Soluzioni di alcune prove

Prima prova intercorso. A.A. 2001-2002 Compito A

Esercizio 1 La risposta giusta è la [**c**]

Esercizio 2 La risposta giusta è la [**d**]

Esercizio 3 Il grafici richiesti sono nelle Figure 2, 3,4,5.

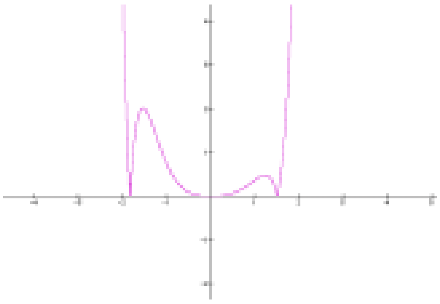

Figura 2: $|f(x)|$

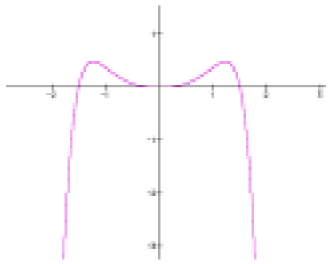

Figura 3: $f(|x|)$

Figura 4: $f(-x)$

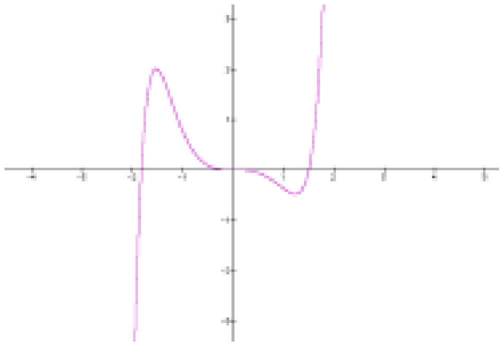

Figura 5: $-f(x)$

Esercizio 4 Le derivate delle funzioni f e g sono

$$f'(x) = \frac{1}{2^x - 3} 2^x \log(2) \qquad g'(x) = 2x \frac{\cos(x^2-1)(\cos(x^2)+2) + \sin(x^2-1)\sin(x^2)}{(\cos(x^2)+2)^2}.$$

Esercizio 5 L' equazione $x^2y^2 - 1 + x^2 = 0$ si può risolvere rispetto a y. Per $x \neq 0$ si ha

$$y^2 = \frac{1}{x^2} - 1$$

Da qui si ottiene, facendo la radice quadrata di entrambi i membri,

$$y = \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \qquad y = -\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}$$

Ciascuna di queste equazioni definisce una funzione, definita solo per $|x| \leq 1$ $x \neq 0$. Siano g_1 e g_2 le due funzioni, nell'ordine.

Il grafico della funzione g_1 è in Figura 6. Il grafico di g_2 è il simmetrico di quello di g_1 rispetto all'asse delle ascisse.
Il grafico dell'equazione data è l'unione dei grafici delle due funzioni g_1 e g_2. Non è il grafico di una funzione perchè rette parallele all'asse delle ordinate attraversano il graficoin più di un punto.

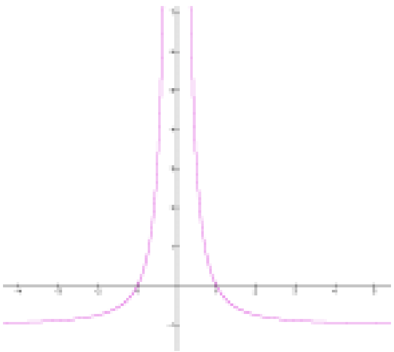

Figura 6: $\frac{1}{x^2} - 1$

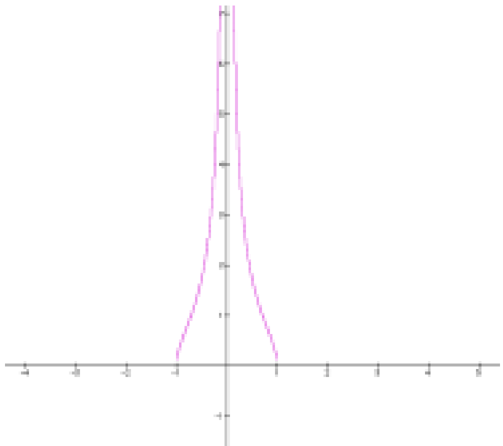

Figura 7: $\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}$

Esercizio 6 Il grafico della funzioni $f(x) = \log(x) + x^2$ si trova in Figura 8.

Esercizio 7 La funzione

$$y = \frac{1 + e^{2x}}{1 - e^{2x}}$$

è definita in dappertutto tranne che nell'origine. In zero tende a $+\infty$ da sinistra e a $-\infty$ da destra. Tende a -1 per $x \to +\infty$, tende a 1 per $x \to -\infty$. Il suo grafico è in Figura 9.
Ha inversa in D perchè è iniettiva. Poiché l'immagine di f è $J = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ l'inversa f^{-1} sarà definita in J. La sua espressione è

$$\frac{1}{2} \log(\frac{y-1}{y+1})$$

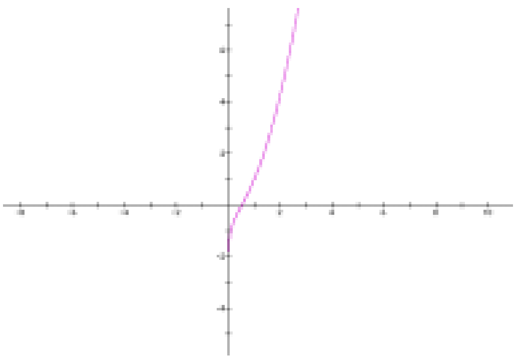

Figura 8: $\log(x) + x^2$

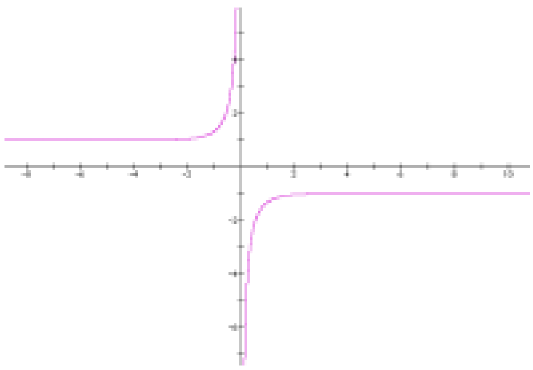

Figura 9: $\frac{1+e^{2x}}{1-e^{2x}}$

Prima prova intercorso. A.A. 2002-2003 Compito A

Esercizio 1

[a] Non è vero che una funzione dispari è sempre invertibile. Per esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

non è invertibile, perchè non è iniettiva.

[b] Una funzione strettamente crescente è sempre invertibile perchè è iniettiva.

Esercizio 2 Ricordiamo la disuguaglianza

$$0 \leq |\sin(x)| \leq |x| \tag{1}$$

Dalla formula di prostaferesi

$$\sin(x) - \sin(c) = 2\sin\left(\frac{x-c}{2}\right)\cos\left(\frac{x+c}{2}\right),$$

maggiorando il coseno con 1, e usando la disuguaglianza (1), si ottiene

$$0 \leq |\sin(x) - \sin(c)| \leq 2\left|\sin\left(\frac{x-c}{2}\right)\right| \leq |x-c|$$

per il teorema dei carabinieri si ottiene la tesi.

Esercizio 3 I grafici sono in Figura 1 e in Figura 2.

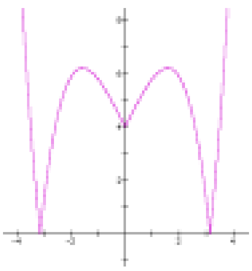

Figura 1: $|f(-|x|)|$

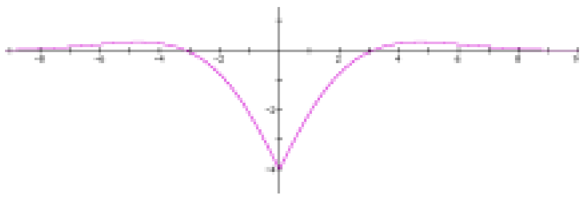

Figura 2: $-f(|x|)$

Esercizio 4 Il grafico dell'equazione $y^2 - 2 = (x-1)^3$ è in Figura 3. Non è il grafico di una funzione perchè ci sono valori di x che hanno per corrispondenti due valori diversi (per esempio $x = 0$ e $y = 1, y = -1$. Però si può spezzare in due parti: quella formata dalle coppie (x, y) in cui $y \in (-\infty, 0)$ e quella in cui $y \in [0, +\infty)$. Ciascuna di queste è il grafico di una funzione, rispettivamente

$$y = -\sqrt{2 + (x-1)^3} \qquad \text{e} \qquad y = \sqrt{2 + (x-1)^3}.$$

Il grafico della seconda funzione è in Figura 4.

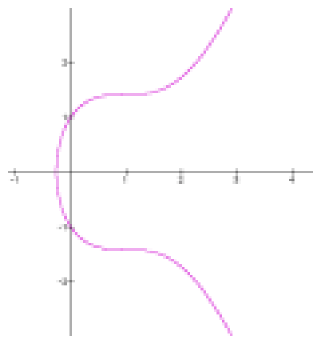

Figura 3: Grafico eq. $y^2-2=(x-1)^3$

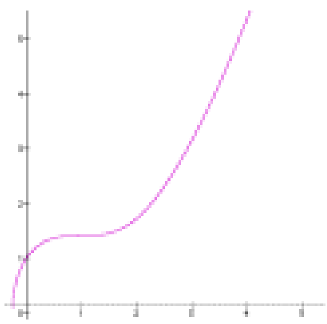

Figura 4: Grafico fun. $y=\sqrt{2+(x-1)^3}$

Esercizio 5 La funzione $f(x)=\frac{\pi}{2}-\text{arctg}(x^2)$ è definita, continua e derivabile in tutto $\mathbf{R}$ perchè composta mediante le funzioni $g(x)=x^2$ e $h(y)=\frac{\pi}{2}-\text{arctg}(y)$, che sono definite continue e derivabili in tutto $\mathbf{R}$. È pari. Tende a zero per $x\to-\infty$ e $x\to+\infty$.
Poiché la funzione $\frac{\pi}{2}-\text{arctg}(y)$ è decrescente, e la funzione x^2 decresce a sinistra di zero e cresce a destra di zero, la composta è crescente in $(-\infty,0)$ ed è decrescente in $[0,+\infty)$. Il grafico è in Figura 5.
L'inversa della restrizione all'intervallo $[0,+\infty)$ è definita nell'intervallo $(0,\frac{\pi}{2}]$ e ha immagine $[0,+\infty)$.
Troviamone l'espressione: da $y=\frac{\pi}{2}-\text{arctg}(x^2)$ si ottiene,

$$x^2=\text{tg}(\frac{\pi}{2}-\text{y})$$

Il secondo membro è ≥ 0 perchè l'argomento della tangente è in $(0,\frac{\pi}{2}]$, dove la tangente è positiva. Facendo la radice si trova

$$|x|=\sqrt{\text{tg}(\frac{\pi}{2}-\text{y})}. \tag{1}$$

Poichè stiamo cercando l'inversa che assume valori nell'intervallo $[0,+\infty)$, x deve essere positivo, quindi $|x|=x$ e quindi l'inversa è

$$x=\sqrt{\text{tg}(\frac{\pi}{2}-\text{y})}. \tag{2}$$

Il grafico di questa funzione (in $(0,\frac{\pi}{2}]$) è in Figura 6. Si noti la simmetria, rispetto alla bisettrice, con la funzione che abbiamo invertito.
Se si sceglie invece, come funzione da invertire, la restrizione all'intervallo $(-\infty,0]$ si ottiene pure una funzione definita nell'intervallo $(0,\frac{\pi}{2}]$ ma con immagine in $(-\infty,0]$. Poichè $x\leq 0$, si ha $|x|=-x$ e quindi da (1) si ottiene

$$x=-\sqrt{\text{tg}(\frac{\pi}{2}-\text{y})}.$$

Esercizio 6 Detta f la prima funzione e g la seconda si ha che le derivate sono

$$f'(x)=\frac{2x(x^4+2x^2-1)}{(x^4+1)(x^2+1)} \qquad g'(x)=(1+x^2)^{x^2}2x\Big(\log(1+x^2)+\frac{x^2}{1+x^2}\Big).$$

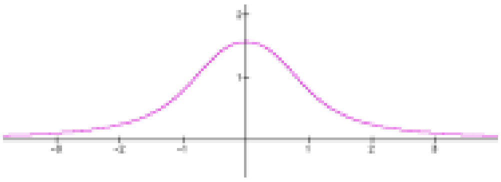

Figura 5: Grafico fun. $\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}(x^2)$

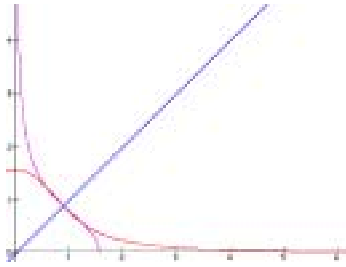

Figura 6:Grafico della funzione e dell'inversa.

Prima prova intercorso. A.A. 2002-2003 Compito B

Esercizio 1

[**a**] Una funzione pari non è mai invertibile perchè non è iniettiva: nei punti simmetrici rispetto all'origine la funzione assume valori uguali.

[**b**] È vero che una funzione strettamente decrescente è sempre invertibile perchè se è strettamente decrescente è iniettiva.

Esercizio 2 I grafici sono in Figura 1 e Figura 2.

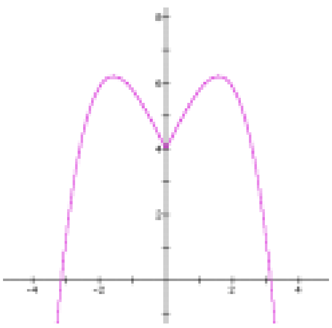

Figura 1: $f(-|x|)$

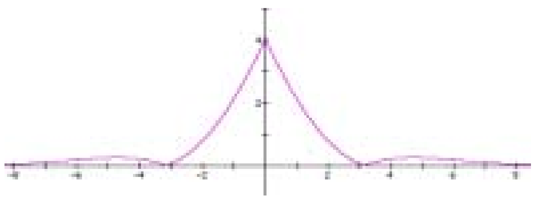

Figura 2:$|f(|x|)|$

Esercizio 3 Il grafico dell'equazione $1 - y^2 = (2 + x)^3$ è in Figura 3. Non è il grafico di una funzione perchè ci sono valori di x che hanno per corrispondenti due valori diversi di y. Però si può spezzare in due parti: quella formata dalle coppie (x, y) in cui $y \in (-\infty, 0)$ e quella in cui $y \in [0, +\infty)$. Ciascuna di queste è il grafico di una funzione, rispettivamente

$$y = -\sqrt{1 - (2 + x)^3} \qquad \text{e} \qquad y = \sqrt{1 - (2 + x)^3}.$$

Il grafico della seconda funzione è in Figura 4.

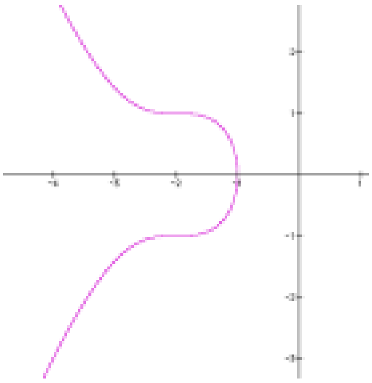

Figura 3: Grafico eq. $1-y^2=(2+x)^3$.

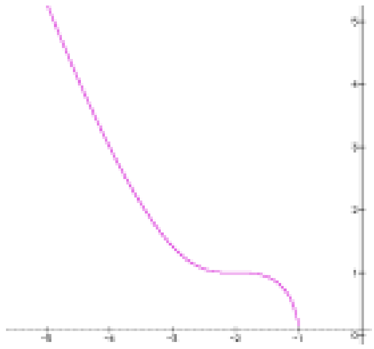

Figura 4: Grafico funzione $y=\sqrt{1-(2+x)^3}$

Esercizio 4 Il grafico della funzione è in Figura 5. L'esercizio è molto simile a quello del compito A. La funzione inversa della restrizione di f a $[0,+\infty)$ è definita in $(\pi, \pi+\frac{\pi}{2})$ ed ha immagine $[0,+\infty)$. La sua espressione è $x=\sqrt[4]{\operatorname{tg}(y-\pi)}$. Il grafico della funzzione e della sua inversa sono in Figura 6. Si noti la simmetria, rispetto alla bisettrice, con la funzione che abbiamo invertito.

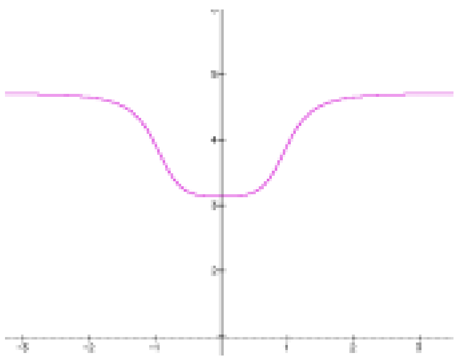

Figura 5: Grafico funzione $\operatorname{arctg}(x^4)+\pi$.

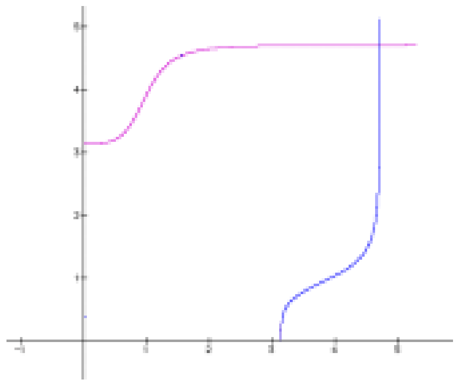

Figura 6: Grafico della funzione e dell'inversa

Esercizio 5 Denotando con f la prima funzione e g la seconda si ha che le derivate sono

$$f'(x)=\frac{1}{1+(\frac{x^2+1}{x^4+1})^2}\ \frac{-2x^5-4x^3+2x}{(x^4+1)^2\ +(x^2+1)^2} \qquad g'(x)=(1+x^4)^x\left(\log(1+x^4)+\frac{4x^4}{1+x^4}\right).$$

Seconda esercitazione guidata. A.A. 2002-2003

Esercizio 1 La funzione è definita in $\mathbf{R}-\{-1,+1\}$. È dispari, quindi possiamo limitarci a studiarla negli intervalli $[0,1)\cup(1,\ +\infty)$. I limiti agli estremi dell'insieme di definizione sono :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad\qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = 0 \qquad\qquad \lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$$

La derivata prima è $f'(x) = e^{\frac{1}{1-x}}\ \dfrac{x^2-x+1}{(1-x)^2}$ per $x\in[0,1)\cup(1,\ +\infty)$. Quindi la funzione è crescente in ciascuno degli intervalli $[0,1)$ e $(1,\ +\infty)$. La derivata seconda è

$$f''(x) = e^{\frac{1}{1-x}}\frac{2-x}{(1-x)^4},$$

$x\in[0,1)\cup(1,\ +\infty)$. Quindi la concavità è rivolta verso l'alto in $[0,1)\cup(1,2)$, mentre in $(2,+\infty)$ è rivolta verso il basso.
Ricerca degli asintoti (non richiesta): abbiamo visto che $x=1$ è un asintoto verticale sinistro. Si trova che$y=x-1$è un asintoto obliquo a $+\infty$. Infatti

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{1-x}} = 1$$

Così si è trovato il coefficiente angolare dell'asintoto. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{1-x}}-1\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1-x}\quad\frac{e^{\frac{1}{1-x}}-1}{\frac{1}{1-x}}. \tag{1}$$

Poichè

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{1-x}}-1}{\frac{1}{1-x}} = \lim_{z\to0}\frac{e^z-1}{z} = 1$$

il limite in (1) è uguale a -1. Il grafico è in Figura 1, l'immagine della Figura 2 è uno zoom della precedente.

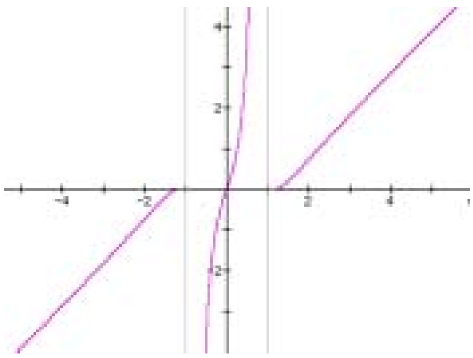

Figura 1: $xe^{\frac{1}{1-|x|}}$

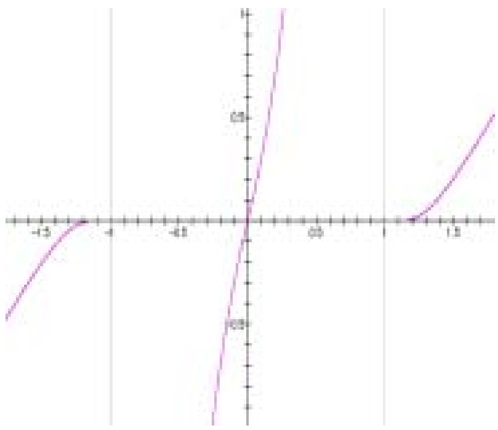

Figura 2: Zoom

Esercizio 2 Il polinomio è $T(x) = -\frac{1}{2}x^2$, infatti $f(0) = f'(0) = f'''(0) = 0$, mentre $f''(0) = -1$. Stimiamo il resto R_4 in $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Poiché

$$f^{(4)}(x) = -2\frac{1 + 2\sin(x)^2}{\cos(x)^4}$$

si ha

$$|R_4| \leq 2\left|\frac{1 + 2\sin^2(c)}{\cos^4(c)} \quad \frac{x^4}{4!}\right|,$$

dove c sta fra 0 e x. Dunque maggiorando la funzione seno con il massimo assunto nell'intervallo e minorando la funzione coseno con il minimo assunto nell'intervallo, in $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ si ha

$$|R_4| \leq \ 2\ \frac{1 + 2\sin^2(\frac{\pi}{4})^2}{\cos^4(\frac{\pi}{4})} \left(\frac{\pi}{4}\right)^4 \frac{1}{4!} = \frac{1}{16}\frac{\pi^4}{4!} < 0.1269.$$

Esercizio 3 Operando la sostituzione $u = \cos(x)$ l'integrale si trasforma così

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)(\cos(x)^2 - 5\cos(x) + 6)}\mathrm{dx} \ = \ \left[\int -\frac{1}{u(u^2 - 5u + 6)}du\right]_{u=\cos(x)} . \tag{2}$$

Per calcolare l'integrale a secondo membro decomponiamo in fratti semplici l'integranda, si trova che

$$\frac{-1}{u(u^2 - 5u + 6)} = \frac{-1}{6u} + \frac{1}{2(u-2)} + \frac{-1}{3(u-3)}$$

quindi l'integrale assegnato è uguale a

$$-\frac{1}{6}\log|\cos(x)| + \frac{1}{2}\log|\cos(x) - 2| - \frac{1}{3}\log|\cos(x) - 3| + c.$$

Esercizio 4 Le derivate prime sono

$$f_x(x,y) = 2xy\ e^{y^2+x^2y} \qquad\qquad f_y(x,y) = (2y + x^2)\ e^{y^2+x^2y}$$

Scrivendo il sistema che annulla entrambe le derivate si trova che l'unico punto critico è l'origine. L'Hessiano in $(0,0)$ è zero, questo non ci permette di concludere. Allora studiamo la funzione in un intorno dell' origine. Il valore della funzione nell'origine è 1. La funzione sarà maggiore o minore di 1 dove l'esponente è maggiore o minore di zero 1. Studiando l'esponente si trova che il suo segno è positivo nella parte del piano $D = \{(x,y) : y > 0 \ \text{ oppure } \ y < -x^2\}$, come in Figura 3. Quindi si tratta di un punto sella. Vedi Figura 4.

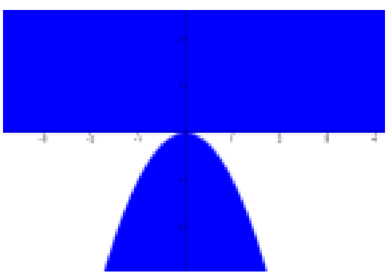

Figura 3: Parte D del piano

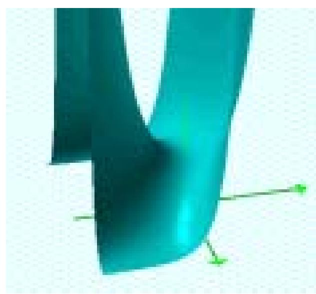

Figura 4: Punto sella

Esercizio 5 Vedi Figura 5.

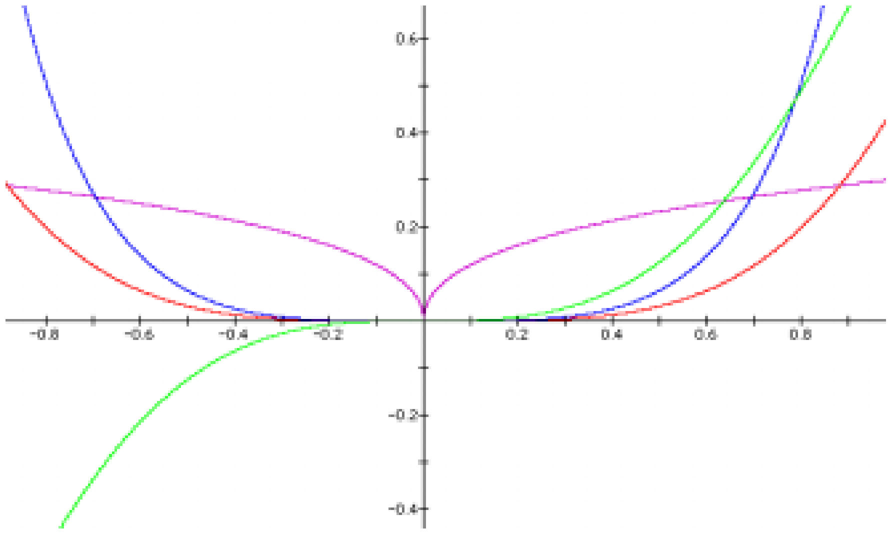

Figura 5