leq j \leq n$. Allora*

$$(3.2) \quad \widehat{f^{(n)}}(\xi) = (2\pi i \xi)^n \hat{f}(\xi)$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}$.

ii) Siano $f \in L^1$ e $x^n f \in L^1, n \geq 1$, allora \hat{f} è derivabile n volte e si ha

$$(3.3) \quad (\hat{f})^{(n)}(\xi) = \widehat{((-2\pi i x)^n f(x))}(\xi)$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. i) Sia $f \in C^n$. Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} (\hat{f}')(\xi) &= \int f'(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \left[f(x) e^{-2\pi i x \xi} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int f(x) e^{-2\pi i x \xi} (-2\pi i \xi) dx \\ &= \left[f(x) e^{-2\pi i x \xi} \right]_{-\infty}^{+\infty} + 2\pi i \xi \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

Mostriamo ora che f tende a zero all'infinito e quindi il primo addendo è zero. Poichè f' è continua, si ha

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$$

da ciò, poichè $f' \in L^1$, passando al limite si ottiene che il limite di f a $\pm\infty$ è finito. Poichè f è integrabile questo limite deve essere necessariamente zero. Abbiamo così provato che vale la (3.2) per $n = 1$. Per $n > 1$ si procede con un ragionamento induttivo.

(ii) Siano f e $x^n f(x) \in L^1$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)}{h} &= \frac{1}{h} \int f(x) \left[e^{-2\pi i(\xi+h)x} - e^{-2\pi i\xi x} \right] dx \\ &= \int f(x) e^{-2\pi i\xi x} \frac{(e^{-2\pi ihx} - 1)}{h} dx = \int g_h(x, \xi) dx \end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$g_h(x, \xi) = f(x) e^{-2\pi i\xi x} \frac{(e^{-2\pi ihx} - 1)}{h}.$$

Osserviamo ora che per ogni ξ si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} g_h(x, \xi) = -2\pi i x f(x) e^{-2\pi i x \xi}.$$

Inoltre per h piccolo $|g_h(x, \xi)| \leq C |x f(x)|$ dove C è una costante indipendente da x ; questo segue subito dal fatto che per ogni α reale si ha

$$\left| \frac{e^{i\alpha} - 1}{i\alpha} \right| \leq \left| \int_0^1 e^{i\alpha t} dt \right| = 1$$

Allora poichè $x f \in L^1$, per il teorema della convergenza dominata esiste il limite per h tendente a 0 del rapporto incrementale di \hat{f} e vale la (3.3) con $n = 1$. La dimostrazione di ii) si conclude facilmente con un ragionamento induttivo. \square

Osservazione 3.2 Il Teorema 3.2 contiene un principio fondamentale già visto nel contesto delle serie di Fourier: il legame stretto fra regolarità di una funzione e la rapidità con cui la sua trasformata di Fourier tende a zero all'infinito (e viceversa).

Nel seguito denoteremo con \tilde{f} la funzione riflessa di f , cioè la funzione definita da $\tilde{f}(x) = f(-x)$. Si verifica facilmente che se $f \in L^1$, si ha

$$(3.4) \quad \hat{\tilde{f}} = \tilde{\hat{f}}$$

Esercizio 3.7 Mostrare che

i) la funzione $e^{-\pi x^2}$ ha per trasformata se stessa:

$$(3.5) \quad e^{-\pi \xi^2} = \int e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx$$

ii) si ha

$$(3.6) \quad [e^{-Tx^2}]^\wedge(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{T}} e^{-\frac{\pi^2}{T}\xi^2} = \omega_T(\xi)$$

$$(3.7) \quad \widehat{\omega_T}(\xi) = e^{-T\xi^2}$$

dove ω_T , $T > 0$, è il nucleo di Gauss Weiestrass. Dunque

$$[e^{-x^2}]^\wedge(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2\xi^2}$$

Esempio 3.2 Se $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, allora

$$\hat{f}(\xi) = \pi e^{-2\pi|\xi|}.$$

Esercizio 3.8 Mostrare che la trasformata di una funzione f di \mathcal{S} è in C^∞ e tende a zero all'infinito con ordine maggiore di qualunque polinomio. Si noti: nel seguito proveremo che se $f \in \mathcal{S}$ allora \hat{f} è in \mathcal{S} .

Dimostrazione. Sia $g \in \mathcal{S}$. Allora per la (ii) del Teorema 3.2 si ha che \hat{g} ha derivate di qualunque ordine e quindi è in C^∞ . Sia ora n fissato, per la (3.2) si ha

$$|\hat{g}(\xi)| \leq |\widehat{g^{(n)}}(\xi)| \frac{1}{2\pi|\xi|^n} \leq \|g^{(n)}\|_\infty \frac{1}{2\pi|\xi|^n} \quad \xi \neq 0.$$

passando al limite per ξ tendente a $\pm\infty$ si ottiene la tesi. □

Abbiamo visto che la trasformata di Fourier di una funzione L^1 è limitata. Il seguente teorema mostra che è continua e infinitesima all'infinito e perciò uniformemente continua.

Teorema 3.3. (*Riemann Lebesgue*) Sia $f \in L^1$. Allora \hat{f} è continua e tende a zero all'infinito.

Dimostrazione. Poichè \mathcal{S} è denso in L^1 esiste una successione (f_n) di elementi di \mathcal{S} tale che

$$\lim_n \|f_n - f\|_1 = 0$$

Per la proprietà iv) del Teorema 3.1 si ha $|\hat{f}_n(x) - \hat{f}(x)| \leq \|f_n - f\|_1$ per ogni x . Quindi, passando al sup si ottiene che

$$\lim_n \hat{f}_n = \hat{f} \quad \text{uniformemente.}$$

Per quanto visto nel precedente esercizio, le funzioni \hat{f}_n sono continue e tendono a zero all'infinito, quindi il limite \hat{f} è una funzione continua ed è infinitesima all'infinito. □

Una domanda naturale da porsi è se il Teorema di Riemann Lebesgue si possa invertire, cioè se una funzione continua e infinitesima all'infinito sia sempre la trasformata di Fourier di una funzione di L^1 . La risposta è no. In [11, pag 31], si può trovare un controesempio: una funzione continua, infinitesima all'infinito, che non è la trasformata di una funzione di L^1 . Quindi la trasformata di Fourier, considerata come operatore da L^1 nello spazio delle funzioni continue e infinitesime all'infinito, non è surgettiva.

Teorema 3.4. (*Formula di moltiplicazione*). Siano $f, g \in L^1$. Allora

$$(3.8) \quad \int f(x)\hat{g}(x)dx = \int \hat{f}(x)g(x)dx$$

Dimostrazione. Scriviamo esplicitamente il primo membro

$$\int f(x)\hat{g}(x)dx = \int f(x) \left(\int g(y)e^{-2\pi ixy} dy \right) dx$$

e denotiamo con G la funzione definita da

$$G(x, y) = f(x)g(y)e^{-2\pi ixy}.$$

Poichè $G \in L^1(\mathbb{R}^2)$ possiamo invertire gli ordini di integrazione e si ottiene

$$\int f(x)\hat{g}(x)dx = \int g(y) \left(\int f(x)e^{-2\pi ixy} dx \right) dy = \int g(y)\hat{f}(y) dy.$$

□

Teorema 3.5. Siano $f, g \in L^1$. Allora

$$(3.9) \quad \widehat{(f * g)} = \hat{f} \hat{g}$$

Dimostrazione. Moltiplicando e dividendo per $e^{-2\pi iy\xi}$ e scambiando gli ordini di integrazione si ha

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g)}(\xi) &= \int \left(\int f(x-y)g(y) dy \right) e^{-2\pi ix\xi} dx \\ &= \int \left(\int f(x-y)e^{-2\pi i(x-y)\xi} g(y)e^{-2\pi iy\xi} dx \right) dy \\ &= \int g(y)e^{-2\pi iy\xi} \left(\int f(x-y)e^{-2\pi i(x-y)\xi} dx \right) dy \\ &= \left(\int f(x-y)e^{-2\pi i(x-y)\xi} dx \right) \left(\int g(y)e^{-2\pi iy\xi} dy \right) \\ &= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) \end{aligned}$$

□

Dal teorema segue subito che non esiste l'elemento neutro del prodotto di convoluzione: se ci fosse un $\delta \in L^1$ tale che per ogni f in L^1 si ha $\delta * f = f$ allora, per la (3.9), si avrebbe $\hat{\delta} = 1$. Ma questo contraddice il Teorema di Riemann Lebesgue.

Inversione della trasformata di Fourier

Nello studio delle funzioni periodiche, uno dei principali obiettivi era sintetizzare una funzione periodica a partire dai suoi coefficienti di Fourier. Abbiamo visto che una funzione f può essere ricostruita in qualche senso a partire dai suoi coefficienti di Fourier sia in $L^2_{2\pi}$ che in $L^1_{2\pi}$. Nel primo caso si usa la formula di inversione

$$(3.10) \quad f(x) = \sum_n \hat{f}(n)e^{inx}$$

dove la serie converge in norma $L^2_{2\pi}$, nel secondo caso occorre utilizzare un'identità approssimata.

Anche nel caso della trasformata di funzioni non periodiche uno degli obiettivi principali è ricostruire una funzione a partire dalla sua trasformata di Fourier. Per $f \in L^1$ una formula analoga a (3.10)

$$(3.11) \quad f(x) = \int \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x \xi} d\xi,$$

in generale non ha senso, perchè non è detto che \hat{f} sia assolutamente integrabile (basta pensare alla funzione *sinc*, che a meno di una costante moltiplicativa è la trasformata della funzione caratteristica di un intervallo). Mostriamo ora che, ciò nonostante, è possibile risalire alla funzione a partire dalla sua trasformata. Gli strumenti sono il Teorema 2.8 sulle identità approssimate e la proprietà (3.9).

Premettiamo una formula che fornisce una espressione del prodotto di convoluzione di f con il nucleo di Gauss Weierstrass in termini di \hat{f} .

Proposizione 3.6. *Sia $f \in L^1$. Allora*

$$(3.12) \quad \omega_T * f(x) = \int \hat{f}(y)e^{-Ty^2} e^{2\pi i xy} dy.$$

Dimostrazione. Nell'integrale che definisce la convoluzione

$$(3.13) \quad \omega_T * f(x) = \int f(y)\omega_T(x - y)dy.$$

mostriamo che per ogni x la funzione $\omega_T(x - y)$ si può scrivere come una trasformata di Fourier. Ricordando che ω_T è pari, per la (3.6) si ha

$$\omega_T(x - y) = \omega_T(y - x) = \int e^{-Tz^2} e^{-2\pi i(y-x)z} dz = \int e^{2\pi izx} e^{-Tz^2} e^{-2\pi iyz} dz = \widehat{\Phi}_x(y),$$

dove $\Phi_x(z) = e^{2\pi izx} e^{-Tz^2}$. Dalla (3.13) perciò si ha, usando la formula di moltiplicazione,

$$\omega_T * f(x) = \int f(y) \widehat{\Phi}_x(y) dy = \int \hat{f}(y) \Phi_x(y) dy = \int \hat{f}(y) e^{-Ty^2} e^{2\pi iyx} dy.$$

□

Osservazione 3.3 Per il Teorema 2.8 e la formula (3.12) si ha

$$(3.14) \quad f(x) = \lim_{T \rightarrow 0} \int \hat{f}(y) e^{-Ty^2} e^{2\pi iyx} dy \quad \text{in norma } L^1.$$

Utilizzando il nucleo di Gauss Weiestrass abbiamo così risolto il problema di ricostruire una funzione $f \in L^1$ a partire dalla sua trasformata \hat{f} . La formula (3.14) viene chiamata *Formula di inversione mediante il nucleo di Gauss Weiestrass*. Vedremo successivamente che è possibile ottenere formule di inversione con altri nuclei. Le seguenti tre proposizioni sono conseguenza della formula (3.14)

Proposizione 3.7. (*Unicità della trasformata di Fourier*) Sia $f \in L^1$. Allora $f = 0$ se e solo se $\hat{f} = 0$.

Dimostrazione. La prima parte è ovvia. Sia $\hat{f} = 0$ allora gli integrali nella (3.14) sono uguali a zero, e quindi $f = 0$. □

Mostriamo ora che se $\hat{f} \in L^1$ allora vale la formula di inversione (3.11) che abbiamo ipotizzato all'inizio di questa Sezione (5).

Proposizione 3.8. (*Formula di inversione*) Siano f e $\hat{f} \in L^1$. Allora

$$(3.15) \quad f(x) = \int \hat{f}(y) e^{2\pi ixy} dy \quad q.o.$$

Dimostrazione. Per $x \in \mathbb{R}$ fissato, denotiamo con $\Phi_T(x, y)$ la funzione integranda nella formula (3.12). Si ha

$$|\Phi_T(x, y)| \leq |\hat{f}(y)| \in L^1.$$

Inoltre

$$\Phi_T(x, y) \rightarrow \hat{f}(y) e^{2\pi ixy}$$

per $T \rightarrow 0$. Per il Teorema della convergenza dominata ne segue che il secondo membro della (3.12) tende a $\int \hat{f}(y) e^{2\pi ixy} dy$ per q.o. x e quindi

$$\omega_T * f(x) \rightarrow \int \hat{f}(y) e^{2\pi ixy} dy \quad q.o.x.$$

D'altra parte per il Teorema 2.8 si ha $\lim_T \omega_T * f = f$ in L^1 e quindi i due limiti coincidono quasi ovunque. □

Proposizione 3.9. *Sia u_T una i.a. Allora $\lim_T \widehat{u_T} = 1$ puntualmente.*

Dimostrazione. Per ogni $f \in L^1$ si ha

$$\|(u_T * f)^\wedge - \widehat{f}\|_\infty \leq \|u_T * f - f\|_1,$$

ne segue che

$$(3.16) \quad \lim_{T \rightarrow 0} \widehat{u_T} \widehat{f} - \widehat{f} = 0 \quad \text{uniformemente}$$

per ogni $f \in L^1$. Sia ora $f(x) = e^{-\pi x^2}$, si ha

$$|\widehat{u_T}(\xi) - 1| = e^{\pi \xi^2} |\widehat{u_T}(\xi) e^{-\pi \xi^2} - e^{-\pi \xi^2}|.$$

Poichè per la (3.16) la funzione $|\widehat{u_T}(\xi) e^{-\pi \xi^2} - e^{-\pi \xi^2}|$ tende a zero uniformemente si ha che per ogni ξ il primo membro di questa equazione tende a zero per T tendente a 0. La tesi è quindi provata. \square

Si noti che, per la Proposizione 3.8 se f e $\widehat{f} \in L^1$, allora $\widehat{\widehat{f}} = f$; quindi, se f è pari, $\widehat{\widehat{f}} = f$.

Costruzione di identità approssimate.

Nel precedente sezione abbiamo costruito l'i.a. di Gauss Weierstrass (2.8) semplicemente dilatando e normalizzando la funzione $e^{-\pi x^2}$. Mostriamo ora che una famiglia di i.a. si può costruire allo stesso modo partendo da una qualunque funzione di L^1 positiva e di integrale 1. Se poi abbiamo l'accortezza di prendere una funzione φ che ha anche la trasformata in L^1 allora otteniamo anche una formula di inversione.

Teorema 3.10. *Sia $\varphi \in L^1$ tale che $\varphi \geq 0$ e $\int \varphi dx = 1$. Allora la famiglia (φ_ϵ) definita da*

$$\varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} \varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

è una i.a. Si ha inoltre

(i) $\widehat{\varphi_\epsilon}(x) = \widehat{\varphi}(\epsilon x)$

(ii) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \widehat{\varphi_\epsilon}(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

(iii) se $\widehat{\varphi} \in L^1$ allora per ogni $f \in L^1$ si ha

$$(3.17) \quad \varphi_\epsilon * f(x) = \int \widehat{\varphi}(\epsilon y) \widehat{f}(y) e^{2\pi i x y} dy$$

e quindi

$$(3.18) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \widehat{\varphi}(\epsilon y) \widehat{f}(y) e^{2\pi i x y} dy = f(x)$$

nella norma L^1 . La (3.18) si chiama “Formula di inversione mediante il nucleo (φ_ϵ) .”

Dimostrazione. Proviamo che (φ_ϵ) è una i.a. Le prime due condizioni della Definizione 2.5 di i.a. sono ovvie. Sia ora $\delta > 0$, per il teorema della convergenza dominata l’integrale

$$\int_{|x|>\delta} \varphi_\epsilon(x) dx = \int_{|y|>\delta/\epsilon} \varphi(y) dy = \int_{\mathbb{R}} (1 - \chi_{\frac{\delta}{\epsilon}}(y)) \varphi(y) dy$$

tende a zero per ϵ tendente a 0.

(ii) segue subito dalla Proposizione 3.9

(iii) per la Proposizione 3.8 vale la formula di inversione

$$\varphi_\epsilon * f(x) = \int (\varphi_\epsilon * f)^\wedge(y) e^{2\pi i x y} dy$$

e poichè $(\varphi_\epsilon * f)^\wedge = \widehat{\varphi_\epsilon} \widehat{f} \in L^1$, la (3.17) è provata. Da ciò, per il Teorema 2.10, segue subito la (3.18). \square

Esempio 3.3 La famiglia $\sigma_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$, $t > 0$ è un’identità approssimata.

Esempio 3.4 La funzione $\varphi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ soddisfa le ipotesi del Teorema 3.10, quindi famiglia (φ_ϵ) definita da

$$\varphi_\epsilon(x) = \frac{\epsilon}{\pi} \frac{1}{\epsilon^2 + x^2}$$

è un’identità approssimata.

4. Formula di Poisson.

Abbiamo fin qui spesso evidenziato l'analogia fra le proprietà delle serie e dell'integrale di Fourier. Questa sezione è dedicata ad una questione, di grande importanza per l'analisi di Fourier, che riguarda entrambi i mondi delle funzioni periodiche e delle funzioni definite su \mathbb{R} . Un modo generale di introdurla è il seguente: supponiamo di avere una funzione definita su \mathbb{R} , quale è il suo analogo periodico? Cioè, quale oggetto corrisponde ad esso nell'ambito delle funzioni periodiche? Inoltre cercheremo di capire in che modo le proprietà di tale oggetto nella sua forma periodica possono essere dedotte da proprietà già stabilite per la forma non periodica. Nel ragionamento introduttivo che segue procederemo in maniera formale, non ci preoccuperemo perciò della convergenza degli integrali e delle serie coinvolte. Sia dunque f una funzione definita su \mathbb{R} . Ci sono almeno due modi naturali per costruire una funzione periodica di periodo, per esempio, uguale ad 1. Il primo è quello di sommare le infinite traslate di un intero

$$(4.1) \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x + m).$$

Questa è una funzione di periodo 1, basta verificare operando un cambio di variabili nella somma. Nel seguito ci riferiremo al passaggio da f alla somma (4.1) con il termine *periodizzazione* di f . Per descrivere il secondo approccio scriviamo, sempre formalmente,

$$f(x) \sim \int \hat{f}(y) e^{2\pi i y x} dy,$$

dove

$$\hat{f}(y) = \int f(x) e^{-2\pi i y x} dx.$$

Un analogo periodico della funzione f è

$$(4.2) \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m) e^{2\pi i m x}.$$

La conseguenza principale della formula di Poisson è che i due analoghi periodici della funzione f , dati da (4.1) e (4.2) essenzialmente coincidono. Questa conclusione è formulata nel seguente

Teorema 4.1. *Sia $f \in L^1$. Allora la serie $\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x + m)$ converge nella norma di $L^1([0, 1])$. La somma è una funzione di L^1_1 la cui serie di Fourier è $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m) e^{2\pi i x m}$ dove*

$$(4.3) \quad \hat{f}(m) = \int f(x) e^{-2\pi i m x} dx.$$

Dimostrazione. Mostriamo che la serie in (4.1) converge in $L^1([0, 1])$. Si ha

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \|f(x+m)\|_{L^1([0,1])} &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \|f(x+m)\|_{L^1([0,1])} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^1 |f(x+m)| dx \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^1 |f(x+m)| dx = \|f\| < \infty. \end{aligned}$$

Quindi, per la completezza di $L^1([0, 1])$, la serie

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x+m)$$

converge nella norma di $L^1([0, 1])$. Poiché, come abbiamo già osservato, la somma di questa serie è una funzione periodica di periodo 1 ne segue che è in L^1_1 .

Calcoliamo ora i coefficienti di Fourier della somma. Scambiando la serie con l'integrale e operando un cambiamento di variabili, si ha

$$\begin{aligned} a_k &= \int_0^1 \sum_m f(x+m) e^{-2\pi i x k} dx = \sum_m \int_0^1 f(x+m) e^{-2\pi i x k} dx \\ &= \sum_m \int_m^{m+1} f(y) e^{-2\pi i (y-m)k} dy = \int f(y) e^{-2\pi i y k} dy \\ &= \hat{f}(k). \end{aligned}$$

Si noti che lo scambio fra l'integrale e la serie è lecito perchè la serie converge in norma L^1_1 [si applica il Teorema 1.9].

Abbiamo così provato che la serie di Fourier della funzione $\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x+m)$ è (4.2). \square

È importante chiarire che, nelle ipotesi del Teorema 4.1, non è detto che la serie di Fourier (4.2) converga, neanche in L^1_1 . Il seguente corollario fornisce le condizioni su f e \hat{f} affinché la serie di Fourier (4.2) converga uniformemente a $\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x+m)$.

Corollario 4.2. *Sia f una funzione continua ed esistano due costanti A, B tali che*

$$(4.4) \quad |f(x)| \leq \frac{A}{(1+|x|)^{1+\delta}} \quad |\hat{f}(y)| \leq \frac{B}{(1+|y|)^{1+\delta}} \quad \delta > 0.$$

Allora per ogni x si ha

$$(4.5) \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x+m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m) e^{2\pi i m x}$$

In particolare $\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m)$. Le quattro serie convergono assolutamente.

Dimostrazione. Mostriamo che la serie (4.1) converge totalmente in $[0, 1]$. Dalla prima delle (4.4) si ha

$$\sum_m |f(x+m)| \leq \sum \frac{A}{(1+|x+m|)^{1+\delta}}.$$

Affermiamo ora, rimandandone la verifica, che per $x \in [0, 1]$ si ha

$$(4.6) \quad \frac{1}{1+|x+m|} \leq C \frac{1}{1+|m|}$$

dove C è una costante indipendente sia da x che da m ; ne segue che

$$\sum_m |f(x+m)| \leq AC' \sum_m \frac{1}{(1+|m|)^{1+\delta}}$$

dove $C' = C^{1+\delta}$; quindi la serie (4.1) converge uniformemente in $[0, 1]$. Poichè si tratta di funzioni continue per ipotesi, la somma sarà una funzione continua, sia essa φ_1 . Per la seconda delle (4.4) si ha che anche la serie di Fourier (4.2) converge uniformemente ad una funzione continua, sia essa φ_2 . Per il Teorema precedente φ_1 ha gli stessi coefficienti di Fourier di φ_2 ; da qui, poichè sono due funzioni di L_1^1 ne segue che $\varphi_1 = \varphi_2$ q.o. Ma poichè le due funzioni sono continue, coincidono in ogni punto.

Per concludere resta da verificare la (4.6). Sia m un intero positivo. Allora la funzione $(1+|x+m|)^{-1}$ è decrescente in $[0, 1]$ e quindi si maggiora con il suo valore in zero. Se, al contrario, m è negativo, questa funzione si maggiora con il suo valore in 1; quindi si ha

$$\frac{1}{(1+|x+m|)} \leq \frac{1}{(1+|1+m|)} \leq \frac{c}{1+|m|}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato che la funzione $\frac{1+|m|}{1+|1+m|}$ è limitata. Abbiamo così verificato la (4.6) con C uguale al massimo fra c ed 1. \square

La formula (4.5) viene chiamata di *Formula di Poisson*, ma ci riferiremo al Teorema 4.1 con lo stesso nome. Se il periodo è T la formula si scrive

$$(4.7) \quad \sum_n f(x-nT) = \frac{1}{T} \sum_n \hat{f}\left(\frac{n}{T}\right) e^{2\pi i n \frac{x}{T}}$$

Come applicazione della formula di Poisson mostriamo ora come si possono ottenere delle identità approssimate periodiche a partire da i.a. su \mathbb{R} . Sia $\varphi \in L^1$ tale che $\varphi \geq 0$ e $\hat{\varphi}(0) = 1$. Sappiamo che la famiglia (φ_ϵ) , definita da

$$\varphi_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

è una identità approssimata su L^1 (vedi il Teorema 3.10). Il seguente teorema mostra che periodizzando le funzioni φ_ϵ , si ottiene una identità approssimata in L^1_1 .

Teorema 4.3. *Sia $\varphi \geq 0$ una funzione di L^1 avente media 1. Allora la famiglia \mathcal{U}_ϵ , $\epsilon > 0$, definita da*

$$(4.8) \quad \mathcal{U}_\epsilon(x) = \sum_m \varphi_\epsilon(x + m),$$

è una i.a. su L^1_1 .

Dimostrazione. Si ha $\mathcal{U}_\epsilon \geq 0$ perchè $\varphi \geq 0$. Per il Teorema 4.1 si ha che la serie in (4.8) converge in L^1_1 quindi $\mathcal{U}_\epsilon \in L^1_1$. Inoltre, si ha

$$\hat{\mathcal{U}}_\epsilon(k) = \hat{\varphi}_\epsilon(k) = \hat{\varphi}(\epsilon k).$$

Ne segue che $\hat{\mathcal{U}}_\epsilon(0) = 1$, cioè le funzioni \mathcal{U}_ϵ hanno media 1. Verifichiamo ora la terza proprietà delle i.a. Si ha

$$\begin{aligned} \int_{\delta < |x| < \frac{1}{2}} \mathcal{U}_\epsilon(x) dx &= \int_{\delta < |x| < \frac{1}{2}} \sum_m \varphi_\epsilon(x + m) dx \\ &= \sum_m \int_{\delta < |x| < \frac{1}{2}} \varphi_\epsilon(x + m) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R} - [-\delta, \delta]} \varphi_\epsilon(y) dy \\ &= \int_{|x| > \frac{\delta}{\epsilon}} \varphi(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} (1 - \chi_{[-\delta/\epsilon, \delta/\epsilon]}(z)) \varphi(z) dz. \end{aligned}$$

Poichè φ è in L^1 , per il teorema della convergenza dominata il limite dell'ultimo integrale per ϵ tendente a zero è zero. Si noti che è stato possibile scambiare la somma con l'integrale perchè la serie converge in L^1_1 . Abbiamo così verificato che (\mathcal{U}_ϵ) è una i.a. su L^1_1 . \square

5 . La trasformata di Fourier in L^2 .

Questa sezione è dedicata alla trasformata di Fourier di funzioni di quadrato sommabile e alle sue proprietà. L'integrale (3.1), che definisce la trasformata di Fourier per le funzioni di L^1 , non è definito per una generica funzione di L^2 . Tuttavia la trasformata di Fourier si può definire in maniera naturale anche in questo spazio e la teoria è particolarmente elegante. Come vedremo, la trasformata di Fourier è una isometria da L^2 in sé.

Il prodotto di convoluzione Nella Sezione 2 abbiamo visto che il prodotto di convoluzione fra due funzioni di L^1 è una funzione di L^1 . Il prodotto di convoluzione ha senso anche sotto altre condizioni. I seguenti lemma costituiscono degli esempi che ci saranno utili nel seguito.

Lemma 5.1. *Siano f e $g \in L^2$. Allora si ha che $f * g$ è continua e tende a zero all'infinito.*

Dimostrazione. Per la disuguaglianza di Schwarz si ha

$$|f * g(x)| \leq \int |f(x - y)g(y)|dy \leq \left(\int |f(x - y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |g(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Siano inoltre (f_n) e (g_n) due successioni di funzioni di C_c^∞ tali che $\lim f_n = f$ e $\lim g_n = g$ in L^2 . Allora la successione $(f_n * g_n)$ è in C_c^∞ per il Teorema 2.4. Inoltre converge uniformemente a $f * g$. Infatti

$$\begin{aligned} |f_n * g_n(x) - f * g(x)| &\leq |f_n * g_n(x) - f_n * g(x)| + |f_n * g(x) - f * g(x)| \\ &\leq \|f_n\|_2 \|g_n - g\|_2 + \|f_n - f\|_2 \|g\|_2 \end{aligned}$$

La conclusione del lemma è ora immediata. □

Il Teorema 2.1 sul prodotto di convoluzione è un caso particolare del seguente risultato generale, noto sotto il nome di Teorema di Young.

Teorema 5.2. *Siano $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ e r tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$ allora si ha $f * g \in L^r$ e*

$$(5.1) \quad \|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema solo nel caso $p = 1$ e $q = 2$. Siano $f \in L^1$ e $g \in L^2$, proviamo che $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2$. Si ha

$$(5.2) \quad \int |f * g(x)|^2 dx \leq \int \left[\int |f(y)|^{\frac{1}{2}} |f(y)|^{\frac{1}{2}} |g(x - y)| dy \right]^2 dx$$

La funzione $y \mapsto |f(y)|^{\frac{1}{2}}|g(x-y)|$ è in L^2 per quasi ogni x , infatti $\int |f(y)||g(x-y)|^2 dy$ è il prodotto di convoluzione di due funzioni di L^1 . Possiamo allora usare la disuguaglianza di Schwarz nell'integrale interno in (5.2):

$$\begin{aligned} \int |f * g(x)|^2 dx &\leq \int \left(\int |f(y)| dy \right) \left(\int |f(y)||g(x-y)|^2 dy \right) dx \\ &= \|f\|_1 \int \left(\int |f(y)||g(x-y)|^2 dy \right) dx \end{aligned}$$

Nell'integrale interno abbiamo il prodotto di convoluzione di due funzioni di L^1 , la cui norma si migliora con il prodotto delle norme

$$\int \left(\int |f(y)||g(x-y)|^2 dy \right) dx \leq \|f\|_1 \|g^2\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_2^2.$$

Ne segue che

$$\int |f * g(x)|^2 dx \leq \|f\|_1^2 \|g\|_2^2$$

Abbiamo così provato il teorema per $p = 1$ e $q = 2$.

La dimostrazione per p e q generici è simile (si basa sulla disuguaglianza di Holder). Il teorema è così provato. \square

La trasformata di Fourier Ci sono più modi per definire l'integrale di Fourier di funzioni di L^2 (3), noi useremo un argomento di densità, definendola come limite in L^2 di trasformate di funzioni che sono nello spazio di Schwarz.

Con il simbolo $\check{\cdot}$ denoteremo l'integrale

$$f\check{\cdot}(\xi) = \int f(x)e^{2\pi i x \xi} dx;$$

se $f \in L^1$ questo integrale è definito per ogni ξ e si ha

$$(5.3) \quad f\hat{\cdot}\check{\cdot} = f\check{\cdot}\hat{\cdot} = f\check{\cdot} \quad f\check{\cdot}\check{\cdot} = f\check{\cdot}f\check{\cdot} = f\hat{\cdot}$$

Verifichiamo la prima, la verifica della seconda è analoga

$$\begin{aligned} f\hat{\cdot}\check{\cdot}(x) &= (f\hat{\cdot})(-x) = \int f(y)e^{2\pi i x y} dy = f\check{\cdot}(x) \\ f\check{\cdot}\hat{\cdot}(x) &= \int f(-y)e^{-2\pi i x y} dy = \int f(y)e^{2\pi i x y} dy = f\check{\cdot}(x). \end{aligned}$$

Il seguente teorema mostra che l'operatore $f \rightarrow \hat{f}$ è un isomorfismo isometrico su \mathcal{S} .

Teorema 5.3. *Sia $f \in \mathcal{S}$. Allora*

(i) $\hat{f} \in \mathcal{S}$

(ii) $f^{\wedge\wedge} = f \quad f^{\vee\vee} = f$.

(iii) $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2 = \|\check{f}\|_2$

Dimostrazione. (i) Abbiamo già provato che la trasformata di una funzione di \mathcal{S} è una funzione di C^∞ (vedi Esercizio 3.7). Per provare che \hat{f} e le sue derivate sono a decrescenza rapida usiamo la formula

$$(5.4) \quad (2\pi i \xi)^q D^p \hat{f}(\xi) = [D^q((-2\pi i x)^p f(x))]^\wedge(\xi) \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

La verifica di questa formula è assegnata come esercizio (Esercizio 5.8). Sia $p \in \mathbb{N}$. La formula (5.4) esprime il primo membro come la trasformata di Fourier di una funzione di L^1 ; ne segue, per il teorema di Riemann Lebesgue, che la funzione $(2\pi i \xi)^q D^p \hat{f}(\xi)$ è infinitesima per ogni q . Da ciò segue subito che tutte le sue derivate di \hat{f} tendono a zero all'infinito con ordine maggiore di qualunque polinomio. Abbiamo così provato che \hat{f} è in \mathcal{S} .

(ii) La prima relazione segue dalla formula di inversione (3.15); usando il lemma precedente e questa relazione si ha inoltre

$$f^{\wedge\wedge} = f^{\vee\vee} = f^{\wedge\wedge} = f.$$

(iii) Per la formula di moltiplicazione e poichè $\overline{\hat{f}} = (\bar{f})^\vee$, si ha

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \int \hat{f} \overline{\hat{f}} = \int \hat{f} (\bar{f})^\vee = \int f (\bar{f})^{\wedge\wedge} = \int f \bar{f} = \|f\|_2^2$$

La verifica della seconda relazione in (iii) è immediata: per quanto appena provato si ha $\|f^\vee\|_2^2 = \|f^{\wedge\wedge}\|_2^2 = \|f\|_2^2$. \square

Esercizio 5.9 Provare la relazione (5.4).

Esercizio Siano f e $g \in \mathcal{S}$. Mostrare che $f * g \in \mathcal{S}$. Se $f \in L^1$ e $g \in \mathcal{S}$ si ha ancora $f * g \in \mathcal{S}$?

Abbiamo fino a qui stabilito alcune proprietà della trasformata di Fourier su \mathcal{S} . Ci serviremo ora di queste proprietà per definire la trasformata di Fourier su L^2 . Assegnata una funzione $f \in L^2$ esiste una successione (f_n) di elementi di \mathcal{S} che tende a f nella norma L^2 . La successione (\hat{f}_n) è convergente nella norma di L^2 ; infatti per la proprietà (iii) del Teorema 5.3 si ha

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_2 = \|f_n - f_m\|_2$$

per ogni $n, m \in \mathbb{N}$. Quindi la successione (\hat{f}_n) è di Cauchy, per la completezza ne segue la tesi. Ha perciò senso la seguente definizione.

Definizione 5.1 Sia $f \in L^2$ e sia (f_n) una successione di funzioni di \mathcal{S} convergente ad f nella norma di L^2 . Si chiama trasformata di f e si denota con $\mathcal{F}f$ il limite

$$(5.5) \quad \mathcal{F}f = \lim_n \hat{f}_n \quad \text{in norma } L^2$$

Si noti che la definizione non dipende dalla successione scelta; sia infatti (g_n) un'altra successione di \mathcal{S} che tende a f , denotiamo con F il limite $F = \lim_n \hat{g}_n$ nella norma L^2 . Si ha

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}f - F\|_2 &\leq \|\mathcal{F}f - \hat{f}_n\|_2 + \|\hat{f}_n - \hat{g}_n\|_2 + \|\hat{g}_n - F\|_2 \\ &= \|\mathcal{F}f - \hat{f}_n\|_2 + \|f_n - g_n\|_2 + \|\hat{g}_n - F\|_2 \end{aligned}$$

Poichè l'ultimo membro tende a zero per $n \rightarrow \infty$, si ha $\mathcal{F}f = F$ q.o.

Sia $f \in L^2$ e sia f_n una successione di \mathcal{S} che tende ad f nella norma L^2 . Poichè $\|\check{f}_n - \check{f}_m\|_2 = \|f_n - f_m\|_2$ $n, m \in \mathbb{N}$, la successione (\check{f}_n) è di Cauchy e quindi converge. Denotiamo allora con \mathcal{F}^* l'operatore su L^2 definito da

$$\mathcal{F}^*f = \lim_n \check{f}_n$$

Si vede facilmente che il limite non dipende dalla successione scelta. Il seguente teorema mostra che la trasformata di Fourier è un operatore invertibile, il suo inverso è \mathcal{F}^* e inoltre conserva le distanze ed i prodotti interni.

Teorema 5.4. L'operatore \mathcal{F} è lineare e invertibile su L^2 e il suo inverso è $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$. Inoltre se $f, g \in L^2$ si ha

- (i) $\|f\|_2 = \|\mathcal{F}f\|_2$
- (ii) $(f, g) = (\mathcal{F}f, \mathcal{F}g)$
- (iii) $\mathcal{F}^{-1}f(\xi) = \mathcal{F}f(-\xi)$ q.o.

L'identità in (i) si chiama formula di Plancherel, la (ii) formula di Plancherel in forma polarizzata e la (iii) formula di inversione.

Dimostrazione. Sia $f \in L^2$ e sia (f_n) una successione di \mathcal{S} convergente ad f ; dalla (ii) del Teorema 5.3 si ha $\check{f}_n \hat{\check{f}}_n = \hat{f}_n \check{f}_n = f_n$. Passando al limite si ottiene

$$\mathcal{F}^*\mathcal{F}f = \mathcal{F}\mathcal{F}^*f = f \quad \text{q.o.}$$

Abbiamo quindi provato che \mathcal{F} è invertibile e il suo inverso è \mathcal{F}^* , che d'ora in poi chiameremo \mathcal{F}^{-1} . La prova delle (i)-(iii) segue subito dalle analoghe proprietà su \mathcal{S} passando al limite:

- (i) Sia $f \in L^2$ e sia (f_n) una successione di \mathcal{S} tale che $f_n \rightarrow f$; per la (ii) del Teorema 5.3 si ha $\|f_n\|_2 = \|\hat{f}_n\|_2$, passando al limite segue la tesi.
- (ii) Segue subito dall'uguaglianza delle norme di f e \hat{f} e dall'identità di polarizzazione.

(iii) Per la prima delle (5.3) si ha $f_n^\sim = f_n^{\hat{\sim}}$. Passando al limite si ha

$$\mathcal{F}^{-1}f = \lim_n f_n^\sim = \lim_n f_n^{\hat{\sim}} = \mathcal{R}\mathcal{F}f$$

dove \mathcal{R} denota l'operatore di riflessione, cioè $\mathcal{R}f(x) = f(-x)$, che, ricordiamo, è continuo. \square

Esercizio 5.10 Mostrare che $\mathcal{F}\mathcal{F} = \mathcal{R}$.

Abbiamo così definito la trasformata di Fourier anche per le funzioni di quadrato integrabile e ne abbiamo mostrato le principali proprietà. Qui sotto, nel Teorema 5.7, proviamo che se $f \in L^2 \cap L^1$ allora le due trasformate coincidono q.o. Premettiamo una proposizione e un lemma

Proposizione 5.5. *Siano $f \in L^2$ e (u_n) una i.a. in L^1 . Allora si ha*

$$\lim_n u_n * f = f$$

nella norma L^2 .

Dimostrazione. Per Lemma 5.2 si ha $u_n * f \in L^2$. Per le proprietà delle identità approssimate si ha

$$(u_n * f - f)(x) = \int u_n(y)f(x-y) dy - \int u_n(y)dyf(x) = \int u_n(y)(\tau_y f - f)(x)dy.$$

Quindi per la disuguaglianza integrale di Minkowski

$$\|u_n * f - f\|_2 \leq \int \|u_n(y)(\tau_y f - f)\|_2 dy = \int u_n(y)\|\tau_y f - f\|_2 dy.$$

L'ultimo termine è finito perchè $f \in L^2$ e $u_n \in L^1$. Per il Lemma 2.7 (per $p = 2$) assegnato ϵ , esiste un δ tale che $\|\tau_y f - f\|_2 < \epsilon$ per $|y| < \delta$. Spezziamo l'integrale all'ultimo membro in due parti in corrispondenza di $\pm\delta$

$$\|u_n * f - f\|_2 = \int_{|y|<\delta} u_n(y)\|\tau_y f - f\|_2 dy + \int_{|y|>\delta} u_n(y)\|\tau_y f - f\|_2 dy,$$

usando la terza proprietà delle identità approssimate e la disuguaglianza di Minkowski ($\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$) si ha

$$\|u_n * f - f\|_2 = \int_{|y|<\delta} u_n(y)\|\tau_y f - f\|_2 dy + 2\|f\|_2 \int_{|y|>\delta} u_n(y)dy \leq \epsilon + 2\|f\|_2\epsilon$$

per n abbastanza grande. \square

Lemma 5.6. *Sia $f \in L^1 \cap L^2$. Allora esiste una successione ϕ_n di \mathcal{S} tale che*

$$\lim_n \|\phi_n - f\|_1 = 0 \qquad \lim_n \|\phi_n - f\|_2 = 0$$

Dimostrazione. Sia $f \in L^1 \cap L^2$. Sia (u_n) una famiglia di identità approssimate in \mathcal{S} . Denotiamo con f_n la successione $f_n = u_n * f$. Allora f_n converge ad f sia nella norma L^1 che nella norma L^2 . La successione (f_n) non è ancora la successione desiderata, perchè le funzioni f_n sono in C^∞ ma non sono a decrescenza rapida. Per ottenere una successione di funzioni a decrescenza rapida, anzi addirittura a supporto compatto, consideriamo una funzione $\psi \in C_c^\infty$ tale che $\psi(x) = 1$ se $|x| \leq 1$ e uguale a zero per $|x| > 2$ e $0 \leq \psi(x) \leq 1$ per ogni x . Poniamo $\psi_n(x) = \psi(\frac{x}{n})$. Si noti che $\psi_n \in C_c^\infty$ e $\psi_n(x) = 1$ se $|x| \leq n$, $\psi_n(x) = 0$ se $|x| \geq 2n$. La successione definita da $\phi_n = \psi_n f_n$ è in C_c^∞ . Proviamo che ϕ_n tende a f in L^1 . Si ha

$$(5.6) \quad \|\phi_n - f\|_1 \leq \|\phi_n - f_n\|_1 + \|f_n - f\|_1$$

Il secondo addendo tende a zero. Inoltre si ha

$$\begin{aligned} \|\phi_n - f_n\|_1 &= \int_{|x| > n} |\psi_n - 1| |f_n| dx < 2 \int_{|x| \geq n} |f_n| dx \\ &\leq 2 \int_{|x| \geq n} |f_n - f| dx + 2 \int_{|x| \geq n} |f| dx \\ &\leq 2\|f_n - f\|_1 + 2 \int_{|x| \geq n} |f| dx. \end{aligned}$$

segue subito che anche il primo addendo in (5.6) tende a zero. Quindi abbiamo provato che ϕ_n tende a f in L^1 . La verifica che ϕ_n tende a f anche in L^2 è del tutto analoga. La tesi è così provata. \square

Teorema 5.7. *Sia $f \in L^1 \cap L^2$; allora $\hat{f} = \mathcal{F}f$.*

Dimostrazione. Sia $f \in L^1 \cap L^2$. Per il Lemma 5.6 esiste una successione $(\phi_n) \subset \mathcal{S}$ convergente ad f sia nella norma L^1 che nella norma L^2 . Allora $\hat{\phi}_n$ converge uniformemente ad \hat{f} su \mathbb{R} e $\hat{\phi}_n$ converge ad $\mathcal{F}f$ nella norma L^2 . Da ciò segue che \hat{f} coincide quasi ovunque con $\mathcal{F}f$. \square

Per calcolare analiticamente la trasformata di Fourier di funzioni di L^1 (quando ciò è possibile) abbiamo usato l'integrazione nel campo complesso e la tecnica dei residui. Per le funzioni che sono in L^2 e non in L^1 questa via non è percorribile a causa della definizione stessa di trasformata di Fourier. Può essere utile allora la seguente

Proposizione 5.8. *Sia $f \in L^2$; allora si ha*

$$(5.7) \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \mathcal{F}f(\xi) \quad \text{in norma } L^2.$$

Se inoltre il limite esiste finito per q.o. ξ , deve coincidere con $\mathcal{F}f(\xi)$ per q.o. ξ .

Dimostrazione. Si ha $\chi_T f \in L^1$, l'integrale che compare nella (5.7) è $(\chi_T f)^\wedge$; inoltre, per il Teorema 5.7 si ha $(\chi_T f)^\wedge = \mathcal{F}(\chi_T f)$. Ne segue, per l'identità di Plancherel, che

$$\|(\chi_T f)^\wedge - \mathcal{F}f\|_2 = \|\mathcal{F}(\chi_T f) - \mathcal{F}f\|_2 = \|\chi_T f - f\|_2.$$

Poichè, per il teorema della convergenza dominata, l'ultimo membro tende a zero per T tendente a ∞ , la formula (5.7) è provata. Per concludere il teorema osserviamo che deve esistere una estratta da $(\chi_T f)^\wedge$ che converge quasi ovunque a $\mathcal{F}f$. Quindi, se il limite nella (5.7) esiste per q.o. ξ , deve coincidere necessariamente con $\mathcal{F}f$ q.o. \square

Nella Sezione 6 ci sarà utile la formula di inversione fornita dalla seguente

Proposizione 5.9. *Siano $f \in L^2$ e $\mathcal{F}f \in L^1$. Allora si ha*

$$(5.8) \quad f(x) = \int \mathcal{F}f(y) e^{2\pi ixy} dy \quad q.o.x$$

Dimostrazione. Per la (5.7) applicata a $\mathcal{F}f$ si ha

$$(5.9) \quad f(x) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \mathcal{F}f(y) e^{2\pi ixy} dy$$

dove il limite è inteso nella norma L^2 . D'altra parte il limite esiste puntualmente ed è $\int \mathcal{F}f(y) e^{2\pi ixy} dy$, perchè la funzione $\mathcal{F}f$ è in L^1 . Per il Teorema 1.7 i due limiti coincidono. Ne segue la tesi. \square

Teorema 5.10. *i) Siano $f \in L^1$ e $g \in L^2$, allora*

$$(5.10) \quad \mathcal{F}(f * g) = \hat{f} \mathcal{F}g \quad q.o.$$

ii) Siano φ, ψ due funzioni di L^2 , allora

$$(5.11) \quad \widehat{(\varphi\psi)} = (\mathcal{F}\varphi) * (\mathcal{F}\psi).$$

Dimostrazione. i) Sia (g_n) una successione di elementi di \mathcal{S} convergente a g in L^2 . Poichè $f * g_n \in L^1$ si ha

$$(5.12) \quad \widehat{(f * g_n)} = \hat{f} \hat{g}_n.$$

Per il Teorema 5.7 il primo membro è uguale a $\mathcal{F}(f * g_n)$; inoltre tende a $\mathcal{F}(f * g)$. Infatti per l'identità di Plancherel e la (5.1) si ha

$$(5.13) \quad \|\widehat{(f * g_n)} - \mathcal{F}(f * g)\|_2 = \|f * g_n - f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g_n - g\|_2.$$

La successione al secondo membro in (5.12) tende a $\hat{f} \mathcal{F}g$; infatti, poichè \hat{f} è limitata, si ha

$$\|\hat{f} \hat{g}_n - \hat{f} \mathcal{F}g\|_2 \leq \|\hat{f}\|_\infty \|\hat{g}_n - \mathcal{F}g\|_2 \leq \|\hat{f}\|_1 \|g_n - g\|_2.$$

Ne segue che i limiti delle due successioni in (5.12) coincidono quasi ovunque.

ii) Verifichiamo ora la formula (5.11). Si noti che entrambi i membri sono funzioni continue. Infatti il primo membro è la trasformata di una funzione in L^1 e il secondo membro è la convoluzione di due funzioni di L^2 .

Siano (φ_n) e (ψ_n) due successioni in \mathcal{S} tali che $\lim \varphi_n = \varphi$ e $\lim \psi_n = \psi$ in L^2 . Antitrasformando entrambi i membri si verifica facilmente che

$$(5.14) \quad \widehat{(\varphi_n \psi_n)} = \widehat{\varphi_n} * \widehat{\psi_n}.$$

Proviamo che il primo membro converge uniformemente su \mathbb{R} a $\widehat{(\varphi \psi)}$. Infatti, per la disuguaglianza di Schwarz si ha

$$\begin{aligned} |\widehat{(\varphi_n \psi_n)} - \widehat{(\varphi \psi)}| &\leq \|\varphi_n \psi_n - \varphi \psi\|_1 \\ &\leq \|\varphi_n \psi_n - \varphi \psi_n\|_1 + \|\varphi \psi_n - \varphi \psi\|_1 \\ &\leq \|\psi_n\|_2 \|\varphi_n - \varphi\|_2 + \|\varphi\|_2 \|\psi_n - \psi\|_2. \end{aligned}$$

Mostriamo che il secondo membro dell'identità (5.14) converge a $\mathcal{F}\varphi * \mathcal{F}\psi$ uniformemente su \mathbb{R} . Aggiungendo e togliendo $\widehat{\varphi_n} * \mathcal{F}\psi$, ricordando che il prodotto di convoluzione di due funzioni di L^2 si maggiora con il prodotto delle norme e usando l'identità di Plancherel si ha

$$\begin{aligned} |\widehat{\varphi_n} * \widehat{\psi_n} - \mathcal{F}\varphi * \mathcal{F}\psi| &\leq |\widehat{\varphi_n} * (\widehat{\psi_n} - \mathcal{F}\psi) + (\widehat{\varphi_n} - \mathcal{F}\varphi) * \mathcal{F}\psi| \\ &\leq \|\widehat{\varphi_n}\|_2 \|\widehat{\psi_n} - \mathcal{F}\psi\|_2 + \|\widehat{\varphi_n} - \mathcal{F}\varphi\|_2 \|\mathcal{F}\psi\|_2 \\ &\leq \|\varphi_n\|_2 \|\psi_n - \psi\|_2 + \|\varphi_n - \varphi\|_2 \|\psi\|_2. \end{aligned}$$

Abbiamo così provato la (5.11) e il teorema è concluso. □

Esercizio 5.11 Siano $\varphi, \psi \in L^2$. Usando la (5.11) provare che

$$(5.15) \quad (\varphi \psi)^\sim = (\mathcal{F}^{-1}\varphi) * (\mathcal{F}^{-1}\psi).$$

qui con il simbolo \sim si intende $\widehat{\sim}$.

Il Teorema di Paley Wiener Una funzione di L^2 si dice *a banda limitata* o semplicemente *a banda* se la sua trasformata di Fourier ha supporto in un intervallo limitato.

Definizione 5.2 Una funzione intera $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ si dice di tipo esponenziale $\sigma > 0$ se esiste un numero positivo A tale che

$$|F(z)| \leq A e^{\sigma|z|} \quad z \in \mathbf{C}.$$

Alcuni esempi sono le funzioni $\sin(z)/z, z^k, k \in \mathbb{N}, z^k e^z$. La funzione e^{-z^2} non è intera di tipo esponenziale per nessun σ , infatti è olomorfa ma sull'asse immaginario

è uguale a $e^{\text{Im}(z)^2}$. Il seguente Teorema di Paley-Wiener caratterizza le funzioni di L^2 che sono a banda.

Teorema 5.11. (Teorema di Paley-Wiener) *Sia f una funzione in L^2 . Allora f ha supporto in $[-\tau, \tau]$, $\tau > 0$, se e solo se la sua trasformata di Fourier è la restrizione a \mathbb{R} di una funzione intera di tipo esponenziale $\sigma = 2\pi\tau$.*

Dimostrazione. Dimostriamo solo una delle implicazioni. La dimostrazione della seconda parte, più complessa, si trova nell'appendice.

Supponiamo f sia una funzione di L^2 avente supporto in $[-\tau, \tau]$. Osserviamo che f è anche in L^1 perchè ha supporto in un intervallo, quindi esiste $\int f(t)e^{-2\pi itx} dt$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Denotiamo con F l'integrale.

$$F(z) = \int f(t)e^{-2\pi itz} dt \quad z \in \mathbb{C};$$

si noti che $F|_{\mathbb{R}} = \hat{f}$. Derivando sotto il segno di integrale si verifica subito che F è intera perchè soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann $\frac{\partial}{\partial x}F + i\frac{\partial}{\partial y}F = 0$. Inoltre si ha

$$|F(z)| \leq \int_{-\tau}^{\tau} |f(t)e^{-2\pi itz}| dt.$$

Poichè $|e^{-2\pi itz}| = e^{2\pi t\text{Im}(z)} \leq e^{2\pi |t\text{Im}(z)|} \leq e^{2\pi\tau|z|}$ per $t \in [-\tau, \tau]$, usando la disuguaglianza di Schwarz in L^2 si ha

$$|F(z)| \leq e^{2\pi\tau|z|} \int_{-\tau}^{\tau} |f(t)| dt \leq \sqrt{2\tau}\|f\|_2 e^{2\pi\tau|z|}.$$

□

Dal teorema, scambiando i ruoli di f e della sua trasformata, segue che se una funzione di L^2 è a banda, allora è la restrizione a \mathbb{R} di una funzione intera. Ma una funzione intera non può essere nulla su un intervallo a meno che non sia identicamente nulla. Se ne deduce che *l'unica funzione di L^2 che è sia a supporto compatto che a banda è la funzione identicamente nulla.*

Osservazione 5.1 Il teorema di Paley Wiener fornisce un ulteriore esempio della dualità locale/globale fra una funzione e la sua trasformata, cioè la relazione che abbiamo più volte sottolineato fra regolarità di una funzione f (di $\mathcal{F}f$) e decadimento all'infinito della sua trasformata di Fourier (di f).

Nelle precedenti sezioni abbiamo definito la trasformata di Fourier per funzioni assolutamente integrabili e per funzioni di quadrato sommabile su \mathbb{R} , usando due diverse notazioni. D'ora in poi, se ciò non darà luogo ad equivoci useremo per entrambe le trasformate un unico simbolo, cioè $\hat{\cdot}$, per le funzioni di entrambi gli spazi.

6 . Il teorema del campionamento.

Questa sezione è dedicata al teorema del campionamento, che va anche sotto il nome di *Teorema di Shannon* ⁽⁶⁾. Il teorema afferma che se una funzione di L^2 è a banda, allora si può scrivere come somma di infinite traslate di funzioni sinc. Se per esempio f ha banda in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, allora

$$(6.1) \quad f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) \frac{\sin \pi(x - m)}{\pi(x - m)}$$

e la serie converge uniformemente. Conseguenza immediata di questa formula è che la funzione può essere ricostruita esattamente conoscendo soltanto i suoi valori sugli interi. In generale, per le funzioni a banda in un intervallo $[-\Omega, \Omega]$ vale l'analoga formula (6.5) dove la spaziatura fra i punti è di $(2\Omega)^{-1}$.

Il teorema è estremamente utile nell'analisi dei segnali. Se si tratta ad esempio di un segnale audio, che, come noto, è generato da un'onda acustica, un microfono converte il segnale acustico in un segnale elettrico analogico; successivamente un convertitore Analogico/Digitale (A/D) trasforma questo segnale in un segnale digitale campionato. Il segnale campionato viene a questo punto trasmesso (o immagazzinato) e dopo la ricezione viene ricostruito subendo le trasformazioni inverse delle precedenti. Negli apparecchi per Compact Discs si usa la teoria del campionamento e tutti sappiamo che i PC contengono software che permettono di analizzare e sintetizzare musica campionata [CD, MP3]. In realtà i segnali acustici non sono a banda, ma poichè l'orecchio umano non percepisce le frequenze al di fuori dell'intervallo $[20, 20.000Hz]$ i suoni possono essere considerati a banda, e quindi si possono campionare, magari filtrandoli preventivamente per eliminare le alte frequenze. Infine il teorema del campionamento è molto utile in telefonia, perchè si possono inviare più messaggi lungo un unico cavo, sfruttando gli intervalli: con un cavo a fibra ottica si possono inviare 25.000 messaggi contemporaneamente.

Come vedremo, il teorema del campionamento si basa sul fatto fondamentale che le funzioni a banda in un intervallo assegnato sono uno spazio di Hilbert e la formula (6.1) altro non è che l'espansione di f in termini di una base ortonormale in tale spazio.

Ma prima di spiegare le ragioni profonde della formula (6.1), vogliamo mostrare come essa si può ottenere, con semplici passaggi, nell'ipotesi che f abbia un decadimento all'infinito sufficiente perchè valga la formula di Poisson (4.5). Questo semplice ragionamento ci sarà utile nel seguito.

Teorema 6.1. *Sia $f \in L^2$ con \hat{f} avente supporto in $[-\Omega, \Omega]$. Supponiamo inoltre che $|f(x)| \leq C(1 + |x|)^{-(1+\delta)}$ con C e δ numeri reali positivi. Allora si ha*

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{2\Omega}\right) \frac{\sin 2\pi\Omega(x - \frac{n}{2\Omega})}{2\pi\Omega(x - \frac{n}{2\Omega})}.$$

Dimostrazione. Poichè $\hat{f} \in L^1$ possiamo applicare la formula di Poisson (4.7) con i ruoli di f e \hat{f} invertiti e con $T = 2\Omega$, ricordando che $\hat{\hat{f}} = \tilde{f}$, si ottiene

$$(6.2) \quad \sum_m \hat{f}(y + m2\Omega) = \frac{1}{2\Omega} \sum_m f\left(-\frac{m}{2\Omega}\right) e^{2\pi i y \frac{m}{2\Omega}} = \frac{1}{2\Omega} \sum_m f\left(\frac{m}{2\Omega}\right) e^{-2\pi i y \frac{m}{2\Omega}}.$$

Moltiplichiamo primo e secondo membro per $\chi_{[-\Omega, \Omega]} e^{+2\pi i y x}$: poichè \hat{f} ha supporto in $[-\Omega, \Omega]$ la somma al primo membro si riduce ad un sol termine e si ottiene

$$\hat{f}(y) e^{+2\pi i y x} = \frac{1}{2\Omega} \sum_m f\left(\frac{m}{2\Omega}\right) \chi_{[-\Omega, \Omega]}(y) e^{-2\pi i y \frac{m}{2\Omega}} e^{+2\pi i y x}.$$

Integrando si ha

$$\int \hat{f}(y) e^{+2\pi i y x} dy = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} \sum_m f\left(\frac{m}{2\Omega}\right) e^{-2\pi i y \frac{m}{2\Omega}} e^{+2\pi i y x} dy.$$

Poichè $\hat{f} \in L^1$ possiamo usare la formula di inversione (5.8) e si ha

$$f(x) = \frac{1}{2\Omega} \sum_m \int_{-\Omega}^{\Omega} f\left(\frac{m}{2\Omega}\right) e^{2\pi i y (x - \frac{m}{2\Omega})} dy.$$

Calcolando l'integrale si ottiene la formula desiderata. Si noti che lo scambio fra serie e integrale è lecito per l'ipotesi di decadimento su f ; in questo caso infatti la serie di Fourier converge assolutamente.

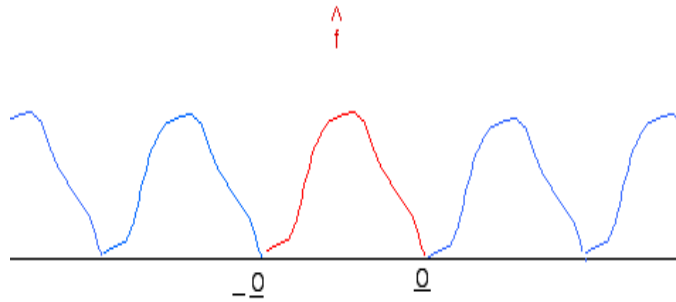


Figura 1. La funzione \hat{f} periodizzata.

□

Lo spazio B_Ω .

Denotiamo con B_Ω lo spazio definito da

$$B_\Omega = \{f \in L^2 \mid \text{supp } \hat{f} \subset [-\Omega, \Omega]\}$$

Osserviamo che, per il Teorema di Paley Wiener, si tratta di funzioni che ammettono una estensione intera. Si noti anche che è uno spazio invariante per traslazioni. Ci è utile ora introdurre anche il seguente sottospazio di L^2

$$\Lambda_\Omega = \{h \in L^2 \mid \text{supp } h \subset [-\Omega, \Omega]\},$$

munito della norma L^2 . Si tratta ovviamente di uno spazio di Hilbert, isomorfo allo spazio $L^2_{2\Omega}$ delle funzioni periodiche di quadrato integrabile in $[-\Omega, \Omega]$; l'isomorfismo è dato dall'applicazione $\mathcal{J} : L^2_{2\Omega} \mapsto \Lambda_\Omega$ definita da

$$\mathcal{J}f = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \chi_{[-\Omega, \Omega]} f$$

Si noti che $\mathcal{J}f$ dipende da Ω . L'applicazione è ovviamente surgettiva. È anche iniettiva, per $f \in L^2_{2\Omega}$ si ha infatti

$$(6.3) \quad \|\mathcal{J}f\|_{\Lambda_\Omega} = \left\| \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \chi_{[-\Omega, \Omega]} f \right\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \left(\int_{-\Omega}^{\Omega} |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2_{2\Omega}}.$$

Il seguente Teorema 6.2 mostra che B_Ω è isomorfo a Λ_Ω e che ogni suo elemento si può scrivere come prodotto di convoluzione di se stesso con la trasformata della funzione caratteristica dell'intervallo $[-\Omega, \Omega]$.

Teorema 6.2. *Lo spazio B_Ω è uno spazio di Hilbert isomorfo a Λ_Ω e per ogni $f \in B_\Omega$ si ha*

$$(6.4) \quad f(x) = \int f(y) \frac{\sin 2\pi\Omega(x-y)}{\pi(x-y)} dy$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ (7).

Dimostrazione. È immediato verificare che è un sottospazio di L^2 . Mostriamo che B_Ω è un sottospazio chiuso. Sia (f_n) una successione di B_Ω che converge ad un elemento f di L^2 . Poiché le \hat{f}_n sono nulle q.o. fuori di $[-\Omega, \Omega]$, usando la formula di Plancherel, si ha

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-\Omega, \Omega]} |\hat{f}(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R} \setminus [-\Omega, \Omega]} |\hat{f}(x) - \hat{f}_n(x)|^2 dx < \|\hat{f} - \hat{f}_n\|_2^2 = \|f - f_n\|_2^2.$$

Quindi \hat{f} è nulla q.o. fuori di $[-\Omega, \Omega]$. Abbiamo così provato che B_Ω è chiuso. Per la formula di Plancherel l'applicazione \mathcal{F}^{-1} è un isomorfismo di Λ_Ω in B_Ω .

Sia ora $f \in B_\Omega$. Per provare la (6.2) useremo la formula (5.15) con $\varphi = \mathcal{F}f$ e $\psi = \chi_{[-\Omega, \Omega]}$. Al primo membro si ha $(\mathcal{F}f \cdot \chi_{[-\Omega, \Omega]})^\vee = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = f$; quindi

$$f = (\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f) * (\mathcal{F}^{-1}\chi_{[-\Omega, \Omega]}) = f * (\mathcal{F}^{-1}\chi_{[-\Omega, \Omega]})$$

poiché $\mathcal{F}^{-1}\chi_{[-\Omega, \Omega]}(x) = \sin(2\pi\Omega x)/\pi x$ si ha la (6.4). \square

Teorema 6.3. (Teorema di Shannon) Sia $f \in L^2$ e sia $\text{supp} \hat{f} \subseteq [-\Omega, \Omega]$. Allora

$$(6.5) \quad f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{2\Omega}\right) \frac{\sin 2\pi\Omega(x - \frac{n}{2\Omega})}{2\pi\Omega(x - \frac{n}{2\Omega})}$$

e la serie converge uniformemente.

Dimostrazione. Per il Teorema 6.2 e l'osservazione che lo precede le applicazioni

$$\mathcal{J} : L^2_{2\Omega} \mapsto \Lambda_{\Omega} \quad \mathcal{F}^{-1} : \Lambda_{\Omega} \mapsto B_{\Omega}$$

sono isomorfismi isometrici. Quindi portano basi ortonormali in basi ortonormali. In particolare, scegliendo come base di $L^2_{2\Omega}$ la famiglia (e_n) con $e_n(y) = e^{-2\pi i n \frac{y}{2\Omega}}$ si ottiene che la famiglia (r_n) di B_{Ω} definita da

$$r_n = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \chi_{[-\Omega, \Omega]} e_n\right)$$

è una base ortonormale. Si noti, sia (e_n) che (r_n) dipendono da Ω . Scriviamo r_n in forma esplicita

$$r_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \mathcal{F}\left(\chi_{[-\Omega, \Omega]} e_n\right)(-\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{-2\pi i n \frac{z}{2\Omega}} e^{2\pi i z \xi} dz$$

E quindi

$$(6.6) \quad r_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \frac{\sin 2\pi\Omega(x - \frac{n}{2\Omega})}{\pi(x - \frac{n}{2\Omega})}$$

Poichè (r_n) è una base ortonormale di B_{Ω} , ogni f di B_{Ω} si esprime come combinazione lineare infinita degli elementi della base $f = \sum_n (f, r_n) r_n$. Per calcolare i coefficienti usiamo la formula di inversione (5.8)

$$(f, r_n) = (\hat{f}, \hat{r}_n) = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(y) e^{2\pi i n \frac{y}{2\Omega}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} f\left(\frac{n}{2\Omega}\right).$$

Abbiamo così provato che per ogni $f \in B_{\Omega}$ si ha

$$(6.7) \quad f = \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} f\left(\frac{n}{2\Omega}\right) r_n,$$

che è la formula (6.5) dell'enunciato.

Per provare la convergenza uniforme osserviamo che, se $f \in B_{\Omega}$, per la (6.4) si ha $f = \sqrt{2\Omega} f * r_0$; quindi, per il Lemma 5.1,

$$(6.8) \quad \|f\|_{\infty} \leq \sqrt{2\Omega} \|f\|_2 \|r_0\|_2 = C \|f\|_2$$

dove C è una costante che non dipende da f . Da ciò segue subito che la convergenza in L^2 implica la convergenza uniforme in B_{Ω} . Il teorema è così completamente dimostrato. \square

Oversampling, undersampling e variazioni sul tema

Nella formula (6.5), la distanza fra due campionature successive è $1/(2\Omega)$, Il numero di campionature per unità di tempo (quindi in questo caso 2Ω) si chiama *frequenza di campionamento*. La frequenza di campionamento relativa al più piccolo intervallo contenente il supporto di \hat{f} viene chiamata *frequenza di Nyquist*. Se una funzione è in B_Ω , sarà anche in B_T con $T > \Omega$ e quindi la formula di Shannon vale anche se rimpiazziamo Ω con $T > \Omega$, e in questo caso la frequenza di campionamento è maggiore di quella di Nyquist. In generale se, come in questo caso, si usa una frequenza maggiore di quella di Nyquist, si dice che si è fatto un *oversampling*. Un oversampling richiede ovviamente un maggiore costo computazionale.

Talvolta, per ridurre i costi, si usa invece una frequenza minore di quella di Nyquist (*undersampling*). Mentre con un oversampling la somma della serie è ancora f , se si opera un undersampling si ottiene una funzione diversa da f (cosiddetta “alias”). Per chiarire questo punto usiamo lo stesso argomento del Teorema 6.1, sia $f \in B_\Omega$ e questa volta periodizzando la \hat{f} con periodo $T < \Omega$. Ripercorriamo lo stesso ragionamento fatto per dimostrare il teorema: scriviamo come in (6.2) la formula di Poisson con T al posto di Ω . Si ottiene

$$\sum_n \hat{f}(y - n2T) = \frac{1}{2T} \sum_n f\left(\frac{n}{2T}\right) e^{-2\pi i y \frac{n}{2T}}.$$

$y \in \mathbb{R}$. Si noti che questa volta nell’intervallo $[-T, T]$ il primo membro non si riduce al solo termine $\hat{f}(y)$. Infatti, se $y \in [-T, T]$, gli addendi non nulli nella somma al primo membro sono le traslate che “entrano” in questo intervallo; si veda ad esempio la Figura 2: in questo caso la somma si riduce a tre termini, quelli con $n = 0$ e con $n = \pm 1$. Moltiplichiamo ora per $e^{2\pi i y x}$ e integriamo in y sull’intervallo $[-T, T]$. Si ottiene così

$$\int_{-T}^T \sum_n \hat{f}(y - n2T) e^{2\pi i x y} dy = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{2T}\right) \frac{\sin 2\pi T(x - \frac{n}{2T})}{2\pi T(x - \frac{n}{2T})}.$$

La somma al primo membro contiene varie traslate e quindi il primo membro non si riduce a $f(x)$, come nel Teorema 6.1,. Abbiamo così spiegato perchè per una funzione $f \in B_\Omega$ la serie di Shannon con parametro $T < \Omega$ non ricostruisce f ma un’altra funzione (*alias*). L’errore indotto si chiama *aliasing* e si manifesta principalmente agli estremi dell’intervallo. La Figura 2 mostra la funzione \hat{f} e le traslate che “entrano” nell’intervallo $[-T, T]$. Parte del contenuto di f sulle alte frequenze si trova ora nella regione delle basse frequenze. Solo la parte attorno a zero rimane inalterata. In un segnale acustico l’effetto dell’undersampling si può sentire in maniera chiara come un clipping metallico del suono.



Figura 2. La \hat{f} e le sue traslate in un caso di undersampling.

Nella pratica accade che persino le funzioni che non sono a banda vengono approssimate con una serie di Shannon. Detta f la funzione non a banda, si sostituisce ad \hat{f} la funzione $\chi_{[-T, T]} \hat{f}$ con T opportuno. Ciò equivale ad azzerare il segnale sulle alte frequenze. Naturalmente la somma della serie non sarà più f , si pensi, ad esempio, che la funzione rappresentata dalla serie deve essere liscia perchè ha una estensione analitica.

Un oversampling che migliora la convergenza della serie I termini della serie $\text{sinc}(2\pi\Omega x) = \sin(2\pi\Omega x)(2\pi\Omega x)^{-1}$ in (6.4) hanno un lento decadimento all'infinito. Con una tecnica che fa uso di un oversampling si può migliorare la convergenza della serie sostituendo la funzione *sinc* con funzioni che hanno un più rapido decadimento. Illustriamo brevemente questa idea in maniera formale, perciò senza preoccuparci di problemi di convergenza, o di scambi di integrali con serie.

Sia f una funzione a banda in $[-\Omega, \Omega]$ e sia $T > \Omega$. Per scegliere la funzione da sostituire alla funzione *sinc* ragioniamo “dalla parte delle trasformate”. Se vogliamo funzioni con un maggiore decadimento all'infinito, dobbiamo rimpiazzare la trasformata di Fourier della funzione *sinc*, cioè la funzione caratteristica, con una funzione che sia almeno continua. Inoltre dovrà essere uguale ad 1 in $[-\Omega, \Omega]$ e zero fuori di $[-T, T]$. Sia γ la funzione definita da

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq \Omega, \\ \frac{x-T}{\Omega-T} & \text{se } \Omega \leq |x| \leq T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(vedi Figura 3). Denotiamo con g l'antitrasformata di γ ; si noti, g e γ dipendono da T e da Ω . Si verifica facilmente che

$$(6.9) \quad g(x) = \hat{\gamma}(x) = \frac{1}{T-\Omega} \frac{\sin 2\pi x(T+\Omega)}{\pi x} \frac{\sin 2\pi x(T-\Omega)}{\pi x},$$

e quindi, poichè sono funzioni pari, $\hat{g} = \gamma$. Usiamo ancora una volta l'argomento del Teorema 6.1, periodizzando la \hat{f} con periodo T

$$(6.10) \quad \frac{1}{2T} \sum_n f\left(\frac{n}{2T}\right) e^{-2\pi i n \frac{y}{2T}} = \sum_n \hat{f}(y + n2T) = \hat{f}(y) \quad [-\Omega, \Omega].$$

Moltiplichiamo per $e^{2\pi ixy}\gamma(y)$ ed integriamo. Allora usando la formula (6.10), formula di inversione e il fatto che γ è uguale ad 1 sul supporto di \hat{f} si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \hat{f}(y)e^{2\pi ixy} dy = \int \hat{f}(y)\gamma(x)e^{2\pi ixy} dy \\ &= \frac{1}{2T} \sum_n f\left(\frac{n}{2T}\right) \int \hat{g}(y)e^{-2\pi i\frac{n}{2T}y} e^{2\pi ixy} dy \\ &= \frac{1}{2T} \sum_n f\left(\frac{n}{2T}\right) \int \hat{g}(y) e^{2\pi i(x-\frac{n}{2T})y} dy \\ &= \frac{1}{2T} \sum_n f\left(\frac{n}{2T}\right) g\left(x - \frac{n}{2T}\right). \end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto la seguente espansione di f

$$f(x) = \frac{1}{2T} \sum_n f\left(\frac{n}{2T}\right) g\left(x - \frac{n}{2T}\right)$$

per $x \in [-\Omega, \Omega]$ dove la funzione g è data da (6.9) e la convergenza della serie è più rapida che nella (6.5) perchè i termini della serie hanno un maggiore decadimento. Il prezzo da pagare per questo è, come in tutte le operazioni di oversampling, una maggior frequenza di campionamento.

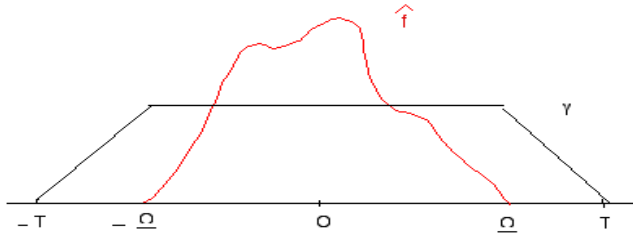


Figura 3. Oversampling con la funzione γ

7. Note

- 1 Si prova che non è indotta da una norma.
- 2 Un esempio di tale funzione è indicato nell' Esercizio 1.2.
- 3 La relazione (2.7): $\text{supp}(f * g) \subset \text{supp}f + \text{supp}g$ si prova anche per due qualunque funzioni misurabili f e g per le quali esiste $f * g$. Per provare questa relazione bisogna definire il supporto di una funzione misurabile definita quasi ovunque.
- 4 Si possono dare altre definizioni di trasformata di Fourier, per esempio

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi} dx; \quad \hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi} dx;$$

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi} dx.$$

- 5 Funzioni di L^1 che hanno la trasformata in L^1 ce ne sono quante se ne vuole; basta che f abbia un pó di regolarità per assicurare un decadimento a zero all'infinito della funzione \hat{f} . Per esempio, se f è derivabile due volte e sia f' che f'' sono in L^1 allora, per la (3.2) si ha $\widehat{f''}(\xi) = (2\pi i\xi)^2 \hat{f}(\xi)$ e $\widehat{f''}(\xi)$ è limitata; da ciò segue che $|\hat{f}| \leq \text{cost}(1 + \xi^2)^{-1}$ e quindi $\hat{f} \in L^1$.
- 6 Un analogo del Teorema 5.2 vale anche negli spazi ℓ^p (vedi la Nota 9 del Capitolo 1). Il caso $p = q = 1$ è stato visto nella Nota 9; provare per esercizio il caso $p = 1$ e $q = 2$, cioè: se $a \in \ell^1$ e $b \in \ell^2$ allora $a * b \in \ell^2$ e si ha

$$\|a * b\|_2 \leq \|a\|_1 \|b\|_2.$$

La dimostrazione si ottiene con un ragionamento analogo a quello del Teorema 5.2

- 7 Il teorema fu prima formulato da Harry Nyquist in 1928 (*Certain topics in telegraph transmission theory*) ma fu provato solo successivamente da Claude E. Shannon nel 1949 (*Communication in the presence of noise*). Kotelnikov lo pubblicò nel 1933, Whittaker nel 1935, e Gabor nel 1946.
- 8 Il Teorema 6.2 ci fornisce un esempio di *spazio di Hilbert a nucleo riprodotte*. Ogni elemento f di B_Ω si può scrivere $f(x) = \int K(x, y)f(y) dy$ con $K(x, y) = K(y, x) = \frac{\sin(2\pi\Omega(x-y))}{\pi(x-y)}$. Si prova che l'identità si può rappresentare come un operatore integrale con un nucleo K .

8. Esercizi. Trasformata di Fourier in L^1

1.1 Sia $\varphi \in \mathcal{S}$. Provare che le seguenti condizioni sono equivalenti

i) per ogni $j, k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^{2k} |D^j \varphi(x)| = 0$$

ii) per ogni $j, k \in \mathbb{N}$ esiste una costante $C_{j,k}$, dipendente solo da φ , tale che

$$|D^j \varphi(x)| \leq \frac{C_{j,k}}{(1+x^2)^k}$$

1.2 ()** Nella Proposizione 1.3 si è fatto uso di una funzione ψ di classe C_c^∞ uguale ad 1 nell'intervallo $[-1, 1]$. Verificare che una funzione con queste proprietà si può costruire nel modo seguente. Sia f la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/1-x^2} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Sia ora φ la funzione $\varphi(x) = \tau_2 f - \tau_{-2} f$. La funzione ψ definita da

$$\psi(x) = c \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt.$$

$c \in \mathbb{R}$ opportunamente scelta, è la funzione desiderata.

Si noti che la stessa tecnica può essere usata per trovare un esempio per la funzione φ che compare nella dimostrazione della Proposizione 1.2.

1.3 Sia $s = \chi * (\chi * \chi)$, dove $\chi = \chi_{[-1/2, 1/2]}$, mostrare che

$$t(x) = \begin{cases} 3/4 - x^2 & \text{if } |x| \leq 1/2, \\ 1/2(x - 3/2)^2 & \text{if } 1/2 \leq x \leq 3/2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sugg Usare che $\chi * \chi(x) = (1 - |x|)_+$. Quale è la sua regolarità?

1.4 Mostrare che

$$\begin{aligned} \chi_{[-a, a]} * \sin(x) &= 2 \sin(a) \sin(x) \\ \chi_{[-a, a]} * \cos(x) &= 2 \sin(a) \cos(x) \end{aligned}$$

1.5 Provare il Teorema 2.9.

1.6 Sia f una funzione limitata e continua a tratti, e sia (u_T) un'identità approssimata di L^1 . Se inoltre u_T è pari allora si ha

$$\lim_{T \rightarrow 0} u_T * f(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}.$$

Suggerimento: seguire la traccia del Teorema 4.1 sulle funzioni periodiche con discontinuità a salto.

1.7 (S) Siano f e g due funzioni continue. Provare che $\text{supp}(f * g) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$.

1.8 (S) Quali delle proprietà elencate nei Teoremi 3.1 e 3.2 hanno un analogo nel contesto delle serie di Fourier?

1.9 bis (S) Sia $f \in L^1$. Mostrare che se f è pari

$$\hat{f}(\xi) = 2 \int_0^\infty f(x) \cos(2\pi\xi x) dx,$$

se f è dispari

$$\hat{f}(\xi) = -2i \int_0^\infty f(x) \sin(2\pi\xi x) dx.$$

Osservazione Gli esercizi che seguono richiedono il calcolo della trasformata di Fourier di una funzione assegnata

$$\int f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Come noto dal corso di *IAS* i questi integrali si fanno calcolando un integrale

$$\int_\Gamma f(z) e^{i\alpha z} dz$$

dove $f(z)$ è una estensione di f al campo complesso e Γ un percorso opportuno su \mathbb{C} (vedi il corso di Istituzioni di Analisi Superiore, vedi anche il libro [2], pag 103-104 -105.)

1.9 Mostrare che

i) la funzione $e^{-\pi x^2}$ ha per trasformata di Fourier se stessa:

$$e^{-\pi \xi^2} = \int e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx$$

ii) si ha

$$[e^{-Tx^2}]^\wedge(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{T}} e^{-\frac{\pi^2}{T}\xi^2} = \omega_T(\xi)$$

$$\widehat{\omega_T}(\xi) = e^{-T\xi^2}$$

dove ω_T , $T > 0$, è il nucleo di Gauss Weierstrass. Dunque

$$[e^{-x^2}]^\wedge(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2\xi^2}$$

Sugg per il punto i) passare al campo complesso e usare il Teorema di Cauchy. Per il punto ii) usare la proprietà di dilatazione della trasformata di Fourier.

1.10 Sia $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Provare, usando l'integrazione complessa, che $\hat{f}(\xi) = \pi e^{-2\pi|\xi|}$.

1.11 (***) Sia $f(x) = 1/(1+x^4)$. Mostrare che la sua trasformata di Fourier è

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}\pi|\xi|} [\cos(\sqrt{2}\pi|\xi|) + \sin(\sqrt{2}\pi|\xi|)].$$

Sugg: Un po' laborioso! Usare l'integrazione complessa. La funzione $e^{-2\pi i\xi z}/(1+z^4)$ ha quattro poli, due nel semipiano $Im(z) > 0$ che sono $z_{1,2} = (\pm 1 + i)/\sqrt{2}$ e due nel semipiano $Im(z) < 0$ e sono $z_{3,4} = (\pm 1 - i)/\sqrt{2}$. In ciascun polo il residuo vale $R_k = e^{-2\pi i\xi z_k}/(4z_k^3) = -e^{-2\pi i\xi z_k} z_k/4$.

1.12 Verificare che la trasformata della funzione $f(x) = (1-x^2)e^{-x^2/2}$ (denominata "cappello messicano" in analisi del segnale) è

$$\hat{f}(\xi) = 4\pi^2\sqrt{2\pi}\xi^2 e^{-2\pi^2\xi^2}.$$

Sugg: dopo aver osservato che f è la derivata seconda di una gaussiana, usare la proprietà (ii) del Teorema 3.2.

1.13 Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $\frac{\sin(x)}{x}$ intesa come valor principale

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} e^{-2\pi i x \xi} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| < R} \frac{\sin(x)}{x} e^{-2\pi i x \xi} dx \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Sugg: Usando il metodo dei residui, calcolare prima l'integrale

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\epsilon < |x| < R} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx.$$

1.14 Sia $f(x) = 1/(x^2 - x + 1)$. Mostrare che

$$\hat{f}(\xi) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\pi\sqrt{3}|\xi|} e^{-\pi i \xi}$$

1.15 Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \cos(\pi x) \chi_{[0,1]}(x)$$

dove $\chi_{[0,1]}$ è la funzione caratteristica dell'intervallo $[0, 1]$.

1.16 Mostrare che se $f \in L^1$ e $\text{supp } \hat{f} \subset [-\Omega, \Omega]$ si ha la formula

$$f(x) = \int f(z) \frac{\sin 2\pi\Omega(x-z)}{\pi(x-z)} dz.$$

Osservazione Questo esercizio deve essere svolto prima della Sezione 7. Il suo scopo è fornire una anteprima della formula (6.4) che è provata in ipotesi più generali.

1.17 Sia $f \in C^0 \cap L^1$. Mostrare che se $\sum_n f(x-n)$ converge uniformemente in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ e $\sum_n |\hat{f}(n)| < \infty$, allora

$$\sum_n f(x-n) = \sum_n \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

Suggerimento: calcolare il coefficiente di Fourier di $\sum_n f(x-n)$.

Osservazione Questo esercizio è pensato per essere svolto prima della Sezione 4. Il suo scopo è fornire una anteprima della formula di Poisson (vedi Teorema 4.1).

1.18 Applicare la formula di Poisson con $T = 2\pi$ alla funzione

$$f(x) = (2\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/4t} \quad t > 0.$$

Così si ottiene l'identità di Jacobi, già vista nell'ultima sezione del Capitolo 1.

1.19 A partire dalla funzione $\varphi(x) = (\frac{\sin(\pi x)}{\pi x})^2$ costruire una identità approssimata su L^1_1 . Mostrare che così si ottiene il nucleo di Fejer (vedi il Teorema 4.3). Cosa si ottiene se invece si usa la funzione $\varphi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ o $\varphi(x) = (\frac{\sin(\pi x)}{\pi x})^3$?

1.20 Mostrare che

$$\sum_n \frac{1}{n^2 + t^2} = \frac{\pi}{t} \sum_n e^{-2\pi|nt|} = \frac{\pi}{t} \frac{1 + e^{-2\pi|t|}}{1 - e^{-2\pi|t|}}.$$

Sugg: usare la formula di Poisson in zero per la funzione $g_t(x) = \frac{t}{x^2 + t^2}$.

1.21 Sia $f \in \mathcal{S}$. Vale la seguente formula, detta di Eulero Mac Laurin

$$\sum_{n \geq 0} f(n) = \int_0^{\infty} f(x) dx + \frac{1}{2} f(0) - \frac{1}{12} f^{(1)}(0) - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f^{(2)}(x) \frac{\cos(2\pi n x)}{2\pi^2 n^2} dx$$

Provare la formula nel caso f sia pari. *Sugg:* usare la formula di Poisson $\sum_0^{\infty} f(n) = \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{Z}} \hat{f}(n)$, la parità di \hat{f} , e integrare per parti l'integrale $\int_0^{\infty} f(x) \cos(2\pi n x) dx$.

Ricordare inoltre le formule $\sum_1^{+\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$ e $\sum_1^{+\infty} 1/n^4 = \pi^4/90$.

Nota: integrando per parti ancora due volte (sempre per f pari), al secondo membro si ottiene

$$\int_0^{\infty} f(x) dx + \frac{1}{2} f(0) - \frac{1}{12} f^{(1)}(0) + \frac{1}{720} f^{(3)}(0) - \frac{1}{30240} f^{(5)}(0) + \text{Resto}$$

9 . Esercizi. Trasformata di Fourier in L^2 .

2.1 Mostrare che la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ per $|x| > 1$ e uguale a zero per $|x| < 1$ è

$$-2i \operatorname{sign}(\xi) \int_{2\pi|\xi|}^{\infty} \frac{\sin(y)}{y} dy.$$

2.2 (S) Sia $f \in L^2$ Mostrare che se f è pari o dispari si ha rispettivamente

$$\mathcal{F}f(\xi) = 2 \lim_T \int_0^T f(x) \cos(2\pi x\xi) dx, \quad \mathcal{F}f(\xi) = -2i \lim_T \int_0^T f(x) \sin(2\pi x\xi) dx.$$

2.3 (S) Sia $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ Mostrare che $\mathcal{F}f(\xi) = -\pi i e^{-2\pi|\xi|} \operatorname{sign}(\xi)$

2.4 Calcolare la trasformata di $f(x) = \frac{x}{1+x^4}$.
Sugg.: calcolare prima la trasformata di $g(x) = \frac{1}{1+x^4}$ usando il metodo dei residui.

2.5 (S) Siano $f \in L^1, g \in \mathcal{S}$. È vero che $f * g \in \mathcal{S}$?
Sugg: prendere $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

2.6 (S) Sia $f \in L^2$. Mostrare che $\mathcal{F}D_\alpha f = D_{\frac{1}{\alpha}} \mathcal{F}f$ dove $(D_\alpha f)(x) = \sqrt{\alpha} f(\alpha x)$
Sugg: usare la definizione di \mathcal{F} , e l'analogia proprietà in L^1 .

2.7 (S) Sia $f \in L^2$. Mostrare che
 i) $\mathcal{F}(\tau_h f)(\xi) = e^{-2\pi i \xi h} \mathcal{F}f(\xi)$,
 ii) $\tau_h (\mathcal{F}f)(\xi) = \mathcal{F}[e^{2\pi i x h} f(x)](\xi)$.

2.8 (S) Sia M_ω l'operatore definito da $M_\omega f(x) = e^{2\pi i x \omega} f(x)$. Mostrare che per ogni $f \in L^2$ si ha $\lim_{\omega \rightarrow 0} \|M_\omega f - f\|_2 = 0$.
Sugg: Usare l'identità di Plancherel e il Lemma 2.9.

2.9 Provare che $\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_2 = 0$, se $f \in L^2$.
Già provato in Lemma 2.9.

2.10 (S) Siano f ed $\hat{f} \in L^1$ e sia $D_T = \widehat{\chi_{[-T, T]}}$. Mostrare che

$$D_T * \hat{f} = (\chi_{[-T, T]} f)^\wedge$$

Si noti l'analogia con le serie di Fourier.

Sugg: scrivere il secondo membro e usare la formula di inversione.

2.11 Sia f una funzione di L^2 , La funzione $f^* = \widetilde{f}$ ricorre spesso nelle applicazioni perchè $(f^*)^\wedge = \widetilde{f}$. La funzione $F(x) = f * f^*$ si chiama *funzione di autocorrelazione*. Mostrare che

- i) F è ben definita per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$.
- ii) $|F(x)| \leq \|f\|_2^2$ in \mathbb{R} .
- iii) F è uniformemente continua su \mathbb{R} .
- iv) $F = (|\widehat{f}|^2)^{\sim}$.

Sugg. Per iii) usare il fatto che la traslazione è un operatore continuo su L^2

2.12 Sia

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{1-\xi} & \text{se } \xi < 0 \\ 0 & \text{se } \xi \geq 0 \end{cases}$$

- a) Dire se è la trasformata di Fourier di una funzione di L^1 .
- b) Dire se è la trasformata di Fourier di una funzione di L^2 .
- c) Sia F l'antitrasformata di f e G una funzione di L^1 tale che $\widehat{G}(\xi) = 0$ se $\xi < 0$. Calcolare $F * G$.
- d) Esprimere mediante una convoluzione l'antitrasformata della funzione

$$h(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{1-\xi} & \text{se } -1 < \xi < 0 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

2.13 In questo esercizio useremo la notazione \mathcal{M}_α , con α una funzione, per denotare l'operatore definito da $\mathcal{M}_\alpha f = \alpha f$ per ogni $f \in L^2$.

Si chiama *trasformata di Hilbert* l'operatore su L^2 definito da

$$\mathcal{H} = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{M}_{-i \operatorname{sign}(\cdot)} \mathcal{F}.$$

Dimostrare che

- (a) \mathcal{H} è un operatore limitato su L^2 .

- (b) Si ha

$$\mathcal{H}^2 = -I \quad \mathcal{H}^* = -\mathcal{H} \quad \mathcal{H}\mathcal{H}^* = \mathcal{H}^*\mathcal{H} = I$$

dove I è l'operatore identità su L^2 , e \mathcal{H}^* denota l'operatore aggiunto di \mathcal{H} (vedi Appendice).

- (c) \mathcal{H} ha norma 1.

- (d) Usando l'Esercizio 2.1 mostrare che la trasformata di Fourier della funzione

$$h_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \leq \epsilon \\ \frac{1}{\pi x} & \text{se } |x| > \epsilon. \end{cases}$$

è

$$\mathcal{F}h_\epsilon(\xi) = -\frac{2}{\pi} i \operatorname{sign}(\xi) \int_{2\pi|\xi|\epsilon}^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y} dy.$$

(e) Provare che se $f \in L^1 \cap L^2$ allora $h_\epsilon * f \in L^2$ e

$$\mathcal{H}f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} h_\epsilon * f \quad \text{in } L^2.$$

10 . Esercizi. Teorema del campionamento

3.1 Usando le idee mostrate nella Sezione 6 come si può ulteriormente migliorare la convergenza della serie di Shannon?

3.2 Servirsi della dimostrazione del Teorema 6.1 per ottenere la formula di Shannon nel caso la trasformata di Fourier sia definita così:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Si ottiene

$$f(x) = \sum_n f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \frac{\sin(\Omega x - n\pi)}{\Omega x - n\pi}$$

Mostrare che una funzione a banda in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ può essere ricostruita esattamente conoscendo i suoi valori su $2\mathbf{Z}$.

3.3 Usando la stessa definizione di trasformata di Fourier del precedente esercizio, mostrare che se f è una funzione a banda in $[-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi]$ può essere ricostruita esattamente conoscendo i suoi valori su $2\mathbf{Z}$ perchè

$$f(x) = \sum f(2n) \frac{\sin \frac{\pi}{2}(x - 2n)}{\frac{\pi}{2}(x - 2n)} [2 \cos \frac{\pi}{2}(x - 2n) - 1].$$

Capitolo III

Calcolo numerico della trasformata di Fourier.

This past year has seen the birth, or rather the rebirth, of an exciting revolution in computing Fourier transforms. A class of algorithms, known as the Fast Fourier Transform or FFT, is forcing a complete assesment of many computational paths, not only in frequency analysis, but in any fields where problems can be reduced to Fourier transforms and /or convolutions

C. Brigham e J.W. Tukey, 1966

Nei capitoli precedenti abbiamo studiato la trasformata di Fourier per funzioni definite sul cerchio e sulla retta. Lo scopo di questo capitolo è introdurre una versione discreta della trasformata di Fourier. Nella Sezione 1 mostriamo che il calcolo numerico dell'integrale di Fourier mediante una somma di Riemann a N punti conduce alla trasformata discreta di Fourier (DFT) della N -pla ottenuta campionando la funzione con N punti. Nella Sezione 2 si vede che la DFT è una espressione, in termini di una base ortonormale dello spazio di Hilbert $\ell^2(G_n)$, delle funzioni definite sul gruppo moltiplicativo G_N delle radici N -esime dell'unità. Così dalla teoria generale degli spazi di Hilbert si ottengono anche per la DFT una formula di Plancherel, una formula di inversione e una convoluzione. La Sezione 3 è dedicata all'algoritmo della Fast Fourier Transform, sviluppato nel 1965 da J. W. Cooley e J. W. Tukey, che consente di effettuare il calcolo della DFT in $N \log_2 N$, invece che N^2 operazioni. Il risparmio computazionale è enorme se, come spesso accade, il numero N è grande; se per esempio N è 1024 il calcolo si riduce di un fattore di 200. Spesso inoltre si tratta di funzioni di più variabili, oppure il calcolo deve essere ripetuto molte volte per vari valori di un parametro.

L'argomento della Sezione 5 è la trasformata coseno, nelle sue forme, continua, discreta e fast. La trasformata coseno è alla base della tecnica di compressione di immagini che si chiama JPEG.

1 . La trasformata di Fourier discreta

Questa sezione è dedicata al calcolo numerico della trasformata di Fourier. La teoria si sviluppa interamente in campo discreto, perciò nei ragionamenti procederemo senza preoccuparci della convergenza delle serie o degli integrali coinvolti. Una volta discretizzata la funzione e scelta una N -pla che la rappresenti in maniera conveniente, vogliamo ottenere una nuova N -pla che rappresenti i valori (approssimati) di \hat{f} in punti opportuni. Dunque dobbiamo operare una discretizzazione sia della variabile temporale x sia della variabile ξ . Approssimando l'integrale

$$(1.1) \quad \hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

con una somma di Cauchy si ha

$$(1.2) \quad \hat{f}(\xi) \simeq T \sum_{j \in \mathbf{Z}} f(jT) e^{-2\pi i \xi j T} = T \sum_{j \in \mathbf{Z}} f(x_j) e^{-2\pi i \xi x_j},$$

dove $x_j = jT$, $j \in \mathbf{Z}$ e $T > 0$.

Supponiamo per il momento che f abbia supporto in un intervallo di ampiezza finita S ; in tal caso la somma si ridurrà ad un numero finito di termini. Traslando la funzione se occorre, possiamo supporre che l'intervallo sia $[0, S]$. Scegliamo N punti equidistanti nell'intervallo $[0, S]$,

$$x_j = j \frac{S}{N}, \quad j = 0, \dots, N-1,$$

con spaziatura

$$(1.3) \quad T = \frac{S}{N},$$

la somma di Cauchy in (1.2) è

$$(1.4) \quad \frac{S}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) e^{-2\pi i \xi x_j} = \frac{S}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-2\pi i j \xi S/N}$$

dove abbiamo posto $f_j = f(x_j)$, $j = 0, \dots, N-1$. Abbiamo così discretizzato nella variabile x e ottenuto una somma di Cauchy che approssima l'integrale in (1.1).

Osserviamo che questa somma è una funzione di ξ periodica di periodo N/S , quindi per discretizzare nella variabile ξ prendiamo punti con una spaziatura uguale a $1/S$, così in un intervallo di lunghezza uguale al periodo cadono N punti. Scegliendo dunque $\xi_k = \frac{k}{S}$, $k \in \mathbf{Z}$, la somma di Cauchy in (1.4) si scrive

$$(1.5) \quad \frac{S}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-2\pi i k j / N} \quad \forall k \in \mathbf{Z}.$$

Si noti: questa successione è periodica di periodo N (vedi la Figura qui sotto).

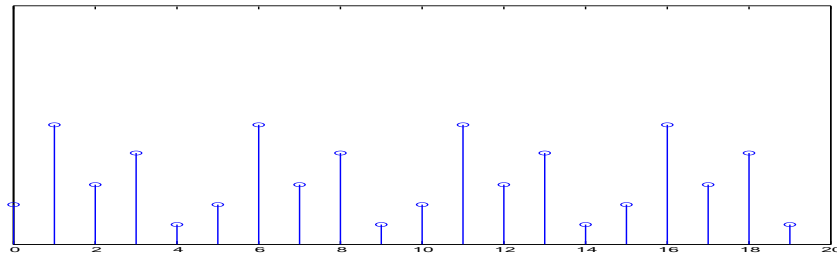


Figura 1 Una successione periodica

La somma (1.5) può essere scritta in termini delle radici N -esime dell'unità. Indichiamo con ω la radice N -esima primaria dell'unità: $\omega = e^{\frac{2\pi}{N}i}$. Si noti che ω dipende da N ; in seguito per indicare tale dipendenza sarà necessario usare la notazione $\omega = \omega_N$. La formula precedente si può ora scrivere

$$(1.6) \quad \frac{S}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-kj} = SF_k$$

dove si è posto

$$(1.7) \quad F_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-kj} \quad k \in \mathbf{Z}$$

Definizione 1.1 Sia $(f_j)_{j=0}^{N-1}$ una N -pla di numeri complessi. Si definisce *trasformata di Fourier discreta (DFT)* di tale sequenza la successione N -periodica (1.7).

Quindi assegnata una funzione f a supporto in $[0, S]$ approssimando l'integrale che esprime la trasformata di Fourier con le somme di Cauchy e poi discretizzando (opportunamente) nella variabile ξ , abbiamo ottenuto la sequenza N -periodica SF_k , $k \in \mathbf{Z}$, di valori approssimati della trasformata di Fourier \hat{f} .

$$(f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) \quad \longrightarrow \quad (SF_k), \quad k \in \mathbf{Z}$$

Relazione fra la trasformata esatta e la trasformata approssimata. Per lo studio e l'interpretazione dei risultati nel calcolo numerico \hat{f} , è importante esprimere la DFT in termini della trasformata vera. La formula (1.10) qui sotto mostra che le SF_k , $k = 0, \dots, N - 1$ sono le campionature di una periodizzata della trasformata vera \hat{f} .

Sia ancora f una funzione a supporto in $[0, S]$; usando la formula di Poisson (4.7)

si ha

$$(1.8) \quad T \sum_{j=0}^{N-1} f(jT) e^{-2\pi i j T \xi} = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \hat{f}\left(\xi - j \frac{1}{T}\right)$$

quindi ricordando che $T = S/N$,

$$(1.9) \quad \frac{S}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-2\pi i j \xi S/N} = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \hat{f}\left(\xi - j \frac{N}{S}\right)$$

Questa formula mostra quale è l'effetto, nel dominio delle frequenze, della discretizzazione effettuata nel dominio dei tempi. Valutando ora in $\xi = k/S$, al primo membro si ottiene proprio SF_k , dunque:

$$(1.10) \quad SF_k = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \hat{f}\left(\frac{k}{S} - j \frac{N}{S}\right) \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Dunque, per ogni $k \in \mathbf{Z}$

SF_k è uguale alla periodizzata di \hat{f} di periodo N/S calcolata nei punti k/S .

Questa osservazione ci sarà molto utile quando dovremo confrontare la trasformata calcolata con la vera e interpretare i risultati numerici.

Supporto in $[-R, S]$. Fin qui abbiamo fatto l'ipotesi che la funzione f avesse supporto in un intervallo $[0, S]$. Se f ha supporto in un intervallo $[-R, S]$, $R > 0$, possiamo ricondurci al caso precedente: cambiando variabile si ha

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-R}^S f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = e^{2\pi i R \xi} \int_0^{R+S} g(y) e^{-2\pi i y \xi} dy$$

dove $g(y) = f(y - R)$ ha supporto in $[0, R + S]$. Approssimando l'integrale a destra di questa relazione con le somme di Cauchy di g nei punti $y_j = j(R + S)/N$, $j = 0, \dots, N - 1$, si ottiene la seguente approssimazione di $\hat{f}(\xi)$

$$e^{2\pi i R \xi} \frac{R + S}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-2\pi i y_j \xi}$$

dove $f_j = f(-R + \frac{j}{N}(R + S))$, $j = 0, \dots, N - 1$. Valutando nei punti $\xi = k/(R + S)$, $k \in \mathbf{Z}$, e ponendo $F_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-kj}$ si ottiene la successione N -periodica

$$(1.11) \quad e^{2\pi i k R / (R+S)} (R + S) F_k \quad k \in \mathbf{Z}$$

che approssima \hat{f} .

Si noti in particolare che, se $R = S$, questa formula si scrive

$$(1.12) \quad (-1)^k 2S F_k.$$

Quindi anche per una funzione f a supporto in $[-R, S]$, $R > 0$, approssimando l'integrale che esprime la trasformata di Fourier con le somme di Cauchy e poi discretizzando (opportunamente) nella variabile ξ , abbiamo ottenuto una sequenza N -periodica di valori approssimati della funzione \hat{f} :

$$(f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) \longrightarrow e^{2\pi i k R / (R+S)} (R+S) F_k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Relazione fra la trasformata esatta e la trasformata approssimata. Nel caso f sia una funzione definita in un intervallo $[-R, S]$ la formula (1.10) va sostituita con la seguente

$$e^{2\pi i k R / (R+S)} (R+S) F_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i j N R / (R+S)} \hat{f}\left(\frac{1}{R+S}(k-jN)\right) \quad k \in \mathbb{Z}$$

La verifica di questa formula è lasciata come esercizio (Esercizio 4.1 nella Sezione 6 di questo capitolo).

Infine, se la funzione ha supporto in un intervallo illimitato, si può scegliere un opportuno intervallo $[-R, S]$, ponendo uguale a zero la funzione fuori di esso. È evidente che questo induce un ulteriore errore nel calcolo della \hat{f} . Nelle esercitazioni analizzeremo anche questa fonte di errore

Ovviamente formule (1.6) (1.7) possono essere utilizzate per calcolare numericamente una funzione, nota la sua trasformata di Fourier: basta cambiare segno all'esponente di ω .

La DFT per il calcolo della trasformata di Fourier di una funzione periodica e per la sintesi armonica. Concludiamo questa sezione mostrando che la DFT può essere utilizzata anche per calcolare i coefficienti di Fourier di una funzione periodica. Sia u una funzione periodica di periodo T e sia

$$\hat{u}(k) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-2\pi i k x / T} u(x) dx,$$

$k \in \mathbb{Z}$. Approssimiamo l'integrale con le somme di Cauchy

$$(1.13) \quad \hat{u}(k) \simeq \tilde{u}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u_j e^{-2\pi i k x_j / T} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u_j \omega^{-kj} = F_k$$

dove $u_j = u(x_j) = u(\frac{j}{N}T)$, $j = 0, \dots, N-1$.

Quindi: *i coefficienti di Fourier della funzione u sono approssimati dalla DFT del vettore (u_0, \dots, u_{N-1}) , dove $u_j = u(jT/N)$,*

La DFT può essere utilizzata anche per la sintesi armonica, cioè per sommare numericamente la serie di Fourier di una funzione periodica. Sia

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}(k) e^{2\pi i x \frac{k}{N}}$$

la serie di Fourier di una funzione u periodica di periodo S . Supponiamo di conoscere gli N coefficienti

$$(1.14) \quad \hat{u}(k), \quad k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2},$$

dove abbiamo supposto per comodità che N è pari. Vogliamo calcolare numericamente la somma u .

Tronchiamo la serie a N termini e calcoliamo tale ridotta nei punti $x_j = \frac{j}{N}S$, $j = 0, \dots, N - 1$. Si ottiene così l'approssimazione

$$u(x_j) \simeq \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}(k) \omega^{kj} \quad j = 0, \dots, N - 1$$

Vogliamo ora esprimere il secondo membro come una somma da 0 a $N - 1$ operando un cambiamento di variabile. Conviene “periodizzare” la N -pla $\hat{u}(k)$ che compare nella somma. Sia $(\tilde{u}_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ la successione (di periodo N) che coincide con essa nei punti $-N/2 \leq k \leq (N/2 - 1)$. Poichè la successione $(\tilde{u}_k \omega^{kj})$ è periodica in k di periodo N , fornisce la stessa somma su ogni intervallo di \mathbf{Z} di lunghezza N ; si ha quindi la formula

$$(1.15) \quad u(x_j) \simeq \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}(k) \omega^{kj} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{u}_k \omega^{kj} = NF_{-j}$$

dove

$$F_j = 1/N \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{u}_k \omega^{-jk} \quad j = 0, \dots, N - 1.$$

Abbiamo così visto che, assegnati gli N coefficienti di Fourier (1.14) di una funzione u la sua DFT di tale N -pla fornisce una approssimazione di u .

2. Le proprietà della DFT

In questa sezione ci proponiamo di studiare la DFT e le sue proprietà. Vedremo che ci sono delle forti analogie fra la trasformata di Fourier delle funzioni periodiche e la DFT. In particolare vi è un teorema di Plancherel, una formula di inversione e una convoluzione.

Possiamo identificare lo spazio delle funzioni su \mathbb{R} periodiche di periodo 2π con lo spazio delle funzioni definite sul gruppo moltiplicativo \mathbf{T} dei numeri complessi di modulo 1, associando alla funzione periodica f la funzione $f^* : \mathbf{T} \mapsto \mathbf{C}$ definita da $f^*(z) = f(t)$ dove $z = e^{it}$.

Analogamente identifichiamo lo spazio delle successioni periodiche di periodo N con lo spazio delle funzioni definite sul gruppo delle radici N -esime dell'unità. Per ogni intero positivo N denotiamo con G_N il gruppo moltiplicativo delle radici N -esime dell'unità

$$G_N = (1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{N-1})$$

dove $\omega = e^{2\pi i/N}$ è la radice primaria N -esima dell'unità. Si noti che G_N è un sottogruppo di \mathbf{T} ed ha cardinalità N . Data una successione periodica (f_n) di numeri complessi associamo la funzione $f : G_N \mapsto \mathbf{C}$ ponendo

$$f(\omega^k) = f_k \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Definizione 6.1 Denotiamo con $l^2(G_N)$ lo spazio di Hilbert su \mathbf{C} di tutte le funzioni $f : G_N \mapsto \mathbf{C}$ munito del prodotto scalare

$$(f, g)_{l^2(G_N)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(\omega^k) \overline{g(\omega^k)}.$$

Una base ortonormale di $l^2(G_N)$ è costituita dalla famiglia $(e_0, e_1, \dots, e_{N-1})$ definita da

$$e_k(\omega^j) = \omega^{jk}, \quad j = 0, \dots, N-1,$$

dove $\omega = e^{2\pi i/N}$. Per rappresentare in modo esplicito gli elementi di questa base è conveniente scrivere la matrice $W_N = (\omega^{kj})$ $k, j = 0, \dots, N-1$ la cui riga di posto k è costituita dai valori della funzione e_k nei punti $\omega^0, \dots, \omega^{N-1}$.

$$(2.1) \quad W_N = (\omega^{kj}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2N-2} \\ 1 & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2N-2} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{bmatrix}.$$

Ad esempio le matrici per $N = 2, 4$ sono

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & i^2 & i^3 \\ 1 & i^2 & i^4 & i^6 \\ 1 & i^3 & i^6 & i^9 \end{bmatrix}$$

Sia $f \in l^2(G_N)$, indichiamo con $\hat{f}(m)$, $m = 0, \dots, N-1$ la sua trasformata di Fourier in $l^2(G_N)$, cioè la N-pla dei coefficienti di Fourier $\hat{f}(m) = (f, e_m)$ rispetto alla base ortonormale $(e_0, e_1, \dots, e_{N-1})$:

$$(2.2) \quad \hat{f}(m) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(\omega^j) \overline{e_m(\omega^j)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(\omega^j) \omega^{-mj}.$$

La DFT di una N-pla $(f_j)_{j=0}^{N-1}$ si può dunque vedere come la trasformata di Fourier, nello spazio $l^2(G_N)$, della funzione f tale che $f(\omega^j) = f_j$, $j = 0, \dots, N-1$. Dalla teoria degli spazi di Hilbert si ha

$$(2.3) \quad f(\omega^j) = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{f}(m) e_m(\omega^j) = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{f}(m) \omega^{mj}$$

$$(2.4) \quad \|f\|_{l^2(G_N)} = \left(\sum_{m=0}^{N-1} |\hat{f}(m)|^2 \right)^{1/2} \quad \text{Plancherel}$$

la prima è una formula di inversione per la trasformata di Fourier discreta e la seconda è un teorema di Plancherel. Date due funzioni f, g in $l^2(G_N)$ la loro convoluzione è definita da

$$(f * g)(\omega^m) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(\omega^{m-j}) g(\omega^j)$$

per ogni $m = 0, \dots, N-1$. Si verifica facilmente che la convoluzione è un'operazione commutativa e associativa in $l^2(G_N)$. Inoltre

$$\widehat{(f * g)}(m) = \hat{f}(m) \hat{g}(m) \\ f * e_m = \hat{f}(m) e_m$$

per ogni $m = 0, \dots, N-1$.

A differenza di quanto accade su \mathbf{T} , esiste un'identità per la convoluzione su G_N . Infatti la funzione $\delta = \sum_{m=0}^{N-1} e_m$ soddisfa $\delta * f = f$, per ogni $f \in l^2(G_N)$.

Si noti che, come f , anche \hat{f} si può pensare come una funzione definita in \mathbf{Z} periodica di periodo N .

3 . La Fast Fourier Transform

In questa sezione i vettori saranno considerati come vettori colonna. Per ragioni di spazio tuttavia scriveremo $x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ per denotare il vettore colonna che ha per componenti x_0, x_1, \dots, x_{N-1} .

Per la (1.6), il calcolo della DFT della N-pla $(f_j)_{j=0}^{N-1}$ si riduce al calcolo di una matrice per un vettore:

$$(3.1) \quad y = \overline{W}_N x$$

dove \overline{W}_N è la coniugata di W_N in (2.1) e $x = (f_0/N, f_1/N, \dots, f_{(N-1)}/N)$. Se per operazione intendiamo una moltiplicazione complessa e una addizione complessa, il calcolo di questo prodotto richiede N^2 operazioni (N operazioni per elemento). Con i calcolatori attuali il calcolo richiede pochi secondi anche se N è grande. Tuttavia in diversi problemi (analisi del segnale, ricostruzioni di immagini, metodi spettrali) il calcolo deve essere eseguito migliaia di volte, e il costo diventa proibitivo.

Nel 1965 Cooley e Tuckey svilupparono un algoritmo, noto come Fast Fourier Transform, che consente di effettuare lo stesso calcolo in $N \text{Log}_2 N$ operazioni se N è una potenza di 2. Per $N = 2^{12}$ questo significa che l'algoritmo di Cooley e Tuckey è 170 volte più veloce. In generale se $N = r_1 r_2 \dots r_p$ è la fattorizzazione di N in numeri primi, è possibile sviluppare un algoritmo che consente il calcolo della FFT a N punti con $N(r_1 + r_2 + \dots + r_p)$ operazioni. Nel 1968 Blustein ha sviluppato un algoritmo per il calcolo della FFT con N arbitrario.

In questa sezione descriviamo l'algoritmo di Cooley e Tuckey nel caso N sia una potenza di 2. L'algoritmo si basa sull'osservazione che se $N = 2M$ e ω_N e ω_M sono le radici N -esima e M -esima primarie dell'unità, allora

$$\omega_N^2 = \omega_M.$$

Questa relazione verrà usata per calcolare il prodotto

$$(3.2) \quad y_j = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \omega_N^{-jk} \quad j = 0, \dots, N-1$$

della matrice \overline{W}_N per il vettore $x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$.

Dividiamo il vettore x in due sottovettori di $M = \frac{N}{2}$ componenti ciascuno, separando le componenti pari da quelle dispari

$$x' = (x_0, x_2, \dots, x_{2M-2}), \quad x'' = (x_1, x_3, \dots, x_{2M-1}).$$

Siano $y' = \overline{W}_M x'$ e $y'' = \overline{W}_M x''$. Si ha il seguente

Teorema 3.1. *Le componenti del vettore $y = \overline{W}_N x$ sono*

$$(3.3) \quad \begin{aligned} y_j &= y'_j + \omega_N^{-j} y''_j, \\ y_{j+M} &= y'_j - \omega_N^{-j} y''_j. \end{aligned}$$

$j = 0, 1, \dots, M-1$.

Dimostrazione. Separando le potenze pari da quelle dispari in (3.2) si ottiene

$$y_j = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \omega_N^{-jk} = \sum_{k=0}^{M-1} x_{2k} \omega_N^{-j2k} + \sum_{k=0}^{M-1} x_{2k+1} \omega_N^{-j(2k+1)}$$

E quindi

$$(3.4) \quad y_j = \sum_{k=0}^{M-1} x_{2k} \omega_M^{-jk} + \omega_N^{-j} \sum_{k=0}^{M-1} x_{(2k+1)} \omega_M^{-jk}$$

per $j = 0, \dots, N-1$. Se $j = 0, \dots, M-1$ le due somme danno y'_j e y''_j perché

$$y'_j = \sum_{k=0}^{M-1} x_{2k} \omega_M^{-jk} \quad y''_j = \sum_{k=0}^{M-1} x_{(2k+1)} \omega_M^{-jk}.$$

e questi sono i prodotti della matrice \overline{W}_M per i vettori

$$x' = (x_0, x_2, \dots, x_{(2M-2)}), \quad x'' = (x_1, x_3, \dots, x_{(2M-1)}).$$

Questo prova la prima parte del teorema. Per dimostrare la seconda identità sostituiamo j con $j+M$ nell'espressione (3.4) di y_j . Poiché $\omega_M^M = 1$ e $\omega_N^M = -1$ si ottiene

$$y_{j+M} = \sum_{k=0}^{M-1} x_{2k} \omega_M^{-(j+M)k} + \omega_N^{-(j+M)} \sum_{k=0}^{M-1} x_{2k+1} \omega_M^{-(j+M)k}$$

per $j = 0, \dots, M-1$. E quindi

$$y_{j+M} = \sum_{k=0}^{M-1} x_{2k} \omega_M^{-jk} - \omega_N^{-j} \sum_{k=0}^{M-1} x_{2k+1} \omega_M^{-jk}$$

che è la seconda identità cercata. \square

Corollario 3.2. *Se $N = 2^k$, $k \geq 1$, il numero di operazioni necessario per calcolare la DFT a N punti è $\leq 2N \log_2 N$.*

Dimostrazione. Sia p_N il numero di operazioni necessario per calcolare la DFT a N punti. Allora $p_{2M} = 2p_M + 2M$. Infatti, per il teorema precedente, per calcolare $y = \overline{W}_{2M} x$, occorre calcolare $y' = \overline{W}_M x'$ e $y'' = \overline{W}_M x''$, che richiedono p_M operazioni ciascuna, e eseguire poi $2M$ operazioni. Poiché $p_2 = 4$, per induzione si ottiene che $p_{2^k} \leq k2^{k+1} = 2N \text{Log}_2 N$. \square

4. La trasformata coseno e la DCT

L'argomento di questa sezione è la trasformata coseno, nelle sue versioni, continua, discreta e fast. La trasformata coseno è alla base della tecnica di compressione di immagini che si chiama JPEG⁽¹⁾. Un'immagine digitale, in bianco e nero, è una matrice di numeri, che rappresentano l'intensità del livello di grigio in ogni pixel ⁽²⁾. Una immagine contiene generalmente 254×254 pixel. Quindi la quantità di dati contenuta in una singola immagine è elevata. È frequente la necessità di immagazzinare o di trasmettere una grande quantità di immagini fotografiche. Ad esempio l'FBI ha un database di 200 milioni di immagini in forma cartacea. Come parte di un programma di modernizzazione fu deciso di digitalizzare questi records in immagini in scale di grigio con una risoluzione tale che ogni impronta richiede 10 megabytes. La dimensione di un archivio che contenga questi files è di 2000 terabytes (si noti che un floppy contiene solo 1.5 megabytes)⁽³⁾. Queste considerazioni portarono l'FBI alla decisione di usare una forma di compressione di dati mediante una trasformata, e la scelta cadde sulla *trasformata coseno discreta*.

La compressione di dati mediante una trasformata consiste nel trovare un algoritmo, possibilmente veloce, che permette di rappresentare un segnale in maniera sufficientemente fedele con una quantità minima di informazione. Le tecniche consistono nell'applicare una trasformata al segnale, nell'eliminare parte dell'informazione e trasmettere (o conservare) solo la parte rimanente. Una volta giunta a destinazione l'informazione compressa, la trasformazione inversa consentirà di ricostruire il segnale con una buona approssimazione.

La trasformata coseno continua Il seguente teorema fornisce una base ortonormale di coseni per lo spazio $L^2([0, T])$ delle funzioni di quadrato integrabile nell'intervallo $[0, T]$.

Teorema 4.1. *La famiglia*

$$(4.1) \quad \left\{ 1, \sqrt{2} \cos\left(\frac{k}{T}\pi x\right), k = 1, 2, \dots \right\}$$

è una base ortonormale di $L^2([0, T])$ e per ogni $f \in L^2([0, T])$ si ha

$$(4.2) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{k}{T}\pi x\right).$$

dove

$$(4.3) \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{k}{T}\pi x\right) dx.$$

Dimostrazione. Sia $f \in L^2([0, T])$ denotiamo con f^+ la funzione definita in $[0, 2T]$, che coincide con f in $[0, T]$ ed è simmetrica rispetto alla retta $x = T$:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [0, T] \\ f(2T - x) & \text{se } x \in [T, 2T] \end{cases}$$

Poichè f^+ è ovviamente di quadrato integrabile in $[0, 2T]$, può essere sviluppata mediante la base di $L^2([0, 2T])$: $\{e_{2T,k}(x) = e^{2\pi i k \frac{x}{2T}}, k \in \mathbb{Z}\}$. Mostriamo ora che la famiglia (4.1) è ortonormale in $L^2([0, T])$. L'integrale di $\sqrt{2} \cos(\frac{k}{T}\pi x)$ sull'intervallo $[0, T]$ è zero per ogni k . Inoltre

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T 2 \cos\left(\frac{k}{T}\pi x\right) \cos\left(\frac{\ell}{T}\pi x\right) dx &= \frac{2}{2T} \int_{-T}^T \cos\left(\frac{k}{T}\pi x\right) \cos\left(\frac{\ell}{T}\pi x\right) dx \\ &= \frac{1}{2} (e_{2T,k} + e_{2T,-k}, e_{2T,\ell} + e_{2T,-\ell})_{L^2([0,2T])}. \end{aligned}$$

Poichè le funzioni $e_{2T,k}$, $k \in \mathbb{Z}$ sono una base ortonormale di $L^2([0, 2T])$, l'ultimo membro è uguale a 1 se $k = \ell$, è zero se $k \neq \ell$.

Proviamo ora che la famiglia è un sistema completo. Denotiamo con $\widehat{f^+}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ i coefficienti di Fourier di f^+ secondo la base $\{e_{2T,k}, k \in \mathbb{Z}\}$:

$$(4.4) \quad \widehat{f^+}(k) = \frac{1}{2T} \int_0^{2T} f^+(x) e_{2T,-k}(x) dx = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{k}{T}\pi x\right) dx$$

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f^+}(k) e_{2T,k}(x) = \sum_{-\infty}^{-1} \widehat{f^+}(k) e_{2T,k}(x) + \sum_0^{+\infty} \widehat{f^+}(k) e_{2T,k}(x) \\ &= \sum_1^{+\infty} \widehat{f^+}(-k) e_{2T,-k}(x) + \sum_0^{\infty} \widehat{f^+}(k) e_{2T,k}(x) \\ &= \widehat{f^+}(0) + \sum_1^{+\infty} \widehat{f^+}(k) (e_{2T,-k}(x) + e_{2T,k}(x)) \end{aligned}$$

e quindi

$$(4.5) \quad f(x) = \widehat{f^+}(0) + 2 \sum_1^{\infty} \widehat{f^+}(k) \cos\left(\frac{k}{T}\pi x\right) \quad q.o.[0, T].$$

Si noti che abbiamo usato il fatto che i coefficienti di Fourier di f^+ sono una successione pari, perchè la funzione è pari. Ponendo $a_k = 2\widehat{f^+}(k)$, $k \geq 0$, nello sviluppo in (4.5) si ottiene la (4.2). Abbiamo così mostrato che la famiglia è completa e il teorema è provato. \square

Definizione 8.1 Sia $f \in L^2([0, T])$. La successione $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in (4.3) si chiama *trasformata coseno* di f .

Si noti che, contrariamente a quanto accade per la trasformata di Fourier, se f è reale, allora la sua trasformata coseno è reale.

La trasformata coseno discreta. Per avere una versione discreta della trasformata coseno faremo un ragionamento simile a quello fatto per il calcolo numerico dei coefficienti di Fourier nella Sezione 3. Discretizziamo l'integrale in (4.3) considerando i punti

$$x_j = \frac{T}{2N} + \frac{T}{N}j, \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

e denotiamo $f(x_j)$ con f_j . Approssimiamo l'integrale in (4.3) nel modo seguente

$$a_k \simeq \frac{T}{N} \frac{2}{T} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cos\left(\frac{k}{T}\pi x_j\right) = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cos\left(\frac{k\pi}{2N}(2j+1)\right).$$

Definizione 8.2 Si chiama *trasformata coseno discreta (DCT) della N -pla* (f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) la N -pla

$$(4.6) \quad a_{N,k} = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cos \frac{k\pi}{2N} (2j+1), \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

La DCT ha il pregio di essere reale se le f_j sono reali. Per le applicazioni della DCT dobbiamo risolvere due questioni importanti: trovare una formula di inversione ed eseguire il calcolo della DCT con un algoritmo veloce. Perciò ora ci occuperemo di rispondere alle due domande

- a) Esiste una formula di inversione per la DCT?
- b) È possibile fare uso dell'algoritmo della FFT per calcolare la DCT?

Per rispondere alla prima domanda mostriamo ora che gli $a_{N,k}$ sono i coefficienti di Fourier della N -pla $\sqrt{\frac{2}{N}}(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ secondo una base ortonormale di \mathbb{R}^N . Da ciò potremo dedurre, come per la trasformata di Fourier discreta, una formula di inversione della (4.6).

Denotiamo con $C_{N,k}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, i seguenti vettori di \mathbb{R}^N

$$C_{N,0} = \sqrt{\frac{2}{N}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, \dots, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$C_{N,k} = \sqrt{\frac{2}{N}} \left(\cos \frac{k\pi}{2N} (2j+1) \right)_{j=0}^{N-1} \quad k = 1, \dots, N-1.$$

Teorema 4.2. *La famiglia*

$$\mathcal{V}_N = \left\{ C_{N,k} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \right\}.$$

è una base ortonormale di \mathbb{R}^N

Dimostrazione. Useremo la relazione

$$(4.7) \quad \sum_{j=0}^{N-1} \cos \frac{k\pi}{2N} (2j+1) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, 2N-1.$$

Rimandando per il momento la verifica di questa formula, proviamo l'ortogonalità. Per la (4.7) si ha

$$(C_{N,k}, C_{N,0}) = \frac{2}{N} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^{N-1} \cos \frac{k\pi}{2N} (2j+1) = 0 \quad k = 1, \dots, N-1.$$

Siano ora $0 < \ell \leq k \leq N-1$, si ha

$$(4.8) \quad \begin{aligned} (C_{N,k}, C_{N,\ell}) &= \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \cos \frac{k\pi}{2N} (2j+1) \cos \frac{\ell\pi}{2N} (2j+1) \\ &= \frac{2}{N} \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \left[\cos \frac{(k-\ell)\pi}{2N} (2j+1) + \cos \frac{(k+\ell)\pi}{2N} (2j+1) \right]. \end{aligned}$$

Di qui per la (4.7) si ha che, se $k \neq \ell$, il secondo membro è zero. Se invece $k = \ell$ usando ancora la (4.7) si ha

$$\|C_{N,k}\|^2 = (C_{N,k}, C_{N,k}) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left[1 + \cos \left(\frac{2k\pi}{2N} (2j+1) \right) \right] = 1.$$

La verifica che anche $\sqrt{\frac{2}{N}} C_{N,0}$ ha norma 1 è immediata.

Rimane da dimostrare la (4.7). Sia $k = 1, 2, \dots, 2N-1$, si ha

$$\begin{aligned} 2 \sum_{m=0}^{N-1} \cos \frac{k\pi}{2N} (2m+1) &= \sum_{m=0}^{N-1} e^{i\pi \frac{k}{N} (m+\frac{1}{2})} + \sum_{m=0}^{N-1} e^{-i\pi \frac{k}{N} (m+\frac{1}{2})} \\ &= e^{i\pi \frac{k}{2N}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{i\pi m \frac{k}{N}} + e^{-i\pi \frac{k}{2N}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-i\pi m \frac{k}{N}} \\ &= e^{i\pi \frac{k}{2N}} \frac{e^{i\pi \frac{k}{N} N} - 1}{e^{i\pi \frac{k}{N}} - 1} + e^{-i\pi \frac{k}{2N}} \frac{e^{-i\pi \frac{k}{N} N} - 1}{e^{-i\pi \frac{k}{N}} - 1}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che $\sum_{j=0}^{N-1} x^j = \frac{x^N - 1}{x - 1}$. Il secondo membro è zero: quando k è pari si vede subito, mentre se k è dispari basta ridurre allo stesso denominatore le due frazioni. \square

Teorema 4.3. *Si ha: $\{a_{N,0}/\sqrt{2}, a_{N,1}, \dots, a_{N,N-1}\}$ è la trasformata di Fourier della N -pla $F_N = \sqrt{\frac{2}{N}}(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ secondo la base ortonormale \mathcal{V}_N .*

Dimostrazione. La dimostrazione segue immediatamente dal teorema precedente e dalla (4.6) che riscriviamo così

$$a_{N,k} = \sum_{j=0}^{N-1} \sqrt{\frac{2}{N}} f_j \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{k\pi}{2N} (2j+1) = (F_N, C_{N,k})$$

$k = 1, \dots, N-1$, e

$$\frac{a_{N,0}}{\sqrt{2}} = \sum_{j=0}^{N-1} \sqrt{\frac{2}{N}} f_j \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = (F_N, C_{N,0})$$

.

□

Denotiamo con V_N la matrice $N \times N$ avente per riga k l'elemento di posto k della base \mathcal{V}_N , con A_N il vettore $(a_{N,0}/\sqrt{2}, a_{N,1}, \dots, a_{N,N-1})^\top$ e con F_N il vettore

$$F_N = \sqrt{\frac{2}{N}} (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})^\top,$$

dove $^\top$ indica il trasposto di un vettore. Allora la formula (4.6) in forma matriciale si scrive

$$A_N = V_N F_N.$$

Poichè \mathcal{V}_N è una base ortonormale, la matrice V_N è ortogonale e quindi invertibile e si ha $V_N^{-1} = V_N^\top$. Perciò $F_N = V_N^\top A_N$, cioè moltiplicando per $\sqrt{\frac{N}{2}}$,

$$(4.9) \quad f_j = \frac{a_{N,0}}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} a_{N,k} \cos \frac{k\pi}{2N} (2j+1)$$

per $j = 0, 1, \dots, N-1$. Abbiamo così trovato la *formula di inversione* per la trasformata coseno discreta (4.6). Rispondiamo ora alla seconda questione. Mostriamo che fra la DCT e la DFT esiste una relazione (vedi (4.11)) che permette di calcolare la DCT di una N -pla utilizzando l'algoritmo della Fast Fourier Transform. La relazione si ottiene utilizzando una idea già vista nella dimostrazione del Teorema 4.1: si simmetrizza il dato in maniera tale che diventi una funzione pari su un intervallo di ampiezza doppia.

Sia $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ una N -pla assegnata e denotiamo con $(a_{N,k})$ la sua DCT

$$a_{N,k} = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\pi \frac{k}{N} \left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Simmetrizziamo ora in modo "pari" il dato: denotiamo con $(x_{-j})_{j=1}^N$ la N -pla definita da $x_{-j} = x_{j-1}$ (cfr. Figura 1) e con (y_n) la successione di periodo $2N$ così

definita

$$(4.10) \quad y_n = \begin{cases} x_n, & \text{se } n = 0, 1, \dots, N-1, \\ x_{-n-1}, & \text{se } n = -N, -N+1, \dots, -1. \end{cases}$$

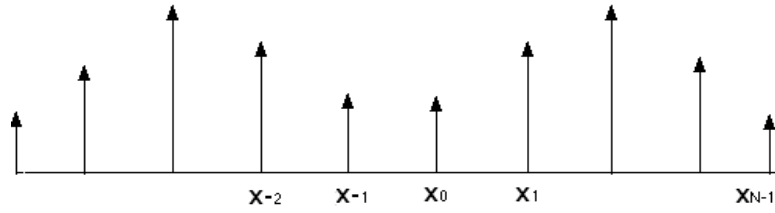


Figura 1 La N -pla simmetrizzata.

Denotiamo con $(Y_{2N,k})$ la DFT del vettore $(y_0, y_1, \dots, y_{2N-1})$

$$Y_{2N,k} = \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{2N-1} y_n e^{-2\pi i n k / 2N} \quad k = 0, \dots, 2N-1.$$

La seguente proposizione mostra che, a meno di un fattore di modulo 2, la N -pla $(a_{N,0}, a_{N,1}, \dots, a_{N,N-1})$ è uguale ai primi N elementi della DFT della $2N$ -pla (4.10).

Proposizione 4.4. *Si ha*

$$(4.11) \quad a_{N,k} = 2 Y_{2N,k} e^{-\pi i k / 2N} \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Dimostrazione. Spezziamo in due la somma

$$Y_{2N,k} = \frac{1}{2N} \left(\sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-2\pi i n k / 2N} + \sum_{n=N}^{2N-1} y_n e^{-2\pi i n k / 2N} \right) = \frac{1}{2N} (S_1 + S_2).$$

Ricordando che (y_n) è una successione $2N$ -periodica e operando un cambiamento di variabili in S_2 si ha

$$S_1 = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\pi i n \frac{k}{N}}$$

$$S_2 = \sum_{n=-N}^{-1} y_n e^{-\pi i n \frac{k}{N}} = \sum_{n=-N}^{-1} x_{-n-1} e^{-\pi i n \frac{k}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{\pi i n \frac{k}{N}} e^{\pi i \frac{k}{N}}.$$

Moltiplicando e dividendo per una stessa quantità nella somma S_1 si ottiene

$$\begin{aligned}
 Y_{2N,k} &= \frac{1}{2N} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\pi i n \frac{k}{N}} e^{\pi i \frac{k}{2N}} e^{-\pi i \frac{k}{2N}} + \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{\pi i n \frac{k}{N}} e^{\pi i \frac{k}{2N}} e^{\pi i \frac{k}{2N}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} e^{\pi i \frac{k}{2N}} \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\pi \frac{k}{N} \left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \\
 &= \frac{1}{2} e^{\pi i \frac{k}{2N}} a_{N,k}
 \end{aligned}$$

per $k = 0, \dots, N-1$. □

Esistono altre famiglie di basi ortonormali in $L^2([0, T])$ che danno luogo ad altre trasformate continue

$$\left\{ 1, \sqrt{2} \cos\left(\frac{k\pi x}{T}\right), k = 1, 2, \dots \right\}$$

$$\left\{ 1, \sqrt{2} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2T}\right), k = 1, 2, \dots \right\}$$

$$\left\{ \sqrt{2} \sin\left(\frac{k\pi x}{T}\right), k = 1, 2, \dots \right\}$$

$$\left\{ \sqrt{2} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2T}\right), k = 1, 2, \dots \right\}$$

Ognuna di esse dà luogo ad una trasformata continua e, discretizzando come fatto in questa sezione, ad una trasformata discreta. Quelle ottenute dalle ultime due sono due trasformate seno discrete (DST).

5 . Note

- 1 J.P.E.G. sono le iniziali di *Joint Photographic Experts Group*, una commissione di esperti che dopo un lungo lavoro, dettò gli standards per la compressione di immagini digitali fisse. Il formato di immagini *jpeg* è molto usato su internet e in particolare su World Wide Web. Si tratta di un efficiente modo di trasferire immagini digitali fisse adottata in tutto il mondo. L'algoritmo si basa sulla *Trasformata Coseno Discreta* e sulla *Fast Fourier Transform*, ma buona parte della compressione è dovuta a procedure di *quantizzazione*. La JPEG è anche usata per la compressione di immagini video. Molto conosciuto è anche il formato GIF (*Graphic Interchange Format*) che usa una diversa tecnica di compressione.
- 2 La parola *pixel* è una contrazione di *picture element* ed è un singolo punto dell'immagine sullo schermo
- 3 Un *terabyte* è 2^{40} bytes mentre un *megabyte* è 2^{20} bytes.

6. Esercizi. Trasformata di Fourier Discreta

3.1 Sia f a supporto in $[-R, S]$, R e S positivi. Siano $x_j = -R + \frac{j}{N}(R+S)$, $f_j = f(x_j)$, $j = 0, \dots, N-1$ e sia $F_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-kj}$ la DFT di $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$. Verificare la formula (1.13) delle dispense, che qui riscriviamo

$$(R+S) e^{2\pi i k R / (R+S)} F_k = \sum_{j \in \mathbf{Z}} e^{2\pi i j N R / (R+S)} \hat{f}\left(\frac{1}{R+S}(k-jN)\right) \quad k \in \mathbf{Z}$$

3.2 Sia (e_k) la N -pla di $l^2(G_N)$ definita da $e_k(\omega_N^j) = \omega_N^{jk}$, dove $\omega_N = e^{-\frac{2\pi}{N}i}$. Verificare che $(e_0, e_1, \dots, e_{N-1})$, è una base ortonormale per $l^2(G_N)$.

3.3 Verificare che se f è una funzione reale, la parte reale della trasformata di Fourier è pari e la parte immaginaria è dispari. La stessa cosa accade per la DFT:

$$\operatorname{Re}(F_k) = \operatorname{Re}(F_{-k}) \quad \operatorname{Im}(F_k) = -\operatorname{Im}(F_{-k}) \quad k \in \mathbf{Z}.$$

3.4 Verificare che se f e g sono due funzioni su $l^2(G_N)$, allora si ha

$$\widehat{(f * g)}(m) = \hat{f}(m) \hat{g}(m), \quad f * e_m = \hat{f}(m) e_m, \quad \delta * f = f$$

per $m = 0, \dots, N-1$.

3.5 Calcolare la trasformata coseno discreta dei seguenti dati

$$X_1 = (1, 1, 1, 1), \quad X_2 = (1, -1, 1, -1), \quad X_3 = (1, 0, 0, 0), \quad X_4 = (0, 1, 0, 0, 0).$$

7. Esercitazioni

Premettiamo alcune considerazioni utili per il calcolo numerico della trasformata di Fourier di una funzione.

Osservazione 1 (La definizione di DFT nelle routine Matlab) Si è visto (vedi (1.12)) che se una funzione f ha supporto in $[-S, S]$ la sua trasformata di Fourier è approssimata da

$$(7.1) \quad (-1)^k 2S F_k = (-1)^k \frac{2S}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-kj} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

dove $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ sono i campioni di f nei punti $x_j = -S + j2S/N$. Per l'implementazione della routine di Matlab che calcola la trasformata (*fft.m*), può essere utile scrivere l'espressione di (7.1) in termini della DFT fornita dalla routine. Denotiamo con

$$(X(1), X(2), \dots, X(N-1))$$

la N -pla fornita dalla routine FFT

$$X(k) = \sum_{j=1}^N x(j) w^{(j-1)(k-1)}, \quad k = 1, \dots, N,$$

dove $x(j), j = 1, \dots, N$ è il dato.

Rinominando $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ con $(f(1), f(2), \dots, f(N))$, la (7.1) si riscrive

$$(-1)^k \frac{2S}{N} \sum_{j=1}^N f(j) \omega^{-(j-1)k}, \quad k = 0, \dots, N-1;$$

cioè

$$(-1)^{k-1} \frac{2S}{N} X(k) \quad k = 1, \dots, N.$$

Osservazione 2 (Come migliorare l'errore di aliasing). Sia f una funzione reale a supporto in $[0, S]$. Per ogni k fissato, la somma che appare in (1.10):

$$SF_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{k}{S} - j \frac{N}{S}\right) \quad k \in \mathbb{Z}.$$

non è finita perchè \hat{f} non ha supporto limitato. Perciò nel calcolo della DFT si manifesterà un errore di aliasing, che sarà tanto più grande quanto minore è il decadimento all'infinito della funzione \hat{f} . Inoltre per una assegnata funzione questo errore sarà minore se il parametro di periodizzazione $1/T = N/S$ è grande, vale a dire, poichè S è assegnato, se si sceglie un numero N di punti più grande.

Nella pratica, assegnata la funzione f , e deciso il numero N di punti di campionatura da usare per calcolare la DFT si determina il parametro $T = S/N$; questo, come si vede dalla relazione (1.10), determina l'ampiezza dell'intervallo $1/T = N/S$ in cui si ottiene l'approssimazione di \hat{f} . Si noti che, se si aumenta il numero di punti di discretizzazione, questo intervallo aumenta di ampiezza. Perciò si deve tener presente che, se si aumenta il numero di punti N per il calcolo della DFT, si ottiene la \hat{f} in un intervallo più grande.

Viceversa si può partire con l'esigenza di ottenere una approssimazione di \hat{f} in un dato intervallo $[-1/2T, 1/2T]$; in tal caso si sceglie $N = S/T$.

Considerazioni del tutto simili valgono quando il supporto di f è $[-R, S]$.

Osservazione 4 Se la funzione f è a banda in $[-\Omega, \Omega]$, allora la funzione f ha supporto illimitato e, per il calcolo della somma di Cauchy, la funzione va troncata su un intervallo $[-S, S]$ con S opportunamente scelto.

Esercizio Mostrare che se $N \geq 4\Omega S$ l'errore di aliasing è zero.

Osservazione 5 (La DFT non individua in maniera unica \hat{f}) Si noti che una volta trovata la DFT di un segnale, la trasformata di Fourier non è individuata in maniera unica. Il seguente esercizio mostra che ci sono più funzioni che hanno la stessa DFT.

Esercizio Sia data una funzione f definita in $[0, S]$. Mostrare che la funzione

$$g(x) = e^{2\pi i N x/S} f(x)$$

ha la stessa DFT di f a N punti, ma \hat{f} e \hat{g} sono diverse, infatti \hat{g} è una traslata di \hat{f} . Questo mostra che la trasformata di Fourier è individuata a meno di una traslazione di \hat{f} di un multiplo di $1/T = N/S$.

Esercizi di laboratorio sul calcolo della trasformata di Fourier

5.0 (*Un caso studio come esempio*) Usando la routine `fft.m` di Matlab calcolare la trasformata di Fourier della funzione f che è definita da $f(x) = e^{-x}$ per $x > 0$, è uguale a $1/2$ per $x = 0$ ed zero altrimenti.

Confrontare con la trasformata vera.

Evidenziare l'errore di aliasing e di oscillazione mediante esperimenti.

È facoltativo il calcolo (numerico) della trasformata della funzione \hat{f} .

5.1 Calcolare la trasformata di $f(x) = e^{-\pi x^2}$ usando la FFT.

Usare $N = 32$ e l'intervallo $[-4, 4]$. Confrontare con la trasformata vera.

5.2 Calcolare la trasformata di $f(x) = e^{-|x|}$ e di $g(x) = e^{-2\pi|x|}$ usando la FFT.

In entrambi i casi usare $N = 64$ e l'intervallo $[-4, 4]$. Poi $N = 1024$ e l'intervallo $[-4, 4]$.

In entrambi i casi confrontare con la trasformata vera. Commentare i risultati evidenziando l'errore di aliasing e l'errore di oscillazione.

Esercizi sulla Compressione

5.3 Compressione di un segnale unidimensionale Il file *HochNMR.asc* formato ascii contiene un vettore che è il logaritmo dello spettro di una risonanza magnetica nucleare. Calcolare la DCT del segnale, tagliare, ponendoli uguali a zero, i coefficienti al di sotto di una certa soglia, e ricostruire il segnale. Provare con vari valori della soglia.

5.4 Compressione di immagine I

L'elaborazione delle immagini viene fatta sulla loro rappresentazione numerica. Per una immagine in bianco e nero, la rappresentazione numerica viene creata ricoprendo l'immagine con una griglia di punti sufficientemente fine e associando a ogni punto (x, y) della griglia un valore $f(x, y)$ della "scala di grigio," che è la media dei valori di grigio dei punti vicini. L'immagine quindi diventa una grande matrice, tipicamente quadrata, e le sue elaborazioni vengono fatte su questa matrice.

Le immagini in formato *jpeg*, sono ottenute per compressione con una procedura che si basa sulla DCT in due dimensioni e che funziona molto bene sulle immagini naturali (scene, panorami).

Eseguiremo inizialmente un semplice procedimento di compressione di una immagine e che consiste nei seguenti passi :

1. Si divide l'immagine (digitalizzata) in blocchi di 8×8 pixel
2. Ad ogni blocco viene applicata la Trasformata Coseno Discreta (in due dimensioni) ottenendo così, per ogni blocco, una matrice di coefficienti.
3. Si eliminano parte di questi coefficienti, ponendo uguale a zero quelli sotto una certa soglia (oppure quelli con indice elevato).
4. Ad ogni matrice 8×8 si applica la DCT inversa utilizzando solo i coefficienti ritenuti, ricostruendo così l'immagine di ogni quadratino.
5. Si incollano i quadratini ricostruiti, ricostruendo così l'immagine data, in forma compressa.

In realtà la procedura che si usa per le immagini JPEG è più sofisticata, e sostanzialmente è diversa in due punti. Il primo punto riguarda il modo in cui si riduce il numero degli elementi della matrice dei coefficienti DCT (quindi il passo 3 qui sopra). Invece di eliminare gli elementi al di sotto di una certa soglia, ogni elemento viene diviso per l'elemento di ugual posto di una matrice 8×8 , detta *matrice di quantizzazione*, che chiameremo Q , e poi lo si arrotonda all'intero più vicino. Durante le esercitazioni di laboratorio descriveremo meglio queste matrici di quantizzazione e ne descriveremo gli effetti.

L'altro punto di diversità è l'aggiunta di un ulteriore algoritmo (dopo il passo 3) che ha l'effetto di comprimere ulteriormente. La procedura consiste quindi nei seguenti passi

1. Suddivisione in blocchi
2. Applicazione della DCT2 ad ogni blocco
3. Quantizzazione
4. Applicazione di algoritmi di codifica per comprimere ulteriormente.

Una volta effettuata la compressione, per ottenere l'immagine compressa si devono fare i seguenti passi "inversi":

1. Applicazione degli algoritmi di decodifica
2. Moltiplicazione dei singoli blocchi 8×8 per la matrice di quantizzazione
3. Applicazione della DCT2 inversa
4. Incollamento dei blocchi.

Compressione immagine impronte digitali. In questa esercitazione vogliamo comprimere un'immagine con la procedura "semplice" descritta sopra: dopo aver calcolato la DCT eliminiamo parte dei coefficienti, e ricostruiamo l'immagine con i soli coefficienti ritenuti. Il file *detfingr.mat* contiene una matrice quadrata che rappresenta l'immagine di impronte digitali in Figura 1.

Spieghiamo ora come prendere i dati e visualizzare l'immagine. Il file contenente i dati è un file di tipo *.mat*. Per caricarlo e far apparire l'immagine:

```
load detfingr.mat;
whos
figure(1);
colormap(gray);
imagesc(X);
colormap(gray)
end
```

il primo comando carica i dati che sono nel file *detfingr.mat*. Con il comando *whos* appaiono le variabili contenute nel file con le loro dimensioni.

Effettuare la compressione seguendo i passi:

- 1) spezzare la matrice in blocchetti di sottomatrici quadrate di lato 8 (o 16). A ciascun blocchetto si applica la DCT in due dimensioni *dct2.m*.
- 2) per ciascun blocchetto si elimina parte dei coefficienti. Questo si può fare in due modi: porre uguali a zero quelli il cui valore assoluto è al di sotto di una soglia prefissata, oppure porre uguale a zero quelli che hanno indice alto.
- 3) usando la *idct.m* si ricostruisce il dato cioè i valori di ciascun blocchetto coi i soli coefficienti ritenuti.
- 4) si incollano i vari blocchi 8×8 , ottenendo così l'intera matrice ricostruita.

Gli studenti sono incoraggiati a sperimentare, per esempio usando blocchetti 16×16 o 4×4 .

Si consiglia di guardare l'immagine che rappresenta la matrice dei coefficienti DCT della matrice intera, che si ottiene incollando i blocchetti 8×8 dei coefficienti. E di fare un confronto fra quelle ottenute per vari immagini.

5.5 Compressione di una immagine II Anche in questo esercizio si vuole comprimere una immagine usando la DCT. La procedura di compressione è la stessa. Ma questa volta viene assegnata l'immagine, non i dati numerici, che quindi devono essere ricavati dall'immagine.

- 1) Per trasformare l'immagine in una matrice numerica quadrata di nome, per esempio, *Im* si può usare il comando *Im=imread('saturn.tif')*.
- 2) Per visualizzare l'immagine: *imagesc(Im) colormap(bone)*

- 3) Dopo aver ottenuto la matrice che rappresenta l'immagine, dobbiamo dividere in blocchetti di sottomatrici quadrate e a ciascuna matrice applicare la DCT.
 - 4) Nella matrice assegnata in questa esercitazione il numero di righe (328) e il numero delle colonne, (438) non sono multipli di 16. Allora sarà necessario aggiustare con un bordo di valori nulli. Perciò aggiungiamo due colonne di zeri ottenendo così una matrice 328×440 . Da questa otterremo una matrice 320×432 fatta da blocchi da 16 più un bordo, fatto da blocchetti di 8.
 - 5) La procedura poi prosegue come nel precedente esercizio: si applica la routine *dct2*, si mettono a zero i coefficienti al di sotto di una certa soglia. e successivamente si ricostruisce usando la routine *idct2* e rincollando le matrici 8×8 .
 - 6) Evidenziare e spiegare il fenomeno del blocking.
 - 7) Sperimentare, per esempio usando blocchetti 16×16 o 4×4 .
- Si consiglia di guardare l'immagine che rappresenta la matrice dei coefficienti DCT della matrice intera, che si ottiene incollando i blocchetti 8×8 dei coefficienti. E di fare un confronto fra quelle ottenute per varie immagini.

Capitolo IV

L'analisi in tempo frequenza e la trasformata di Gabor

Questo capitolo è dedicato all'analisi in tempo-frequenza e alla trasformata a finestra mobile. L'analisi in tempo frequenza è un capitolo dell'analisi armonica che tratta simultaneamente e simmetricamente il tempo e la frequenza per l'analisi di funzioni e di operatori; le sue origini risalgono al 1930, nel lavoro di H. Weyl, E. Wigner e J. von Neumann in meccanica quantistica e nei successivi sviluppi della teoria dell'informazione e dell'analisi del segnale dovuti a D. Gabor (1946).

Nella Sezione 1 discutiamo i limiti dell'analisi di Fourier classica nell'analisi del segnale e descriviamo le idee dell'analisi in tempo frequenza. Nella Sezione 2 definiamo la trasformata di Gabor e mostriamo che è un multiplo di una isometria, da $L^2(\mathbb{R})$ su un sottospazio proprio di $L^2(\mathbb{R}^2)$ e diamo una formula di inversione.

I limiti dell'analisi di Fourier classica. In linea di principio la conoscenza di $f(t)$ per ogni valore di t determina completamente tutte le proprietà di f ; quindi anche della sua trasformata di Fourier, perchè la trasformata di Fourier è iniettiva. Però non è sempre facile estrarre le proprietà di \hat{f} dalla sola f . Concettualmente possiamo pensare a f e \hat{f} come due diverse rappresentazioni dello stesso oggetto f . Ognuna contiene le stesse informazioni, ma ciascuna delle due rende visibili ed accessibili aspetti piuttosto diversi di f .

Nell'analisi tempo-frequenza si cercano rappresentazioni che combinino assieme gli aspetti e la fisionomia di f e \hat{f} in una sola funzione, la cosiddetta rappresentazione in tempo-frequenza.

Nel seguito di questa discussione adotteremo il linguaggio dell'analisi del segnale. Un segnale nella vita reale può essere l'intensità della corrente in un conduttore, un brano di musica, il fischio di un treno; oppure i dati relativi al tracciato di un sismografo, i dati dell'andamento di titoli in borsa, o infine una onda elettromagnetica. Dal punto di vista matematico un segnale è una funzione continua o discreta. L'analisi del segnale si occupa di analizzare accuratamente, codificare efficientemente, trasmettere rapidamente e poi ricostruire le oscillazioni e fluttuazioni di questa funzione.

Pensiamo ad f come a un breve brano musicale. Come quantità fisica, $f(t)$ può essere l'ampiezza della vibrazione di una membrana di un altoparlante o un segnale elettrico al tempo t . Così f descrive il comportamento temporale del segnale, e in

esso dovremmo essere in grado di individuare le configurazioni ritmiche della musica. Però è impossibile scoprire la melodia o la tonalità della musica semplicemente guardando il grafico di f . D'altra parte, guardando \hat{f} , forse potremmo forse riconoscere la tonalità della musica dalle bande di frequenza, ma sarà difficile percepire la melodia o il ritmo. La rappresentazione di Fourier ci fornisce una chiara indicazione sulle note prevalenti in termini delle corrispondenti frequenze, ma nessuna informazione sul momento di attacco o di durata di una nota. Dunque, benché sia f sia \hat{f} contengano tutte le possibili informazioni, nessuna delle due mostra tutte le informazioni che il nostro orecchio percepisce. Sotto questo aspetto si ottengono molte più informazioni dalla notazione musicale: su un brano di musica si legge quale nota va suonata, ma anche il momento dell'attacco e la sua durata. L'asse orizzontale rappresenta il tempo, e l'asse verticale rappresenta la frequenza, Se cerchiamo di capire le ragioni per cui la trasformata di Fourier non è adatta a rappresentare informazioni locali nel tempo, individuiamo una causa nelle funzioni che compaiono nella sua rappresentazione, che non sono per nulla localizzate nel tempo: si ha $|e^{2\pi i n t}| = 1$ per ogni n e t . Una piccola perturbazione di f avrà effetto su tutti i coefficienti di Fourier. Un ragionamento simile si applica all'integrale di Fourier.

L'analisi in tempo frequenza Prima di descrivere i recenti sviluppi dell'analisi di Fourier nell'analisi del segnale mostriamo con un esempio concreto come gli strumenti dell'analisi di Fourier classica sono inadeguati per rappresentare e comprendere certi segnali. Il segnale f che appare in Figura 1, ottenuto sinteticamente, è la somma di tre segnali elementari: una funzione seno (cioè una frequenza pura), un "chirp" (cioè una funzione del tipo $\sin t^3$) e una funzione "tenda" molto simile ad una funzione impulsiva. In Figura 2 compare il modulo della sua trasformata di Fourier, calcolata numericamente. Come si vede, l'unico elemento evidente dall'esame del grafico di \hat{f} è una componente dominante e localizzata in frequenza, ma l'informazione sul comportamento del segnale nel tempo è persa.

Questo esempio mostra che l'ideale sarebbe avere a disposizione una rappresentazione che fornisce informazioni dirette sulle frequenze in gioco all'istante t , per ogni t . D. Gabor aveva in mente queste considerazioni quando, nel 1946, introdusse un metodo per rappresentare un segnale in due dimensioni, con il tempo e la frequenza come coordinate.

frequenza

L. van Beethoven
op. 22

Allegro con brio

The image displays a musical score for the first movement of Beethoven's Sonata Op. 22. The score is presented on three systems of staves. The top system shows the beginning of the piece, marked 'Allegro con brio' and 'p' (piano). The middle system starts at measure 4, marked 'fp' (fortissimo piano) and 'cresc.' (crescendo). The bottom system starts at measure 7, marked 'f' (forte). The score is annotated with a vertical axis labeled 'frequenza' (frequency) and a horizontal axis labeled 'tempo' (time). The notation includes treble and bass clefs, a key signature of two flats, and various musical symbols such as dynamics, articulation, and phrasing marks.

tempo

La notazione musicale. Sonata. L van Beethoven op. 22

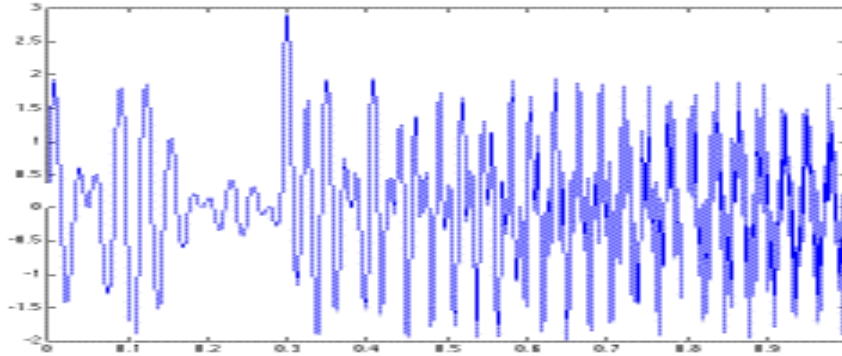


Figura 1 Il segnale f

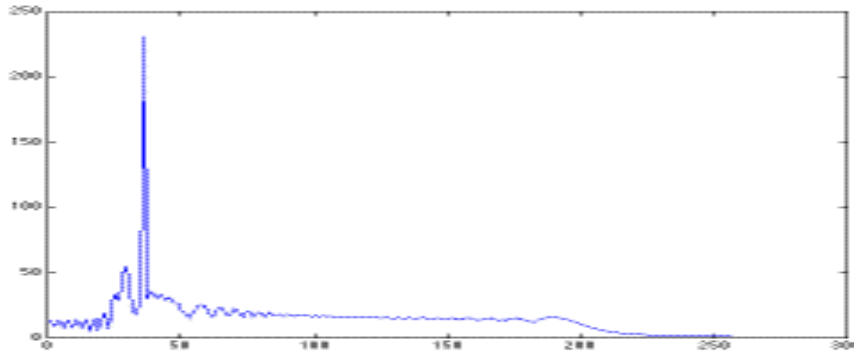


Figura 2 La trasformata di Fourier di f .

1 . La trasformata di Gabor

In questo capitolo denoteremo con $L^2(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle funzioni di quadrato sommabile su \mathbb{R}^n ; se f e g sono due funzioni di $L^2(\mathbb{R}^n)$, con $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ denoteremo la norma di f in questo spazio e con $(f, h)_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ il prodotto interno. Sia $g \neq 0$ una funzione (detta *funzione finestra*) fissata in $L^2(\mathbb{R})$. Se f è una funzione in $L^2(\mathbb{R})$, la funzione definita da

$$(1.1) \quad \mathcal{W}f(\omega, t) = \int f(s)\bar{g}(s-t)e^{-2\pi i\omega s} ds$$

per ω e t in \mathbb{R} , si chiama *Trasformata di Gabor di f* . L'integrale ha senso per ogni t e ogni ω perchè $(f\tau_t\bar{g}) \in L^1(\mathbb{R})$. Si noti che \mathcal{W} è lineare e dipende da g .

Per interpretare la formula (1.1) supponiamo che g sia reale. Allora $\mathcal{W}f(\omega_o, t_o)$ è la trasformata di Fourier di $f\tau_{t_o}g$ in ω_o . Se g è la funzione caratteristica di un intervallo centrato nell'origine, allora $\mathcal{W}f(\omega_o, t_o)$ è la trasformata in ω_o della restrizione di f a un intervallo centrato attorno al punto t_o . Quando t varia, la funzione g trasla lungo l'asse delle t agendo come una finestra che scorrendo, coglie informazioni

sulla trasformata di Fourier delle localizzazioni di f (Figura 3). Per questo $\mathcal{W}f$ si chiama anche *trasformata a finestra mobile* di f . Nella teoria e nella pratica si considerano funzioni finestra più regolari, non necessariamente a supporto compatto come nella Figura 3.

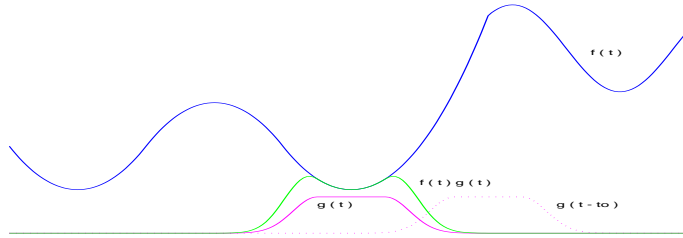


Figura 3 $\mathcal{W}f(\omega, t_0)$ descrive il contenuto di f in frequenza vicino a t_0

Denotiamo con $e_\omega, \omega \in \mathbb{R}$, la funzione $e_\omega(s) = e^{2\pi is\omega}$; l'operatore definito da $M_\omega f = e_\omega f$ è detto *operatore di modulazione*. Ricordiamo che M_ω è continuo rispetto al parametro ω in $L^2(\mathbb{R})$ (Esercizio 2.8 Cap 2).

Lemma 1.1. *Sia $g \in L^2(\mathbb{R})$. Allora per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$ la formula (1.1) può essere scritta nei seguenti modi equivalenti*

$$(1.2) \quad \mathcal{W}f(\omega, t) = (f, M_\omega \tau_t g)_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$(1.3) \quad \mathcal{W}f(\omega, t) = (f \cdot \tau_t \bar{g})^\wedge(\omega)$$

$$(1.4) \quad \mathcal{W}f(\omega, t) = (\hat{f}, \tau_\omega(M_{-t}\hat{g}))_{L^2(\mathbb{R})} = e^{-2\pi it\omega} \int \hat{f}(\xi) \bar{\hat{g}}(\xi - \omega) e^{2\pi i t \xi} d\xi.$$

Dimostrazione. Le prime due formule sono ovvie. Si noti che, poichè $f \cdot \tau_t \bar{g}$ è in $L^1(\mathbb{R})$, la formula (1.3) mostra che $\mathcal{W}f$ è definita puntualmente per ogni t e ω ed è continua rispetto a ω . Nel Lemma 1.2 mostreremo che è continua come funzione di due variabili. Dalla (1.2), per la formula di Plancherel, si ottiene $\mathcal{W}f(\omega, t) = (\hat{f}, (M_\omega \tau_t g)^\wedge)_{L^2(\mathbb{R})}$. Usando la relazione fra trasformata di Fourier e traslazione (formule (iii) del Teorema 3.1) si ha

$$(M_\omega \tau_t g)^\wedge(\xi) = \tau_\omega(\tau_t g)^\wedge(\xi) = \tau_\omega M_{-t} \hat{g}(\xi) = e^{2\pi it(\xi - \omega)} \hat{g}(\xi - \omega).$$

da cui la (1.4) segue subito. □

Supponiamo per il momento che \hat{g} sia reale. La formula (1.4) mostra che, a meno di una modulazione, $\mathcal{W}f(\omega, t)$ è la trasformata di Fourier di $\hat{f} \tau_\omega \hat{g}$. Se quindi $\bar{\hat{g}}$ è ben localizzata attorno all'origine, $\mathcal{W}f(\omega, t)$ fornisce informazioni sulla antitrasformata di \hat{f} ristretta attorno a ω . Dunque, se scegliamo la funzione finestra g ben localizzata sia in tempo che in frequenza, \mathcal{W} fornirà informazioni locali su f e \hat{f} . Una funzione di questo tipo molto usata è la gaussiana, ma sono state studiate anche funzioni scarsamente localizzate in frequenza come le splines.

Lemma 1.2. *Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$. Allora $\mathcal{W}f$ è continua in \mathbb{R}^2 .*

Dimostrazione. Dalle formule (1.2) e (1.3), usando la diseguaglianza di Schwarz, si ha

$$\begin{aligned} & |\mathcal{W}f(\omega, t) - \mathcal{W}f(\omega_o, t_o)| \\ & \leq |\mathcal{W}f(\omega, t) - \mathcal{W}f(\omega, t_o)| + |\mathcal{W}f(\omega, t_o) - \mathcal{W}f(\omega_o, t_o)| \\ & = |(f, M_\omega \tau_t g - M_\omega \tau_{t_o} g)_{L^2(\mathbb{R})}| + |(M_{-\omega} f - M_{-\omega_o} f, \tau_{t_o} g)_{L^2(\mathbb{R})}| \\ & \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\tau_t g - \tau_{t_o} g\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|M_{-\omega} f - M_{-\omega_o} f\|_{L^2(\mathbb{R})} \|g\|_{L^2(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

La continuità di $\mathcal{W}f$ discende subito dalla continuità di τ_{t_o} (Lemma 2.9) e dall'osservazione che precede il Lemma 1.1. \square

Il seguente teorema mostra che \mathcal{W} è multiplo di una isometria da $L^2(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Teorema 1.3. *Sia $g \in L^2(\mathbb{R})$. Allora per ogni f in $L^2(\mathbb{R})$ si ha*

$$(1.5) \quad \|\mathcal{W}f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|g\|_{L^2(\mathbb{R})} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$(1.6) \quad (\mathcal{W}f, \mathcal{W}h)_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \gamma_g(f, h)_{L^2(\mathbb{R})}$$

dove $\gamma_g = \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$.

Dimostrazione. Basta provare la prima identità, la seconda segue per polarizzazione. Siano f e g in $L^2(\mathbb{R})$. Usando la (1.2) e la formula di Plancherel si ha

$$\begin{aligned} \|\mathcal{W}f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &= \int \left(\int |\mathcal{W}f(\omega, t)|^2 d\omega \right) dt \\ &= \int \|\mathcal{W}f(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \\ &= \int \|(f \tau_t \bar{g})^\wedge\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \\ &= \int \|f \tau_t \bar{g}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt. \end{aligned}$$

Il secondo membro è uguale a

$$\begin{aligned} \int \left(\int |f(s) \bar{g}(s-t)|^2 ds \right) dt &= \int |f(s)|^2 \left(\int |\bar{g}(s-t)|^2 dt \right) ds \\ &= \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \end{aligned}$$

lo scambio dell'ordine di integrazione è lecito per il Teorema di Fubini. \square

Formula di inversione Dal Teorema 1.3 segue che l'immagine di \mathcal{W} è chiusa e, per il Lemma 1.2, è un sottospazio proprio dello spazio $L^2(\mathbb{R}^2)$. Quindi l'operatore \mathcal{W} è iniettivo ma non surgettivo. Pertanto esiste soltanto l'inverso sinistro. Denotiamo

con $\mathcal{W}^* : L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ l'aggiunto di \mathcal{W} . Ricordiamo che si tratta dell'operatore lineare continuo definito da

$$(\mathcal{W}^* F, h)_{L^2(\mathbb{R})} = (F, \mathcal{W}h)_{L^2(\mathbb{R}^2)} \quad F \in L^2(\mathbb{R}^2), h \in \mathbb{R},$$

(vedi Appendice). Per la definizione di aggiunto e per la (1.6) si ha

$$(\mathcal{W}^* \mathcal{W}f, h)_{L^2(\mathbb{R})} = (\mathcal{W}f, \mathcal{W}h)_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \gamma_g(f, h)_{L^2(\mathbb{R})}, \quad f, h \in L^2(\mathbb{R}).$$

Ne segue che

$$(1.7) \quad \gamma_g^{-1} \mathcal{W}^* \mathcal{W} = I,$$

dove con I abbiamo denotato l'operatore identità in $L^2(\mathbb{R})$. Quindi $\gamma_g^{-1} \mathcal{W}^*$ è l'inverso sinistro di \mathcal{W} .

Teorema 1.4. *Sia g in $L^2(\mathbb{R})$. Se $F \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ allora*

$$(1.8) \quad \mathcal{W}^* F(s) = \iint F(\omega, t) g(s-t) e^{2\pi i s \omega} d\omega dt$$

per q.o. s in \mathbb{R} . Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$, se $\mathcal{W}f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, si ha la formula di inversione

$$(1.9) \quad f(s) = \gamma_g^{-1} \iint \mathcal{W}f(\omega, t) g(s-t) e^{2\pi i s \omega} d\omega dt.$$

Dimostrazione. L'integrale in (1.8) è finito per q.o. s ed è una funzione di $L^2(\mathbb{R})$. Infatti, denotiamo con ℓ la funzione definita da

$$\ell(s) = \iint |F(\omega, t)| |g(s-t)| d\omega dt;$$

per la disuguaglianza integrale di Minkowski ⁽¹⁾ si ha

$$(1.10) \quad \|\ell\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \iint \|F(\omega, t) g(\cdot - t)\|_{L^2(\mathbb{R})} d\omega dt = \|g\|_{L^2(\mathbb{R})} \|F\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

Inoltre per ogni $F \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ e $h \in L^2$ si ha

$$\begin{aligned} (\mathcal{W}^* F, h)_{L^2(\mathbb{R})} &= (F, \mathcal{W}h)_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \iint F(\omega, t) \overline{\mathcal{W}h}(\omega, t) d\omega dt \\ &= \iint F(\omega, t) \left(\int \bar{h}(s) g(s-t) e^{2\pi i s \omega} ds \right) d\omega dt \\ &= \int \bar{h}(s) \left(\iint F(\omega, t) g(s-t) e^{2\pi i \omega s} d\omega dt \right) ds, \end{aligned}$$

assumendo per il momento che sia lecito lo scambio di integrali. Quindi abbiamo provato che per ogni $h \in L^2(\mathbb{R})$ si ha

$$(\mathcal{W}^*F, h)_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\iint F(\omega, t)g(s-t)e^{2\pi i\omega s} d\omega dt, h \right)_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Da ciò la (1.8) segue subito. Rimane da provare che lo scambio di integrali è lecito e questo segue subito dall'osservazione che per la (1.10) si ha

$$\iiint |F(\omega, t)\bar{h}(s)g(s-t)| ds d\omega dt \leq \|F\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \|h\|_{L^2(\mathbb{R})} \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

La formula di inversione (1.9) segue dalla (1.8) e dal fatto che $\mathcal{W}^*\mathcal{W} = \gamma_g I$. \square

Il Teorema precedente fornisce una formula di inversione nel caso in cui $\mathcal{W}f$ sia in $L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$. Per invertire la trasformata di Gabor nel caso generale, basta usare che $L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ è denso in $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Teorema 1.5. *Sia $F = \mathcal{W}f$. Per ogni successione (F_n) in $L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ tendente a F in $L^2(\mathbb{R}^2)$ si ha*

$$(1.11) \quad f(s) = \gamma_g^{-1} \lim_n \iint F_n(\omega, t)g(s-t)e^{2\pi i\omega s} d\omega dt \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}).$$

Dimostrazione. Sia (F_n) una successione in $L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ che converge ad F in $L^2(\mathbb{R}^2)$. Allora per la continuità di \mathcal{W}^* si ha

$$f = \gamma_g^{-1} \mathcal{W}^* \mathcal{W}f = \gamma_g^{-1} \mathcal{W}^* F = \gamma_g^{-1} \lim_n \mathcal{W}^* F_n.$$

Poichè $F_n \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$, per la (1.8) $\mathcal{W}^* F_n$ coincide con l'integrale a secondo membro della formula (1.11). \square

Per una formula di inversione più esplicita si può scegliere la famiglia $\chi_R(\omega, t)F(\omega, t)$ con χ_R funzione caratteristica del cerchio C_R di centro l'origine e raggio R ; allora da (1.11) si ottiene

$$f(s) = \gamma_g^{-1} \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{C_R} F(\omega, t)g(s-t)e^{2\pi i\omega s} d\omega dt$$

in $L^2(\mathbb{R}^2)$. Si noti che se il limite del secondo membro esiste anche quasi ovunque, allora è uguale a $f(s)$ per quasi ogni s . La formula precedente costituisce una formula di inversione.

Schematicamente l'analisi in tempo-frequenza consiste nei tre passi seguenti:

1. *Analisi:* dato un segnale, f si calcola la sua trasformata di Gabor $\mathcal{W}f(\omega, t)$ rispetto ad una finestra g opportuna, e si interpreta come una informazione in tempo-frequenza.
2. *Elaborazione:* $\mathcal{W}f(\omega, t)$ viene modificata, per esempio troncata ai soli suoi valori in una regione di interesse, per esempio dove $|\mathcal{W}f(\omega, t)|$ è superiore ad una soglia

fissata, o laddove si ha necessità di separare e analizzare le sue componenti.

3. *Sintesi*: dopo aver così elaborato il segnale, lo si ricostruisce mediante una formula di inversione.

Discretizzazione della trasformata continua e gli sviluppi in serie di Gabor.

Accenniamo brevemente al fatto che la trasformata di Gabor è ancora più conosciuta nella sua versione discreta: fissati due parametri positivi ω_o, t_o , scegliamo $\omega = m\omega_o$ e $t = nt_o$, con $n, m \in \mathbb{Z}$; allora la (1.1) diventa

$$(1.12) \quad \mathcal{W}_{m,n}f = \int f(s)\bar{g}(s - nt_o)e^{-2\pi im\omega_o s} ds.$$

Introducendo la famiglia

$$\{g_{m\omega_o, nt_o}(t), \quad m, n \in \mathbb{Z}\},$$

dove

$$g_{m\omega_o, nt_o}(s) = g(s - nt_o)e^{2\pi im\omega_o s} \quad m, n \in \mathbb{Z},$$

la (1.12) si può scrivere

$$\mathcal{W}_{m,n}f = (f, g_{m\omega_o, nt_o}).$$

La teoria si occupa di trovare sotto quali condizioni su g è possibile l'analisi e la sintesi di funzioni f di L^2 in termini della famiglia $\{g_{m\omega_o, nt_o}, m, n \in \mathbb{Z}\}$, cioè è possibile uno sviluppo del tipo

$$(1.13) \quad f = \sum_{n,m} (f, g_{m\omega_o, nt_o})g_{m\omega_o, nt_o}.$$

I vantaggi di tali rappresentazioni rispetto alla rappresentazione di Fourier sono evidenti: supponiamo che la funzione g sia ben localizzata vicino all'origine. Per la (1.1) se la funzione f viene modificata in un piccolo intorno di un punto fissato \bar{t} , questo modificherà essenzialmente solo i coefficienti dello sviluppo $\mathcal{W}_{m,n}$ per cui nt_o è vicino a \bar{t} e non, come avviene per le serie di Fourier, tutti i coefficienti. Un analogo discorso vale per la frequenza: supponiamo che la funzione \hat{g} sia ben localizzata attorno a zero. Per la (1.4) una perturbazione della funzione \hat{f} in un piccolo intorno di un punto $\bar{\xi}$ influirà essenzialmente solo sui coefficienti dello sviluppo $\mathcal{W}_{m,n}$ per cui $m\omega_o$ è vicino a $\bar{\xi}$.

Spettrogramma La rappresentazione della funzione $|\mathcal{W}(\omega, t)f|$ nel piano avente in ascissa e tempi e in ordinata le frequenze si chiama *spettrogramma*. Nella Figura 4 compare un segnale vocale (la parola *never*) ed il suo spettrogramma.

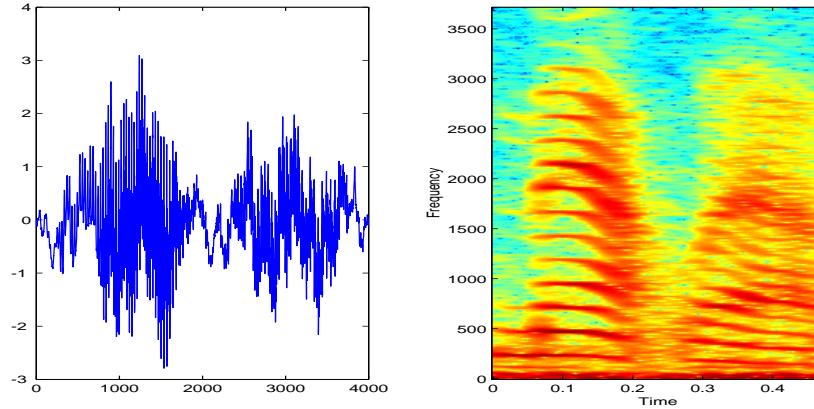


Figura 4 Trasformata di Gabor di un segnale vocale

Utilizzando finestre sufficientemente localizzate in tempo e frequenza, è possibile definire la trasformata di Gabor anche per funzioni che non sono in $L^2(\mathbb{R})$. Si consideri ad esempio la funzione $s(t) = \sin(\omega_o(t + \frac{1}{2}))$, con $\omega_o = 70\pi$; il suo grafico compare in Figura 5 assieme a quello della sua trasformata. È stata calcolata la trasformata di Gabor della funzione utilizzando come finestra una gaussiana. In Figura 7 (a sinistra) appare lo spettrogramma, si noti che, poichè la funzione è perfettamente localizzata attorno alle sequenze $\omega = \pm\omega_o$, lo spettrogramma è concentrato attorno alle due rette $\omega = \pm\omega_o$.

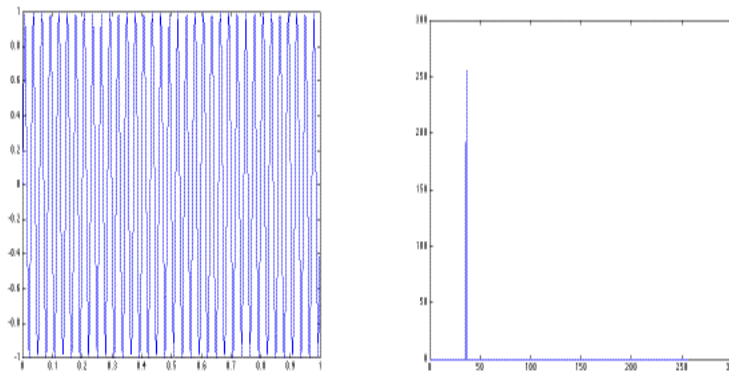


Figura 5 La funzione seno e la sua trasformata di Fourier

Invece la funzione i in (2.1) più avanti, che è localizzata nel tempo attorno all'istante $t_o = .3$, ha lo spettrogramma concentrato attorno alla retta $t = t_o$ del piano tempo-frequenza. I grafici della funzione e della sua trasformata sono in Figura 6. Lo

spettrogramma è in Figura 7 (a destra).

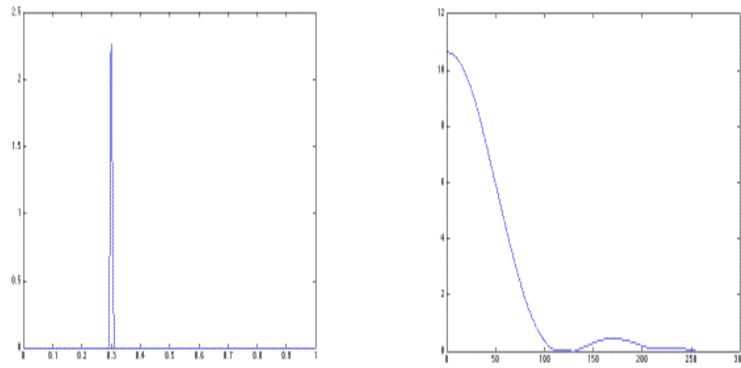


Figura 6 La funzione tenda e la sua trasformata di Fourier

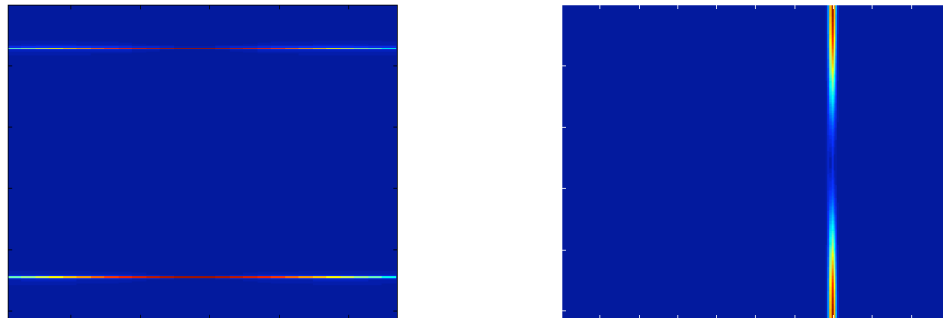


Figura 7 Spettrogramma delle funzioni seno e impulso, con finestra fine.

1 Vedi l'Appendice.

2 Vedi l'Appendice.

3 CIND è il Centro Interuniversitario per la Neurofisiologia del Dolore presso l'Università di Genova.

2. Esercitazioni

Applicazioni ed esempi

Esempio 1.1 Un segnale biomedico: la reazione di un muscolo ad una stimolazione. Quando un muscolo viene stimolato in un punto, le “unità motorie” vicine emettono un segnale elettrico continuo e delle piccole scariche che si manifestano graficamente in un certo numero di “deflessioni” successive. Con questo termine si intende un picco, un attraversamento dello zero, e un altro picco. Nella ricerca medica interessano: il numero di deflessioni, la durata complessiva della reazione, il numero, la durata e le ampiezze di ciascun picco.

La Figura 8, che mi è stata gentilmente messa disposizione dal Prof. Leandri del CIND ⁽²⁾, rappresenta il grafico di un segnale ottenuto dalla stimolazione di un muscolo. Come si vede, dalla rappresentazione grafica è impossibile riconoscere o isolare queste componenti del segnale. Uno sviluppo in seni e coseni (come quello della trasformata di Fourier) non potrebbe dirci nulla di più. Provate a leggere dai coefficienti di Fourier informazioni sul segnale! Tutto ciò che si indovina è qualche indicazione sulla regolarità della funzione. Naturalmente considerazioni analoghe valgono per l'integrale di Fourier.

In maniera analoga, nella lettura di un elettrocardiogramma si cercano componenti ben note, come ad esempio un'onda anomala, che possano denotare l'inizio di una malattia cardiaca, mentre nella lettura di un encefalogramma si cerca la presenza di un episodio di attacco di natura neurologica. Anche in questo caso la trasformata di Fourier, che è una analisi in seni e coseni, non sarebbe di nessun aiuto per la semplice ragione che

seni e coseni non hanno nulla a che fare con le onde che stiamo cercando

L'idea nuova è quella di sostituire le funzioni seno e coseno con funzioni più flessibili (come le funzioni finestra) e adatte ad analizzare il segnale che ci interessa, magari simili al segnale che vogliamo analizzare.

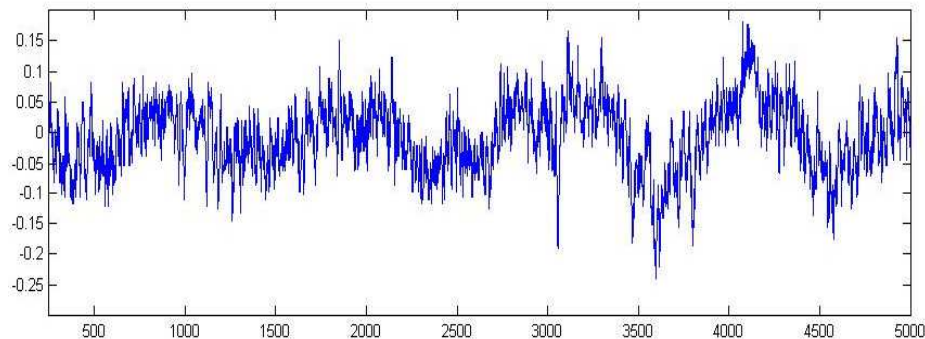


Figura 8 segnale elettrico biomedico.

Esercitazione

La funzione il cui grafico è raffigurato nella Figura 1 è la somma delle tre funzioni seguenti

$$(2.1) \quad s(t) = \sin(70\pi t) \quad i(t) = \max(0, 2.5 - 300|(t - 0.3)|)$$

$$(2.2) \quad c(t) = \sin(2\pi(25 + 24t^2)t).$$

I grafici delle funzioni s ed i e delle loro trasformate di Fourier sono in Figura 5 e Figura 6 qualche pagina indietro, il grafico delle funzioni c e della sua trasformata sono in Figura 9.

Usando l'algorithmo della FFT di Matlab calcolare la trasformata di Fourier delle funzioni

$$s(t + 0.5), \quad i(t + 0.5), \quad c(t + 0.5), \quad t \in (-0.5, 0.5)$$

e della loro somma.

2. Usando come finestra la funzione gaussiana $h = \sqrt{\delta}e^{-\frac{1}{2}(\delta y)^2}$ con $\delta > 0$, calcolare lo spettrogramma di ciascuna di queste quattro funzioni per vari valori del parametro δ .

Suggerimento: rappresentare la matrice dei coefficienti usando **imagesc** (colore default), e una rappresentazione tridimensionale (**imagesc(y,x, (cf2))**).

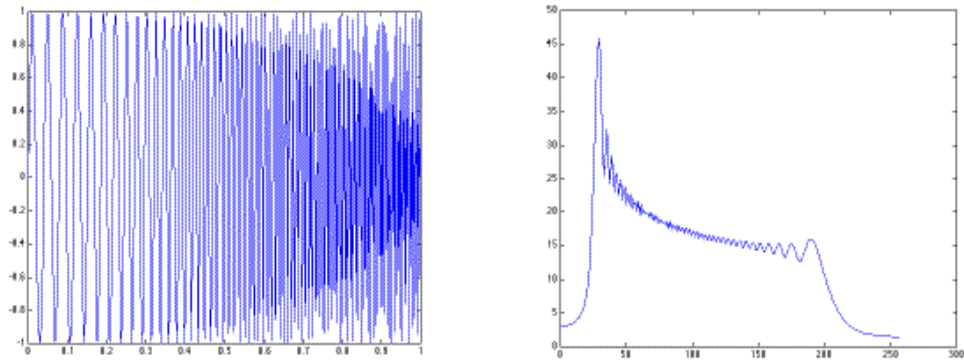


Figura 9 La funzione chirp e la sua trasformata

Capitolo V

Appendice

1. Disuguaglianza integrale di Minkowski

Lemma Sia ℓ una funzione misurabile tale che $\ell\varphi \in L^1$ per ogni $\varphi \in L^2$ e

$$(1.1) \quad \left| \int \ell\varphi \, dx \right| \leq c \|\varphi\|_2$$

Allora si ha $\ell \in L^2$ e $\|\ell\|_2 \leq c$.

Dimostrazione Sia

$$E_n = \{x \in [-n, n] : |\ell(x)| \leq n\} \quad n \in \mathbb{N}$$

e sia φ_n la successione

$$(1.2) \quad \varphi_n = \bar{\ell} \chi_{E_n} \quad n \in \mathbb{N}.$$

dove χ_{E_n} denota la funzione caratteristica dell'insieme E_n . Si ha $\varphi_n \in L^2$ per ogni n perchè $\|\varphi_n\|^2 = \int_{E_n} \bar{\ell} \ell \, dx < 2n^3$. Ne segue, per l'ipotesi, che

$$\int_{E_n} |\ell|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}} \bar{\ell} \ell \chi_{E_n} \, dx = \int_{\mathbb{R}} \ell \varphi_n \, dx \leq c \|\varphi_n\|_2 = c \left(\int_{E_n} \bar{\ell} \ell \, dx \right)^{1/2}$$

e quindi abbiamo provato che $\left(\int_{E_n} \bar{\ell} \ell \, dx \right)^{1/2} \leq c$; cioè

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |\ell|^2 \chi_{E_n} \, dx \right)^{1/2} \leq c.$$

Per il teorema della convergenza monotona, facendo il limite per n tendente a infinito, si ottiene che questo integrale tende a $\left(\int_{\mathbb{R}} |\ell|^2 \, dx \right)^{1/2}$ e quindi abbiamo provato che $\|\ell\|_2 \leq c$. Il lemma è così dimostrato.

Teorema Sia $f(s, t)$ una funzione misurabile tale che l'integrale $\int \|f(\cdot, t)\|_2 \, dt$ esista finito. Allora l'integrale

$$(1.3) \quad \ell(s) = \int f(s, t) \, dt$$

esiste per q.o. s , la funzione ℓ è in $L^2(\mathbb{R})$ e si ha

$$(1.4) \quad \|\ell\|_2 \leq \int \|f(\cdot, t)\|_2 dt.$$

Dimostrazione Scambiando gli ordini di integrazione e usando la disuguaglianza di Schwarz si ha

$$\begin{aligned} \int \left(\int |f(s, t)| dt \right) |\varphi(s)| ds &= \int \left(\int |f(s, t)| |\varphi(s)| ds \right) dt \\ &\leq \int \left(\int |f(s, t)|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int |\varphi(s)|^2 ds \right)^{1/2} dt \\ &\leq \|\varphi\|_2 \int \|f(\cdot, t)\|_2 dt < \infty \end{aligned}$$

Se ne deduce che per quasi ogni s l'integrale in (1.3) che definisce ℓ è finito, e quindi ℓ esiste q.o. Di deduce inoltre che

$$(1.5) \quad \left| \int \ell(s) \varphi(s) ds \right| \leq \int |\ell(s) \varphi(s)| ds \leq \|\varphi\|_2 \int \|f(\cdot, t)\|_2 dt < \infty$$

Questo mostra che ℓ soddisfa entrambe le ipotesi del Lemma. Perciò per ogni $\ell \in L^2$ si ha la (1.4).

Operatore aggiunto di un operatore limitato su spazi di Hilbert

Qui facciamo qualche breve richiamo sull'operatore aggiunto di un operatore limitato su spazi di Hilbert.

Siano H e K due spazi di Hilbert e $T : H \rightarrow K$ un operatore lineare limitato. Allora si prova che esiste un unico operatore lineare limitato $T^* : K \rightarrow H$ tale che

$$(1.6) \quad (Tx, y)_K = (x, T^*y)_H \quad x \in H, \quad y \in K.$$

L'operatore T^* si chiama *operatore aggiunto* di T .

T^* è limitato, infatti usando la disuguaglianza di Schwartz e la limitatezza di T si ha

$$\begin{aligned} \|T^*x\| &= \sup_{\|y\|=1} |(T^*x, y)| = \sup_{\|y\|=1} |(x, Ty)| \leq \sup_{\|y\|=1} \|x\| \|Ty\| = \\ &= \|x\| \sup_{\|y\|=1} \|Ty\| = \|x\| \|T\| \end{aligned}$$

Valgono le seguenti proprietà

- (1) $(T + S)^* = T^* + S^*$
- (2) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$
- (3) $(ST)^* = T^* S^*$

$$(4) (T^*)^* = T$$

$$(5) \|T^*\| = \|T\|, \quad \|T^*T\| = \|T\|^2,$$

La dimostrazione di queste affermazioni è lasciata per esercizio al lettore che allo scopo può consultare le pagine 292-297 del Cap. 12 del libro *Functional Analysis* di W. Rudin, dove questi fatti sono dimostrati nel caso $K = H$.

2. Teorema di Paley-Wiener

Nel Capitolo 2 abbiamo enunciato il Teorema di Paley-Wiener (Teor 5.2) che caratterizza le trasformate di Fourier delle funzioni in L^2 a supporto compatto. Per la dimostrazione di questo teorema rimandiamo a [12, Thm 19.3]. In questa appendice dimostriamo una versione diversa del Teorema di Paley-Wiener (vedi il Teorema 2.2 più sotto), in cui l'ipotesi:

$$(2.1) \quad |F(z)| \leq Ae^{2\pi\tau|z|} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

viene sostituita dall'ipotesi un pò più forte

$$(2.2) \quad |F(z)| \leq Ke^{2\pi\tau|Im(z)|} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Premettiamo un lemma che caratterizza le trasformate di Fourier delle funzioni C_c^∞ .

Lemma 2.1. *i) Sia $f \in C_c^\infty$ una funzione il cui supporto è in $[-\tau, \tau]$. Allora la funzione*

$$(2.3) \quad F(z) = \int f(t)e^{-2\pi izt} dt \quad z \in \mathbb{C}$$

è intera e per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste una costante positiva C_n tale che

$$(2.4) \quad |F(z)| \leq \frac{C_n}{(1+|z|^n)} e^{2\pi\tau|Im(z)|} \quad z \in \mathbb{C}$$

ii) Sia F una funzione intera che soddisfa la (2.4) per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora esiste una funzione $f \in C_c^\infty$ tale che $\hat{f} = F|_{\mathbb{R}}$ e il cui supporto è contenuto in $[-\tau, \tau]$.

Dimostrazione. Sia $f \in C_c^\infty$ avente supporto in $[-\tau, \tau]$. Allora la funzione definita in (2.3) è intera perchè soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann. Si tratta ovviamente di una estensione al campo complesso della trasformata di Fourier di f . Per provare la formula (2.4), osserviamo che, poichè $f \in \mathcal{S}$, vale la proprietà (3.2) per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque

$$(2\pi i\xi)^n \hat{f}(\xi) = \int f^{(n)}(t)e^{-2\pi i\xi t} dt \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Poichè $\hat{f}(\xi) = F(\xi)$, entrambi i membri sono restrizioni ad \mathbb{R} di funzioni olomorfe (per il secondo membro basta usare le condizioni di Cauchy-Riemann), la relazione vale anche in \mathbb{C} , cioè

$$(2\pi iz)^n F(z) = \int f^{(n)}(t)e^{-2\pi izt} dt \quad z \in \mathbb{C}.$$

Maggioriamo, ricordando che la funzione f ha supporto in $[-\tau, \tau]$:

$$\left| (2\pi z)^n F(z) \right| \leq C_n e^{2\pi|Im(z)\tau|} \quad z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}.$$

Da questa relazione si ottiene la (2.4).

ii) Sia F una funzione intera tale che valga la (2.4) per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $F|_{\mathbb{R}}$ è in L^2 , e quindi esiste una funzione $f \in L^2$ tale che $\hat{f} = F|_{\mathbb{R}}$. Inoltre $F|_{\mathbb{R}}$ è in L^1 e quindi vale la formula di inversione (5.8)

$$(2.5) \quad f(x) = \int F(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \quad q.o.x.$$

Poichè $F|_{\mathbb{R}}$ è in L^1 , il secondo membro è una funzione continua e quindi, modificando f su un insieme di misura nulla, possiamo supporre che f sia continua. Per provare che f ha supporto in $[-\tau, \tau]$ usiamo la relazione

$$(2.6) \quad f(x) = \int F(\xi + i\eta) e^{2\pi i(\xi + i\eta)x} d\xi \quad \forall \eta \quad \forall x,$$

la cui verifica è assegnata per esercizio. Sia ora $x > \tau$ e scegliamo $\eta > 0$. Maggioriamo l'integrale in (2.6) utilizzando la (2.4) per $n = 2$. Si ottiene

$$|f(x)| \leq \int C_2(1 + |\xi|^2)^{-1} e^{2\pi\eta(\tau-x)} d\xi < C e^{2\pi\eta(\tau-x)} \quad \forall x \quad \forall \eta > 0$$

dove C è una costante. Facendo tendere η a $+\infty$ si ottiene che $f(x) = 0$. Questo mostra che $f(x)$ è nulla per $x > \tau$; un analogo ragionamento mostra che è nulla anche per $x < -\tau$. \square

Teorema 2.2. *Sia f una funzione di L^2 . Allora f è nulla fuori di $[-\tau, \tau]$ se e solo se la sua trasformata di Fourier è la restrizione ad \mathbb{R} di una funzione F intera tale che*

$$(2.7) \quad |F(z)| \leq K e^{2\pi\tau|\text{Im}(z)|} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

dove K è una costante positiva.

Dimostrazione. La condizione necessaria si prova in maniera del tutto analoga a quella del Teorema 5.2 del Cap.2, perciò proviamo solo la seconda. Sia dunque F una funzione intera la cui restrizione a \mathbb{R} è in L^2 e tale che valga la (2.7) per una costante $K > 0$. Dobbiamo provare che esiste una funzione $f \in L^2$, nulla fuori di $[-\tau, \tau]$ tale che $F|_{\mathbb{R}} = \mathcal{F}f$.

Denotiamo con f l'antitrasformata di Fourier di F ristretta a \mathbb{R} :

$$f = \mathcal{F}^{-1}F.$$

Denotiamo con (φ_ϵ) una identità approssimata in L^1 , tale che $\varphi_\epsilon \in C_c^\infty$ e $\text{supp}(\varphi_\epsilon) \subset [-\epsilon, \epsilon]$. Per il Lemma 2.1, punto i), la funzione

$$\Phi_\epsilon(z) = \int \varphi_\epsilon(t) e^{-2\pi i z t} dt \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

è intera e si ha

$$|\Phi_\epsilon(z)| \leq C_n(1 + |z|^n)^{-1} e^{2\pi\epsilon|\operatorname{Im}(z)|} \quad \forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora per la (2.7) $F\Phi_\epsilon$ è una funzione intera tale che

$$|F(z)\Phi_\epsilon(z)| \leq KC_n(1 + |z|^n)^{-1} e^{2\pi(\tau+\epsilon)|\operatorname{Im}(z)|} \quad \forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ne segue, per il Lemma 2.1, ii), che la restrizione di $F\Phi_\epsilon$ ad \mathbb{R} è la trasformata di una funzione di C_c^∞ che ha supporto in $[-(\tau + \epsilon), \tau + \epsilon]$. Poichè per la (5.15) del Cap. 2 si ha

$$\mathcal{F}^{-1}(F\Phi_\epsilon) = \mathcal{F}^{-1}F * \mathcal{F}^{-1}\Phi_\epsilon = f * \varphi_\epsilon,$$

otteniamo che $\operatorname{supp}(f * \varphi_\epsilon) \subset [-(\tau + \epsilon), \tau + \epsilon]$. Per la Proposizione 5.5 la successione $(f * \varphi_\epsilon)$ tende a f in L^2 . Questo implica che f è nulla fuori di $[-\tau, \tau]$. La verifica di quest'ultima implicazione è lasciata per esercizio. Il teorema è così dimostrato. □

Esercizio Provare il seguente enunciato:

Sia (f_n) una successione in C_c^∞ tale che $\operatorname{supp}f_n \subset [-\tau - 1/n, \tau + 1/n]$ e $\lim f_n = f$ in L^2 . Allora f è nulla quasi ovunque nel complementare di $[-\tau, \tau]$.

Dimostrazione Scegliamo un rappresentante di f definito ovunque. Passando eventualmente ad una estratta possiamo supporre che f_n converge quasi ovunque ad f . Sia E l'insieme (ovviamente di misura nulla) in cui f_n non converge ad f .

Sia ora $x \notin E$ tale che $|x| > \tau$ allora

$$f(x) = \lim f_n(x) = 0$$

perchè se n è abbastanza grande x è fuori dal supporto di f_n . Questo prova che

$$\{x : |x| > \tau, f(x) \neq 0\} \subset E.$$

Poichè E ha misura nulla la tesi segue subito.

Osservazione Si noti che entrambi i teoremi forniscono una caratterizzazione dello stesso spazio funzionale. Se ne deduce che una funzione intera la cui restrizione a \mathbb{R} è in L^2 , soddisfa la (2.1) se e solo se soddisfa la (2.7).

Indice

I Serie di Fourier	3
1 . Serie di Fourier di funzioni di quadrato integrabile	4
2 . Serie di Fourier di funzioni assolutamente integrabili	9
3 . Convergenza puntuale	21
4 . Altri risultati di convergenza puntuale.	26
5 . La temperatura della terra.	34
6 . Il problema del calore in un disco isolato.	39
7 . Il problema del calore su un filo circolare.	43
8 . Note	47
9 . Esercizi. Serie di Fourier in $L^2_{2\pi}$ e $L^1_{2\pi}$	49
10 . Esercizi. Convergenza puntuale e applicazioni	53
II Integrale di Fourier	57
1 . Notazioni e richiami.	59
2 . Convoluzione e identità approssimate.	65
3 . La trasformata di Fourier di funzioni di L^1	70
4 . Formula di Poisson.	79
5 . La trasformata di Fourier in L^2	83
6 . Il teorema del campionamento.	92
7 . Note	99
8 . Esercizi. Trasformata di Fourier in L^1	100
9 . Esercizi. Trasformata di Fourier in L^2	105
10 . Esercizi. Teorema del campionamento	107
III Calcolo numerico della trasformata di Fourier.	109
1 . La trasformata di Fourier discreta	110
2 . Le proprietà della DFT	115
3 . La Fast Fourier Transform	117
4 . La trasformata coseno e la DCT	120
5 . Note	127
6 . Esercizi. Trasformata di Fourier Discreta	128
7 . Esercitazioni	129
IV L'analisi in tempo frequenza e la trasformata di Gabor	135
1 . La trasformata di Gabor	138
2 . Esercitazioni	147
V Appendice	149
1 . Disuguaglianza integrale di Minkowski	149
2 . Teorema di Paley-Wiener	152

Bibliografia

- [1] E. O. Brigham, *The Fast Fourier Transform*, Prentice Hall Englewood Cliffs, Boston, 1974.
- [2] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variable complexes*, Hermann, Paris, 1960.
- [3] H. Dym - H. P. Mc Kean, *Fourier Series and Integrals*, Academic Press, 1972.
- [4] R.E. Edwards, *Fourier Series. A modern Introduction, Volume I* Springer-Verlag, 1979.
- [5] G.B. Folland, *Fourier analysis and its applications*, Brooks/Cole Publishing Co., 1992.
- [6] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, Dover Publications, New York, 1968.
- [7] I. Korner, *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 1988.
- [8] I. Korner, *Exercises for Fourier Analysis*, 1995.
- [9] E. Prestini, *Applicazioni dell'Analisi Armonica*. U.Hoepli, Milano, 1996.
- [10] E. Prestini, *The Evolution of Applied Harmonic Analysis. Models of the Real World Series*, A Birkhäuser 2004.
- [11] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, 1973.
- [12] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, 1974.
- [13] E.M. Stein, G. Weiss, *Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, Princeton, 1971.