

**Calcolo differenziale ed integrale.**  
**Prima prova. Novembre 2003**

**Esercizio 1.** È data la funzione

$$(1) \quad f(x) = 2^{\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)}$$

- [a] Scrivere l'insieme di definizione  $D$ .
- [b] Calcolare i limiti agli estremi di  $D$ .
- [c] Disegnare approssimativamente il grafico della funzione.
- [d] Trovare il più grande intervallo aperto  $I$  in cui la funzione è strettamente crescente.
- [e] Dopo aver spiegato perchè esiste l'inversa in  $I$ , tracciarne il grafico.
- [f] Trovare l'espressione dell'inversa.

**Esercizio 2.** Sia  $f$  la funzione (1) del precedente esercizio. Trovare gli eventuali zeri positivi della funzione  $g(x) = f(x) - x$

**Esercizio 3.** Sia  $f$  la funzione (1) del precedente esercizio. Trovare limite della successione  $\{f(a_n)\}$ , dove  $a_n = \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^6}$ .

**Esercizio 4.** Siano  $f$  e  $g$  due funzioni tali che  $|f(x)| \leq |g(x)|$  e che  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = 3$ ,

- [a] cosa possiamo dire sul limite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ?
- [b] cosa possiamo dire sul limite  $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ ?

*Giustificare tutte le risposte*

**Esercizio 5.** Stabilire se le seguenti successioni hanno limite oppure no, in caso positivo trovare il limite

$$[a] \quad \left\{ \frac{1 - 2n^2}{3n^2 + n + 1} \right\}$$

$$[b] \quad \left\{ \frac{\cos(n)}{n} \right\}$$

**Esercizio 6.** Calcolare i limiti

$$[a] \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) + x^2}{\tan(x)}$$

$$[b] \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + x^3 + \log(x)}{x^3 + \frac{1}{x}}$$

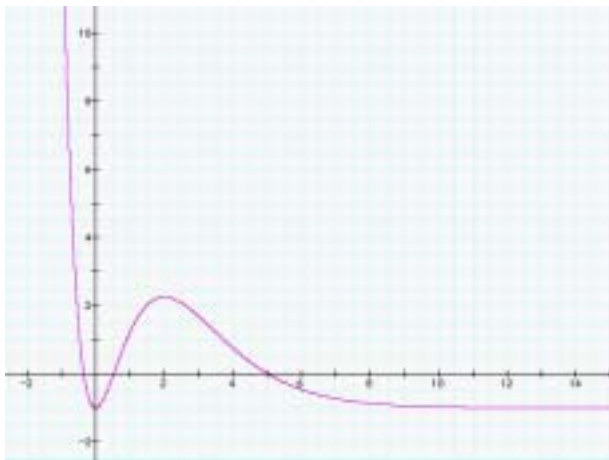
**Esercizio 7.** Se  $f(x) = 2x^2 + 3$ , allora  $f(f(a))$  è

- [a]  $2a^2 + 3$       [b]  $2(2a^2 + 3)^2 + 3$       [c]  $(2a^2 + 3)^2$       [d]  $a$       [e] nessuno degli altri.

**Esercizio 8.** Siano  $h(x) = 7x^3$ ,  $g(x) = 3x$ , e  $f(x) = x + 1$ : allora  $h(g(f(0)))$  è

- [a] 11      [b] 21      [c] 7      [d] 189      [e] nessuno degli altri.

**Esercizio 9.** Sia  $f$  la funzione il cui grafico è in Figura 1. Disegnare il grafico di  $|f(x + 2) - 3|$



**Figura 1**