

## Calcolo differenziale ed integrale

### Un modello per la temperatura della terra in profondità.

Nell'isola di Orust, in Svezia, si deve costruire una cantina per immagazinare del vino. Se chiediamo ad un enologo a che profondità va costruita ci risponde che per conservare il vino in maniera ottimale sarebbe auspicabile che nella cantina vi fosse caldo d'inverno e freddo d'estate. Inoltre che la temperatura non subisca grosse variazioni nell'arco dell'anno.

*Creazione del modello.* Il problema della diffusione del calore in un corpo è studiato in fisica matematica: le leggi della fisica che governano la diffusione del calore in un corpo conducono a una equazione differenziale, detta *equazione del calore*, che è possibile risolvere con calcoli complicati se si conosce la temperatura sulla superficie del corpo..

*La temperatura di un punto in superficie.* La temperatura di un punto della terra varia in funzione del tempo e grosso modo si può pensare che il suo andamento si ripeta periodicamente anno dopo anno. È ragionevole pensare quindi ad un modello espresso da una funzione di periodo 1 (un anno). Si può pensare ad esempio ad una funzione seno: denotando con  $t$  il tempo,  $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  (intervallo che rappresenta l'anno) il valore della funzione

$$(1) \quad u_o(t) = 20 \sin(2\pi t)$$

esprime la temperatura, in gradi, al tempo  $t$  in un punto della superficie (vedi Figura 1).

*La temperatura di un punto in profondità.* Come cambia la temperatura in profondità? Denotiamo con  $x$  la profondità, in metri. Ci aspettiamo che, al crescere del parametro  $x$ , l'escursione termica annua, cioè la differenza tra le temperature massima e minima annuali, diminuisca. Inoltre ci aspettiamo anche che i massimi e i minimi si manifestino con un certo ritardo rispetto alla superficie. Risolvendo l'equazione del calore i fisici matematici hanno trovato che la temperatura alla profondità  $x$  è

$$(2) \quad u_x(t) = 20 e^{-0.32x} \sin(2\pi t - 0.32x).$$

La Figura 2 mostra l'andamento di questa funzione alle profondità  $x = 0, 0.5, 1, \dots$  fino a 4 metri.

- [1] Tracciare i grafici della funzione  $u_x(t), t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  alle profondità  $x = 0, 0.5, 1, \dots, 4$  su uno stesso sistema cartesiano. Usare *gnuplot*.
- [2] Sai spiegare quali trasformazioni sulla funzione (1) conducono alla funzione  $u_x$  (2) ?
- [3] A quale profondità 'si invertono completamente le stagioni'? Cioè a quale profondità la temperatura è sopra lo zero d'inverno e sotto lo zero d'estate?

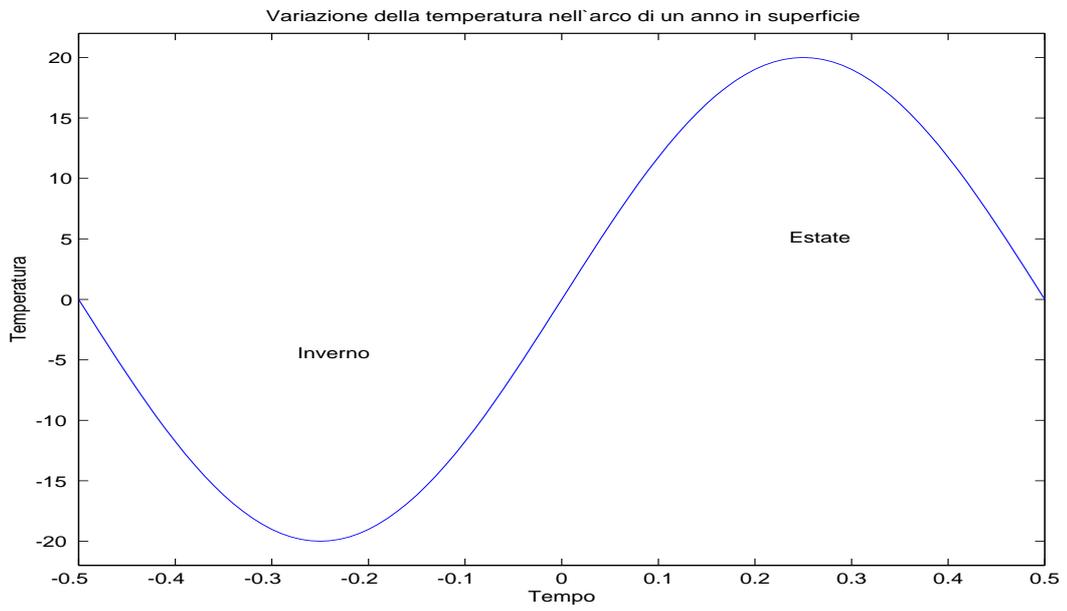


Figura 1

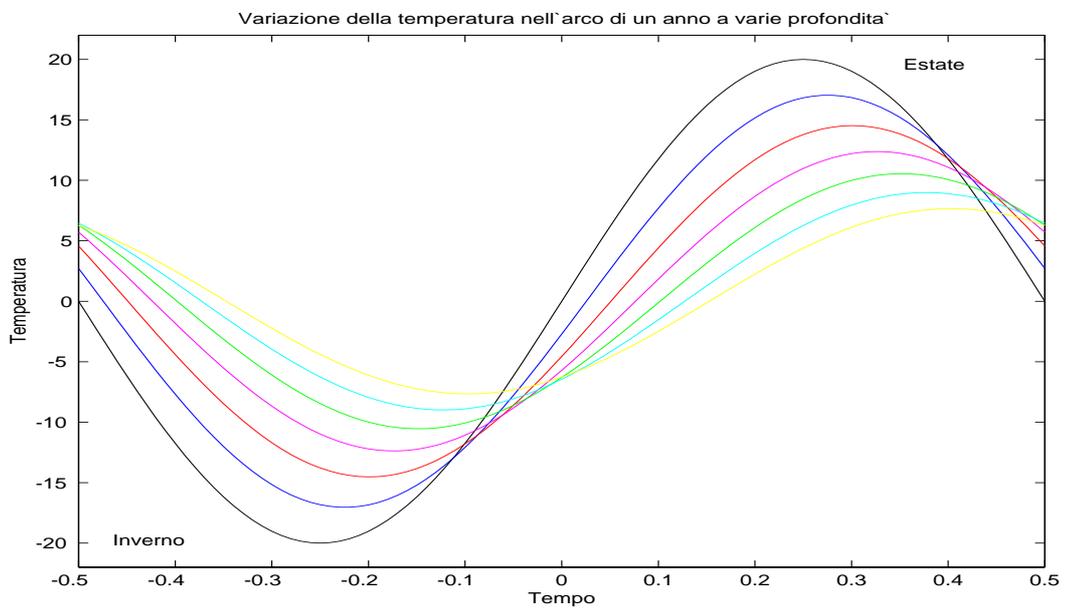


Figura 2