

Controllo sulla comprensione dei concetti

Rispondere alle seguenti domande. Le risposte alle domande del tipo: "è vero che ..." devono essere motivate.

1. I numeri reali, massimo e minimo, estremi superiore e inferiore.

C 1.1 Cosa è un numero reale?

C 1.2 Quando due numeri si dicono primi fra loro?

C 1.3 È vero che due numeri primi fra loro sono anche primi?

C 1.4 Sai mostrare che la differenza e il prodotto fra due numeri razionali è ancora un numero razionale?

C 1.5 Come si definisce la radice aritmetica di 5? Descrivere la procedura per ottenere delle approssimazioni per difetto e per eccesso di questo numero.

C 1.6 Quando un insieme si dice limitato superiormente? È vero che ogni insieme limitato superiormente ha massimo?

C 1.7 Come si definisce il valore assoluto di un numero reale?

2. Grafico di una equazione, grafico di una funzione, funzione composta.

C 2.1 Dire che cosa è una funzione. Dire che cosa è il grafico di una equazione. Come si può capire se si tratta del grafico di una funzione?

C 2.2 Quando una funzione si dice limitata? Fare un esempio e un controesempio.

C 2.3 Fare un esempio di funzione pari, uno di funzione dispari e uno di funzione né pari né dispari.

C 2.4 Fare un esempio di funzione lineare, uno di funzione quadratica, uno di funzione razionale, uno di funzione esponenziale uno di funzione potenza.

C 2.5 Come si definisce la composizione $f \circ g$? Quale è il suo insieme di definizione? Fare due esempi.

C 2.6 Definire le operazioni di traslazione e di contrazione su una funzione. Fare due esempi.

3. Funzione composta, funzione inversa.

C 3.1 Che cosa vuol dire fare la composizione di due funzioni? È una operazione sempre possibile?

C 3.2 Cosa significa la scrittura 2^π ?

- C 3.3 Quando una funzione si dice invertibile?
- C 3.4 Cosa sono le equazioni di cancellazione?
- C 3.5 Che relazione c'è fra il grafico di una funzione e quello della sua inversa?

4. Limiti.

- C 4.1 Spiegare il legame fra il "problema della tangente" e il "problema della velocità istantanea".
- C 4.2 Cosa vuol dire $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$?
- C 4.3 Cosa vuol dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$?
- C 4.4 Come differisce il comportamento in zero delle funzioni $\frac{\sin(x)}{x}$ e $\sin \frac{1}{x}$?
- C 4.5 Sai provare che il limite della funzione seno in zero è zero?
- C 4.6 Sai provare che la funzione $\sin(x)$ è continua?
- C 4.7 Sai provare che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$?
- C 4.8 Sai descrivere la tecnica del cambiamento di variabili per il calcolo dei limiti?

5. Successioni.

- C 5.1 Cosa è una successione?
- C 5.2 Fai un esempio di successione convergente a 1, uno di successione convergente a 0 e uno di successione divergente a $+\infty$.
- C 5.3 Cosa vuol dire che $\{a_n\}$ è limitata? Fai un esempio. È vero che una successione limitata ammette sempre limite? Se si provalo, se no, fai un controesempio.
È vero che una successione convergente è sempre limitata?
- C 5.4 È vero che la successione $\{n - 10\sqrt{n}\}$ è definitivamente positiva?
- C 5.5 È vero che la successione $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ è definitivamente minore di 10^{-100} ?
- C 5.6 Cosa è il numero di Nepero e ?
- C 5.7 Enuncia almeno un criterio di convergenza per le successioni.
- C 5.8 Come proveresti che il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ non esiste?
- C 5.9 Descrivi il comportamento della successione $\{a^n\}$ al variare di $a \in \mathbf{R}$.
- C 5.10 Sai provare che $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$ partendo dal limite $\lim_n a^{\frac{1}{n}} = 1$?
- C 5.11 Sai provare che la funzione a^x è continua partendo dal limite $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$?

6. Proprietà globali delle funzioni continue. Funzione inversa.

C 6.1 Sai spiegare l'importanza del teorema che stabilisce che l'immagine di una funzione continua su un intervallo è un intervallo?

C 6.2 Sai provare il teorema dei valori intermedi?

C 6.3 Quando una funzione f si dice invertibile in un intervallo $[a, b]$?

C 6.4 Sai mostrare che la funzione $\operatorname{tg}(x)$ è invertibile nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e che l'insieme di definizione dell'inversa è \mathbf{R} ? Come si chiama tale inversa? Disegnarne il grafico.

C 6.5 Scelta almeno una delle funzioni

$$\arcsen(x), \quad \arccos(x), \quad \operatorname{arctg}(x), \quad \log(x), \quad \sqrt{x}$$

dire come è stata definita, quale è il suo insieme di definizione e quale la sua immagine. mostrare che è continua e strettamente monotona.

C 6.6 Fai tre esempi in cui il teorema di Weierstrass non vale.

C 6.7 Uno degli gli esercizi del foglio 6 generalizza il teorema degli zeri a funzioni definite su bfR . Sai dire quale?

7. Limiti notevoli. Infiniti e infinitesimi.

C 7.1 Sai provare i limiti notevoli?

C 7.2 Cosa vuol dire che la funzione f è asintotica alla funzione g in x_o ?

C 7.3 Cosa vuol dire che la funzione f è un infinitesimo di ordine superiore (inferiore) alla funzione g in x_o ?

C 7.4 Cosa vuol dire che f e g sono asintotiche in 0 ?

C 7.5 Cosa vuol dire che in x_o f è un infinitesimo di ordine superiore a g ? Fai un esempio.

C 7.6 Sai illustrare la regola di eliminazione dei termini trascurabili con un esempio?

C 7.7 Fai due esempi di successione infinitesime e due di successioni infinite.

C 7.8 Cosa vuol dire che due successioni sono asintotiche?

8. Derivata.

C 8.1 Definisci la derivata di una funzione in un punto e danne l'interpretazione geometrica.

C 8.2 Mostra la formula di derivazione della potenza di una funzione usando il procedimento di induzione.

C 8.3 Quando una funzione composta è derivabile in un punto? Sai fare un esempio?

C 8.4 Sai ricavare la formula della derivata della funzione inversa usando l'equazione di cancellazione?

C 8.5 Sai dare una giustificazione geometrica della formula di derivazione della funzione inversa?

C 8.6 Ripeti la dimostrazione della Proposizione 4 nel caso in cui la funzione è decrescente.

C 8.7 Sai dare la definizione di minimo relativo? Quale è la differenza fra i concetti di “ minimo relativo ” e “minimo assoluto”?

Un minimo assoluto è anche un minimo relativo? Fai un esempio (o un contreesempio).

Un minimo relativo è anche un minimo assoluto? Fai un esempio (o un contreesempio).

C 8.8 Sai enunciare e provare la condizione necessaria di estremo relativo?

9 Studio di grafici

C 9.1 Stabilire se sono vere o false le seguenti affermazioni:

[a] Per trovare i massimi e i minimi relativi basta risolvere l'equazione $f'(c) = 0$ perchè si deve annullare la derivata prima.

[b] Il massimo assoluto di una funzione è il più grande dei massimi relativi.

C 9.2 Esporre i teoremi di Rolle e Lagrange dando anche una interpretazione geometrica del risultato.

C 9.3 Costruisci tre esempi in cui il teorema di Rolle non vale.

C 9.4 Dimostra la condizione sufficiente di massimo e minimo relativo.

C 9.5 Sai enunciare e provare una caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo in termini della derivata prima?

C 9.6 Cosa vuol dire che una funzione rivolge la concavità verso l'alto?

C 9.7 Definisci i concetti di asintoto verticale, orizzontale, obliquo. Costruisci tre esempi.

C 9.8 (***) Cosa si intende per “funzione crescente in un punto x_o ”? Spiega la differenza fra questo concetto e quello di funzione crescente in un intorno del punto x_o .

10 Formula di Taylor

C 10.1 Verificare che il polinomio di Taylor di grado n di una funzione f , centrato in x_o , ha le stesse derivate di f in x_o , fino all'ordine n .

C 10.2 Scrivi la formula di Taylor con resto di Lagrange di grado n e di punto iniziale x_o .

C 10.3 Quale è la differenza fra il resto di Lagrange e il resto di Peano?

C 10.4 Perché è utile approssimare una funzione con un polinomio?

C 10.5 Sai spiegare perchè nei polinomi di Mac Laurin di una funzione dispari compaiono solo potenze dispari della variabile e, al contrario, per le funzioni pari compaiono solo le potenze pari? Sai fare almeno due esempi? Questa proprietà è vera anche se il punto iniziale non è l'origine? Perché?

C 10.6 Puoi scrivere il polinomio di Mac Laurin della funzione $f(x) = \operatorname{arctg}|x|$?

11 Integrali I

C 11.1 (*) Dare la definizione di integrale definito di una funzione limitata.

C 11.2 Cosa sono le somme di Cauchy di una funzione limitata? Esponi la regola del punto medio.

C 11.3 Come si definisce l'area della parte di piano compresa fra due funzioni integrabili?

C 11.4 Cosa è il valor medio di una funzione?

C 11.5 Enuncia, dimostra e interpreta i due teoremi della media.

C 11.6 Spiegare la differenza fra funzione integrale e integrale definito.

C 11.7 Dimostra il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.

C 11.8 Spiegare la differenza fra primitiva e funzione integrale.

12 Integrali II

C 12.1 Formulare la regola di integrazione per parti, mostrare come deriva dalla formula di derivazione del prodotto e fare un esempio.

C 12.2 Formulare la regola di integrazione per sostituzione e mostrare come deriva dalla formula di derivazione della funzione composta. Spiegare la tecnica formale per applicare questa regola e fare un esempio.

C 12.3 Scrivere e interpretare geometricamente la regola dei trapezi.

C 12.4 Se $v(t)$ è la velocità di una particella che si muove in linea retta quale dei due integrali $\int_a^b |v(t)|dt$, $\int_a^b v(t)dt$ esprime la lunghezza dello spazio percorso nell'intervallo $[a, b]$?

C 12.5 Come si definisce l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)dx$?

13 Serie numeriche. Serie di potenze.

C 13.1 Sai definire la somma di una serie numerica? Spiega la differenza fra serie e somma di una serie.

C 13.2 Spiega il concetto di convergenza assoluta. È vero che una serie convergente converge anche assolutamente? È vero il viceversa?

C 13.3 Sai studiare il carattere della serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ al variare del parametro x ?

C 13.4 Quali strumenti conosci per determinare il carattere di una serie?

C 13.5 In quali circostanze si usa il criterio integrale ?

C 13.6 Sai enunciare il criterio di Leibniz per le serie a segni alterni?

C 13.7 Scrivi la serie di Taylor delle funzioni e^x , $\log(1+x)$ specificando il loro raggio di convergenza.

C 13.8 Scrivi la serie di Taylor delle funzioni $\sin(x)$, $\cos(x)$ specificando il loro raggio di convergenza.

14. Calcolo differenziale per funzioni di due variabili

C 14.1 Scrivi l'equazione del generico piano e della generica retta in un sistema di coordinate cartesiane a tre dimensioni. Fai due esempi e rappresentali graficamente.

C 14.2 Scrivi l'equazione dei piani coordinati e degli assi coordinati.

C 14.3 Che cosa è una curva di livello? Fai un esempio.

C 14.4 Definisci le derivate parziali di una funzione di due variabili e il loro significato geometrico.

C 14.5 Definisci il piano tangente al grafico di una funzione $f(x, y)$ in un punto (x_o, y_o) .

15. Calcolo differenziale per funzioni di due variabili. Massimi e Minimi relativi

C 15.1 Quando un punto si dice di massimo relativo per una funzione f ? Quando di minimo relativo? Quando un punto si dice un punto di sella? Fai tre esempi.

C 15.2 Quando un punto si dice critico per una funzione?

C 15.3 Prova il teorema che fornisce una condizione necessaria di estremo relativo.

C 15.4 Dire che cosa è l'Hessiano di una funzione. Calcolando l'Hessiano di una funzione in un punto critico è sempre possibile concludere se si tratta di un punto di massimo, minimo relativo o di sella?

C 15.5 Fornisci delle condizioni sufficienti per massimo, minimo relativo e per punto sella.