## 4. Limiti

**4.1** Discutere le affermazioni a) e b), cioè: dire se sono vere o false, se sono vere dimostrare, se sono false fare un controesempio.

**[a]** Una funzione limitata ammette sempre limite finito in ogni punto.

**[b]** Una funzione che ammette limite finito in ogni punto è limitata.

**4.2** Provare che $\lim_{x\to x_o} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to x_o} |f(x)| = 0.$

**4.3** Provare che

$$\lim_{x\to 0} f(x) = l \iff \lim_{x\to c} f(x-c) = l$$

**4.4** Usando le formule di prostaferesi, il limite $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$, il precedente esercizio e le proprietà dei limiti, provare che

$$\lim_{x\to c} \sin(x) = \sin(c).$$

Usare la stessa tecnica per provare che $\lim_{x\to c} \cos(x) = \cos(c)$.

**4.5** Calcolare i limiti destro e sinistro nel punto 2 della funzione $f(x) + g(x)$ dove

$$f(x) = \begin{cases} |x-1| - 1 & \text{se } 0 \le x \le 2 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x-3 & \text{if } x < 2 \\ 3 & \text{se } x = 2 \\ x+3 & \text{se } x > 2, \end{cases}$$

**4.6** Usando la definizione di limite e il fatto che il limite della funzione seno in zero è zero, provare che

$$\lim_{x\to+\infty} \sin(\frac{1}{x}) = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \sin(\frac{1}{x}) = 0$$

**4.7** Illustrare il teorema della permanenza del segno con un esempio in cui $l = -\infty$ e $x_o \in \mathbf{R}$, e uno in cui $x_o = +\infty$ e $l = 2$.

**4.8** Calcolare i limiti a $+\infty$ e a $-\infty$ delle tre seguenti funzioni razionali

$$\frac{3x-1}{2x+1}, \qquad \frac{3x^2-1}{2x+1}, \qquad \frac{3x-1}{2x^2+1}.$$

*Sugg.* In ciascuno dei polinomi, raccogliere a fattore i termini di grado massimo.

**4.9** Usando la definizione di limite calcolare

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3}.$$

Cosa si può dire se sostituiamo l'esponente 3 con un qualunque numero dispari?

**4.10** Calcolare i limiti

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin(\frac{1}{|x|})+x^3), \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}.$$

**4.11** Calcolare il limite in zero di una funzione $f$ sapendo che nell'intervallo $(-.5,.5)$ si ha

$$|f(x)|\le \sin^2(x)+x^4.$$

**4.12** Provare che

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\operatorname{tg}(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\operatorname{tg}(x)=+\infty.$$

**4.13** Usando la tecnica del cambiamento di variabili, calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}, \qquad \lim_{x\to 0}2^{\sin(x)}.$$

**4.14** Stimare la funzione $f(x)=x^3\sin(x)$ nell'intervallo $[-.1,.1]$.

**4.15** Stimare la funzione $g(x)=2^{-x}x^4$ nell'intervallo $[-.5,.5]$.

**4.16** Stimare la funzione $f(x)=x^4\ e^x\cos(\frac{x}{2})$ nell'intervallo $[-.2,.2]$.

**4.17** Stimare la funzione $g(x)=(1-x^2)\cos(x)$ in $[0,0.1]$.