Testi d'esame, prove intercorso ed esercitazioni guidate

Esercizi per la preparazione alla prima prova intercorso. A.A.2001-2002

Esercizio 1 Sia $f(x) = 1 + \log(x-4), \quad x > 4$ allora

[a] non esiste l'inversa

[b] f^{-1} esiste ed è $e^{x-1} + 4$

[c] f^{-1} esiste ed è $e^{x-4} + 1$

[d] f^{-1} esiste ed è $1/[1 + \log(x-4)]$

Esercizio 2 Sia $h = f \circ g$ con

$$h(x) = \frac{e^{3x}}{e^{3x} - 5}.$$

Dire quali di queste funzioni possono essere le componenti.

[a] $f(x) = e^{3x} \qquad g(x) = \frac{x}{x-5}$

[b] $f(x) = \frac{x}{x-5} \qquad g(x) = e^{3x}$

[c] $f(x) = \frac{3x}{3x-5} \qquad g(x) = e^{x}$

[d] $f(x) = e^{3x} \qquad g(x) = \frac{1}{e^{3x}-5}$

Esercizio 3 La funzione $f(x) = 2x - 5\sqrt{x}$ ha uno zero nell'intervallo

[a] $(4, 5)$

[b] $(5, 6)$

[c] $(6, 7)$

[d] $(7, 8)$

Esercizio 4 Tracciare approssimativamente il grafico di $f \circ g$ dove

$$f(x) = \frac{x}{x+2} \qquad\qquad g(x) = e^{-x}$$

Esercizio 5 Sia $P(x)$ un polinomio di grado dispari. Mostrare che ha almeno una radice reale.

Esercizio 6 È data l'equazione $y^2 - 1 + e^{-2x^2} = 2\; y\; e^{-x^2}$.

i) Disegnarne il grafico

ii) Stabilire se si tratta del grafico di una funzione. In caso affermativo dire quale. In caso negativo spezzare il grafico in due sottoinsiemi che siano il grafico di due funzioni e trovare l'espressione delle funzioni.

Esercizio 7 È data la funzione $f(x) = \sqrt{2\sin(x) - 1}$,

i) trovare il campo di esistenza D.

iv) tracciare, nello stesso piano cartesiano, i grafici di f e delle funzioni

$$g(x) = \sin(x) \qquad h(x) = 2\sin(x) \qquad l(x) = 2\sin(x) - 1$$

nell'intervallo $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$.

iii) tracciare il grafico di f in D.

iv) provare che $0 \leq f(x) \leq 1 \;\; x \in D$. È vero che $0 = \min f$? È vero che $1 = \max f$?

Esercizio 8 È data la funzione $y = e^{\frac{x-1}{x}}$,

i) trovare l'insieme di definizione D

ii) calcolare i limiti agli estremi di D.

iii) dire se ha inversa in D o in qualche sottoinsieme di D. In caso affermativo trovare l'espressione dell'inversa.

Esercizio 9 Stabilire se la funzione $e^x + x^3$ ha zeri in $(-1, 1)$ e, in caso affermativo,calcolare a meno di 10^{-2}.

Esercizio 10 Tracciare approssimativamente il grafico di $f \circ g(x) = f(g(x))$ dove

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \qquad\qquad g(x) = e^x.$$

Esercizio 11 Per ciascuna delle seguenti funzioni

$$\log(|x| + 2); \qquad e^x + x^5; \qquad \frac{1}{1-x}; \qquad \sin(\frac{1}{x^2})$$

trovare l'insieme di definizione e stabilire se in tale insieme sono crescenti o decrescenti o né l'uno né l'altro.

Esercizio 12 Calcolare la derivata delle funzioni

$$(x^2 + 2)^{\sin(x)} \qquad \log(e^x + e^{-x} - 2) \qquad \cos^2(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}).$$

Prima prova intercorso. A.A. 2001-2002 Compito A

Esercizio 1 Dire quale delle seguenti è l'espressione della funzione $h = f \circ g$, dove $f(x) = x^3$ e $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$

[a] $h(x) = \sqrt[3]{x^3+1}$

[b] $h(x) = (x+1)^{-\frac{1}{3}}$

[c] $h(x) = x+1$

[d] $h(x) = x^3\sqrt[3]{x+1}$

Esercizio 2 La funzione f ha massimo in 7. Dire quale delle seguenti funzioni ha massimo in -7.

[a] $f(x+7)$

[b] $f(x)-7$

[c] $-7f(x)$

[d] $f(-x)$

Esercizio 3 Partendo dal grafico della funzione f disegnato in Figura 1, tracciare il grafico di ciascuna delle funzioni sottoelencate nel riquadro corrispondente.

$|f(x)|$; $\quad f(|x|)$; $\quad -f(x)$; $\quad f(-x)$

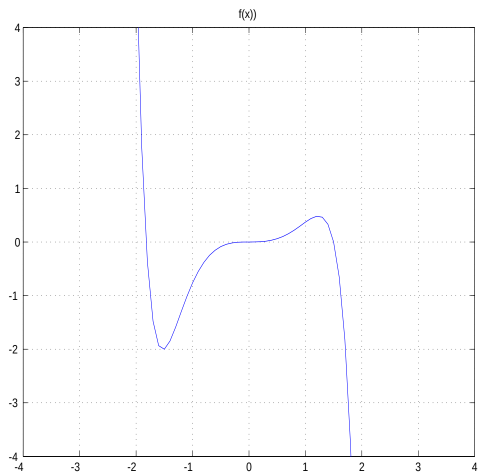

Figura 1: $f(x)$

Esercizio 4 Calcolare la derivata delle funzioni $f(x) = \log(2^x - 3)$ e $g(x) = \frac{\sin(x^2-1)}{\cos(x^2)+2}$.

Esercizio 5 È data l'equazione $x^2y^2 - 1 + x^2 = 0$.

i) Disegnarne il grafico approssimativamente.

ii) Stabilire se si tratta del grafico di una funzione. In caso affermativo dire quale.

iii) In caso la risposta alla precedente domanda sia negativa, spezzare il grafico in due sottoinsiemi che siano il grafico di due funzioni e scrivere l'espressione delle funzioni.

Esercizio 6 È data la funzione $f(x) = \log(x) + x^3$.

i) Utilizzando i grafici delle funzioni elementari, disegnarne il grafico approssimativamente.

ii) dire se ha zeri e, in caso affermativo, trovarne uno con un errore minore di 10^{-1}.

Esercizio 7 È data la funzione $f(x) = \frac{1+e^{2x}}{1-e^{2x}}$

i) trovare l'insieme di definizione D

ii) calcolare i limiti agli estremi di D.

iii) dire se ha inversa in D o in qualche sottoinsieme di D. In caso affermativo trovare l'espressione dell'inversa.

Prima prova intercorso. A.A. 2001-2002 Compito B

Esercizio 1 Scrivere l'espressione della funzione $h = f \circ g$, dove $f(x) = -x^3$ $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$.

[a] $h(x) = -\sqrt[3]{x^3-1}$ **[b]** $h(x) = -(x-1)^{-\frac{1}{3}}$

[c] $h(x) = -x+1$ **[d]** $h(x) = -x^3\sqrt[3]{x-1}$

Esercizio 2 La funzione f ha minimo in 7. Dire quale delle seguenti funzioni ha minimo in -7.

[a] $f(x+7)$ **[b]** $f(x) - 7$

[c] $-7f(x)$ **[d]** $f(-x)$

Esercizio 3 Partendo dal grafico della funzione f disegnato in Figura 1, tracciare il grafico di ciascuna delle funzioni sottoelencate nei riquadri corrispondenti.

$f(|x|)$; $-f(x)$; $f(-x)$; $|f(x)|$

Esercizio 4 Calcolare la derivata delle funzioni $f(x) = \log(3^x + 2)$ e $g(x) = \frac{\cos(x^2+1)}{\sin(x^2)+2}$.

Esercizio 5 È data l'equazione $x^2y^2 + 1 - x^2 = 0$

i) Disegnarne il grafico approssimativamente.

ii) Stabilire se si tratta del grafico di una funzione. In caso affermativo dire quale.

iii) In caso la risposta alla precedente domanda sia negativa, spezzare il grafico in due sottoinsiemi che siano il grafico di due funzioni e scrivere l'espressione delle funzioni.

Esercizio 6 È data la funzione $f(x) = \log_{10}(x) + x^2$

i) Utilizzando i grafici delle funzioni elementari, disegnarne il grafico approssimativamente.

ii) dire se ha zeri e, in caso affermativo, trovarne uno con un errore minore di 10^{-1}.

Esercizio 7 È data la funzione $y = \log \frac{x-1}{x+1}$

i) trovare l'insieme di definizione D

ii) calcolare i limiti agli estremi di D.

iii) dire se ha inversa in D o in qualche sottoinsieme di D. In caso affermativo trovare l'espressione dell'inversa.

Seconda esercitazione guidata. A.A. 2001-2002.

Esercizio 1 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = x^3e^{-x}$ precisando

[a] l'insieme di definizione D e limiti agli estremi di D

[b] monotonia, concavità e convessità.

Esercizio 2 È data la funzione $f(x) = e^{x^2} - x\sin(x) - 1$.

[1] Scrivere il suo polinomio Taylor di punto iniziale 0 e di grado 4.

[2] Valutare l'errore commesso nell'approssimare la funzione con tale polinomio nell'intervallo $[-.5, .5]$.

Esercizio 3 È data la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^4}dt$$

[a] Disegnarne approssimativamente il grafico in un intorno dell'origine.

[b] Trovare la sua espressione calcolando l'integrale

Esercizio 4 Trovare e classificare i punti critici della funzione $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$.

Seconda prova intercorso. A.A. 2001-2002 Compito A

Esercizio 1 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \frac{|x^2+x-2|}{x^2}$. precisando

[1] l'insieme di definizione D e i limiti agli estremi di D,

[2] derivabilità monotonia, concavità e convessità.

Esercizio 2 È data la funzione $f(x) = \frac{1}{2}(e^{x^2} + e^{-x^2})$

[1] Scrivere il suo polinomio di Taylor di punto iniziale 0 e di grado minore o uguale a 5.

[2] Valutare l'errore commesso nell'approssimare la funzione con tale polinomio nell'intervallo $[-.5, .5]$.

Esercizio 3 Calcolare la media integrale della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}\log(x+2)$ nell'intervallo $[1, 2]$.

Esercizio 4 Siano $f(t) = e^{-t^2}$ e $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Dire quale dei grafici in Figura 1a è il grafico di $F(x)$ in un intorno dell'origine. Motivare la scelta fatta.

Esercizio 5 È data la funzione $f(x, y) = y(x^2 - 1)$.

[1] Tracciare le curve di livello corrispondenti ai valori $c = -1$, $c = 0$ e $c = 1$.

[2] Trovarne e classificare i punti critici

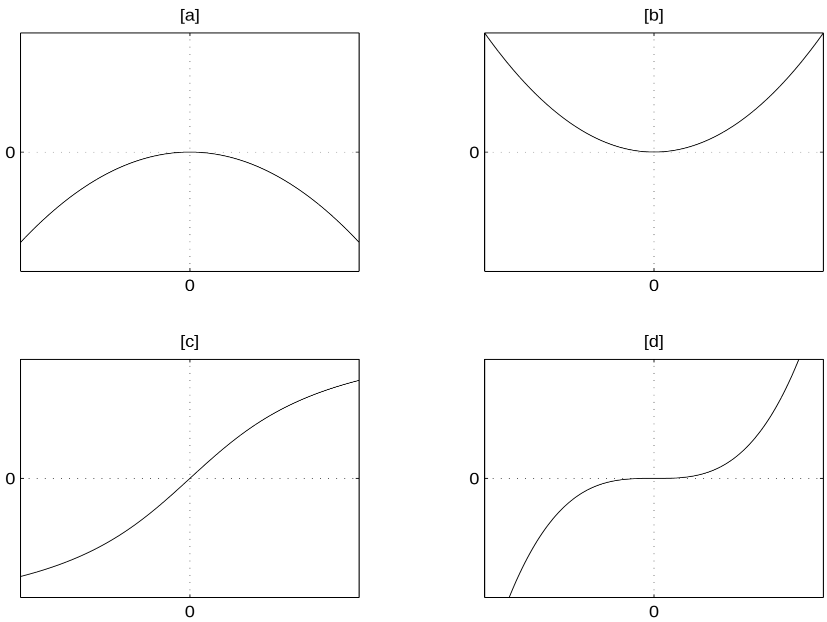

Figura 1a

Seconda prova intercorso. A.A. 2001-2002 Compito B

Esercizio 1 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \frac{|x^2-x-2|}{x^2}$ precisando

[1] l'insieme di definizione D e i limiti agli estremi di D,

[2] derivabilità monotonia, concavità e convessità.

Esercizio 2 È data la funzione $f(x) = \frac{1}{2}(e^{x^2} - e^{-x^2})$

[1] Scrivere il suo polinomio di Taylor di punto iniziale 0 e di grado minore o uguale a 5.

[2] Valutare l'errore commesso nell'approssimare la funzione con tale polinomio nell'intervallo $[-0.5, 0.5]$.

Esercizio 3 Calcolare la media integrale della funzione $f(x) = x\log(1 + \frac{1}{x^2})$ nell'intervallo $[1, 2]$.

Esercizio 4 Siano $f(t) = e^{-t^3}$ e $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Dire quale dei grafici in Figura 1b è il grafico di $F(x)$ in un intorno dell'origine. Motivare la scelta fatta.

Esercizio 5 È data la funzione $f(x, y) = y - 4x^2y$.

[1] Tracciare le curve di livello corrispondenti ai valori $c = -1$, $c = 0$ e $c = 1$.

[2] Trovare e classificare i punti critici.

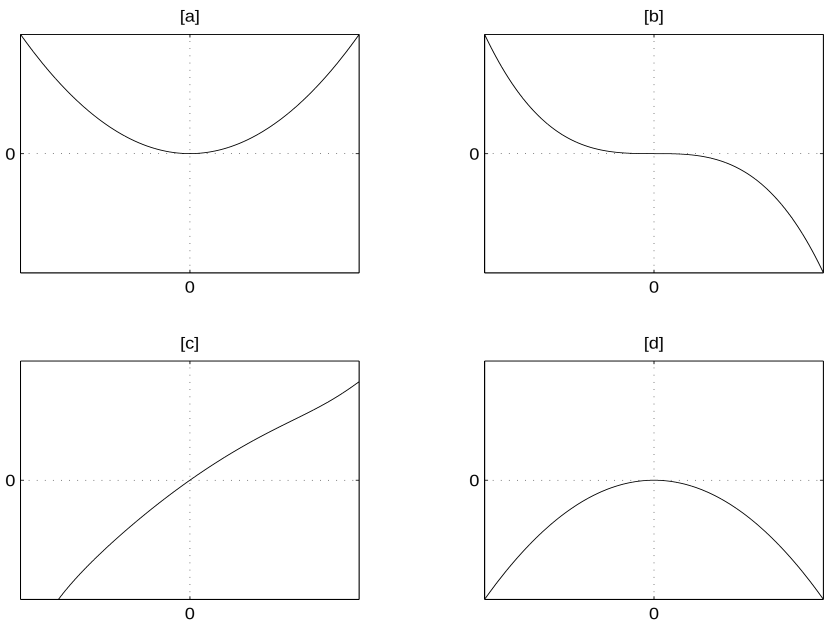

Figura 1b

Prova d'esame. Febbraio 2002

Esercizio 1 È data la funzione $f(x) = xe^{\frac{1}{1-|x|}}$.

[1] Disegnarne il grafico precisando l'insieme di definizione D e i limiti agli estremi di D, derivabilità, monotonia, concavità e convessità.

[2] Valutare l'errore commesso nell'approssimare la funzione f con il suo polinomio di Taylor di grado 1 e di punto iniziale 2 nell'intervallo $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$.

[3] Mostrare che è invertibile in $(1, +\infty)$ e tracciare il grafico della funzione inversa. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione inversa nel punto $\frac{2}{e.}$

Esercizio 2 È data la funzione

$$g(x) = \frac{\sin(x)}{(9 - \cos^2(x))(2 - cos(x))}.$$

[1] Dire se esiste una primitiva in $\mathbf{R}$. In caso affermativo trovarne una.

[2] Calcolare la media della funzione g in $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

Esercizio 3 Dire quali delle seguenti funzioni sono periodiche, precisando l'eventuale periodo.

[a] $f_1(x) = \sin(x^2)$ **[b]** $f_2(x) = \cos^2(\frac{x}{2})$

[c] $f_3(x) = \sin(2x + 1)$ **[d]** $f_4(x) = e^{\sin(4x)}$

Esercizio 4 Mostrare che, se una funzione f è periodica di periodo T, allora

$$\int_0^T f(t)dt = \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3}{2}T} f(t)dt$$

Prova d'esame. Giugno 2002

Esercizio 1 Mostrare che l'equazione $z\log(z) = 2$ ha una ed una sola soluzione e calcolarla con un errore minore di 10^{-1}. Trovare l'insieme $\{z \in \mathbf{R} |\ z\log(z) > 2\ \}$.

Esercizio 2 È data la funzione $f(x) = x\log(1 + x^2) - 2x$.

i) Trovare l'insieme di definizione D, gli zeri, i limiti agli estremi di D ed eventuali simmetrie.

ii) Stabilire dove è derivabile e calcolare la derivata determinandone gli zeri e il segno (usare il risultato dell'Esercizio 1).

Trovare gli eventuali punti di massimo e minimo relativi.

iii) Disegnare il grafico di f.

Esercizio 3 Sia f la funzione dell'Esercizio 2. Calcolarne l'integrale sull'intervallo $(0, 1)$.

Esercizio 4 Stabilire insieme di definizione e segno della seguente funzione $g(x, y) = \frac{y}{x}e^x$. Dire se esistono punti di estremo relativo e, in caso affermativo, determinarli.

Prova d'esame. Luglio 2002

Esercizio 1 Approssimare la funzione $f(x) = \sin(x) - x^2$ con un polinomio di grado 2 nell'intervallo $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$. Stimare l'errore commesso.

Esercizio 2 È data la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}\log(x-2)$. Determinarne insieme di definizione D, segno, limiti estremi agli estemi di D massimi e minimi relativi, concavità, convessità, eventuali punti di flesso. Disegnare il grafico.

Esercizio 3 Calcolare l'area della regione del piano cartesiano limitata dall'asse x, dalle rette di equazione $x = -1$ $x = 2$ e dal grafico della funzione $f(x) = \frac{x^2-2}{9-x^2}$.

Esercizio 4 Trovare gli eventuali punti di massimo e minimo relativo della funzione di due variabili $f(x,y) = y^2 - x^2 - 2e^{x^2-y^2}$.

Prova d'esame. Settembre 2002

Esercizio 1 È data la funzione $f(x) = \log(\cos(x)))$. Scrivere i suoi polinomi di Taylor, di punto iniziale zero, di grado 2, 3, 4. Calcolare l'errore commesso nell'approssimare la funzione con il polinomio di grado 3 nell'intervallo $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Usando tale polinomio, approssimare l'integrale

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \log(\cos(x)))\, dx.$$

Esercizio 2 È data la funzione $f(x) = x + \sqrt{(1+x^2)}$

i) Trovare l'insieme di definizione D, gli zeri, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti.

ii) Stabilire dove è derivabile e calcolare la derivata determinandone gli zeri e il segno. Trovare gli eventuali estremi assoluti e relativi.

iii) Disegnare il grafico.

Esercizio 3 Trovare gli eventuali punti di massimo e minimo relativo della funzione $f(x,y) = x^3 + y^2 + xy$.

Prima esercitazione guidata. A.A. 2002-2003.

Esercizio 1 Provare il teorema dei valori intermedi (usare il teorema degli zeri).

Esercizio 2 Utilizzando i grafici delle funzioni elementari disegnare approssimativamente il grafico dell'equazione $x^2y^2 - x^2 - 2 = 0$.
Stabilire se si tratta del grafico di una funzione. In caso affermativo dire quale.In caso la risposta sia negativa, spezzare il grafico in due sottoinsiemi che siano il grafico di due funzioni e scrivere l'espressione delle funzioni.

Esercizio 3 È data la funzione

$$f(x) = \log^3(|x-1|) \ .$$

Dopo aver trovato l'insieme di definizione e i limiti agli estremi di esso, disegnarne il grafico e stabilire se è una funzione invertibile nel suo insieme di definizione. In caso la risposta sia positiva, scrivere l'espressione dell'inversa. Altrimenti trovare un intervallo in cui esiste l'inversa, trovarne l'espressione e disegnarne il grafico.

Esercizio 4 È data la funzione $f(x) = \text{arctg}(x)$. Disegnare il grafico delle funzioni $F(x) = |f(x) + \frac{\pi}{4}|$ e $G(x) = \frac{1}{3} f(3x)$.

Esercizio 5 Derivare la funzione

$$f(x) = \Big(\frac{x^4+2}{x^2+1}\Big)^{\sin(x)}$$

Prima prova intercorso. A.A. 2002-2003. Compito A

Esercizio 1 Rispondere alle domande a) e b). Se la risposta è positiva, giustificare, se è negativa, fare un contresempio.

[a] È vero che una funzione dispari è sempre invertibile?

[b] È vero che una funzione strettamente crescente è sempre invertibile?

Esercizio 2 Mostrare che la funzione seno è continua in tutto $\mathbf{R}$.

Esercizio 3 Partendo dal grafico della funzione f disegnato in Figura 1, tracciare il grafico delle funzioni $|f(-|x|)|$ e $-f(|x|)$.

Esercizio 4 È data l'equazione $y^2 - 2 = (x-1)^3$

i) Disegnarne il grafico approssimativamente, usando i grafici di funzioni elementari.

ii) Stabilire se si tratta del grafico di una funzione. In caso affermativo dire quale.

iii) In caso la risposta alla precedente domanda sia negativa, spezzare il grafico in due sottoinsiemi che siano il grafico di due funzioni e scrivere l'espressione delle funzioni.

Esercizio 5 È data la funzione $f(x) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg}(x^2)$.

i) Trovare l'insieme di definizione D e i limiti agli estremi di D.

ii) Esprimere f come composta di più funzioni.

iii) Usando i grafici di funzioni elementari, disegnarne il grafico e stabilire se è una funzione invertibile nel suo insieme di definizione. In caso la risposta sia positiva, scrivere l'espressione dell'inversa. Altrimenti trovare un intervallo in cui esiste l'inversa, trovarne l'espressione e disegnarne il grafico.

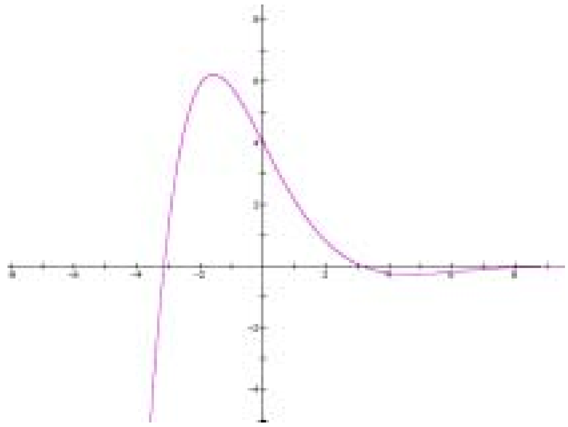

Figura 1: $f(x)$

Esercizio 6 Derivare le funzioni $\log \frac{x^4+1}{x^2+1}$ e $(1+x^2)^{x^2}$.

Prima prova intercorso. A.A. 2002-2003. Compito B

Esercizio 1 Mostrare che la funzione seno è continua in tutto **R**.

Esercizio 2 Rispondere alle domande a) e b). Se la risposta è positiva, giustificare, se è negativa, fare un contresempio.

[a] È vero che una funzione pari non è mai invertibile?

[b] È vero che una funzione strettamente decrescente è sempre invertibile?

Esercizio 3 Partendo dal grafico della funzione f disegnato in Figura 1, tracciare il grafico delle funzioni $f(-|x|)$ e $|f(|x|)|$.

Esercizio 4 È data l'equazione $1 - y^2 = (2+x)^3$.

i) Usando i grafici di funzioni elementari, disegnarne il grafico approssimativamente.

ii) Stabilire se si tratta del grafico di una funzione. In caso affermativo dire quale.

iii) In caso la risposta alla precedente domanda sia negativa, spezzare il grafico in due sottoinsiemi che siano il grafico di due funzioni e scrivere l'espressione delle funzioni.

Esercizio 5 È data la funzione $f(x) = \mathrm{arctg}(\mathrm{x}^4) + \pi$.

i) Trovare l'insieme di definizione D e i limiti agli estremi di D.

ii) Esprimere f come composta di più funzioni.

iii) Usando i grafici di funzioni elementari, disegnarne il grafico e stabilire se è una funzione invertibile nel suo insieme di definizione. In caso la risposta sia positiva, scrivere l'espressione dell'inversa. Altrimenti trovare un intervallo in cui esiste l'inversa, trovarne l'espressione e disegnarne il grafico.

Esercizio 6 Derivare le funzioni $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\mathrm{x}^2+1}{\mathrm{x}^4+1}$ e $g(x) = (1+x^4)^x$.

Seconda esercitazione guidata. A.A. 2002-2003.

Esercizio 1 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = xe^{\frac{1}{1-|x|}}$ precisando

[**a**] l'insieme di definizione D e limiti agli estremi di D

[**b**] derivabilità, monotonia, concavità e convessità.

Esercizio 2 Dopo aver trovato il polinomio di di Mac Laurin di grado minore o uguale a 3 della funzione $f(x) = \log(\cos(x)$ stimare l'errore nell'intervallo $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)(\cos^2(x) - 5\cos(x) + 6)} \mathrm{dx}$$

Esercizio 4 Trovare e classificare i punti critici della funzione $f(x,y) = e^{y^2+x^2y}$.

Esercizio 5 Utilizzando i limiti notevoli o le formule di Mac Laurin con resto di Peano disegnare approssimativamente il grafico delle seguenti funzioni su uno stesso piano cartesiano in un intorno dell'origine (per esempio $[-0.5, 0.5]$).

$$\log(1+\sqrt[2]{|x|}) \qquad 1-\cos(x^2) \qquad e^{x^4}-1 \qquad \sin(x^3)$$

L'esercizio deve essere eseguito senza fare alcun calcolo.

Seconda prova intercorso. A.A. 2002-2003. Compito A

Esercizio 1 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = |x|e^{1-x}$ precisando

[**a**] l'insieme di definizione D e limiti agli estremi di D

[**b**] derivabilità, monotonia, concavità e convessità.

Esercizio 2 È data la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ Scrivere il suo polinomio di Mac Laurin di grado minore o uguale a 2 e stimare l'errore commesso nell'approssimare la funzione con tale polinomio nell'intervallo $[-0.2, 0.2]$.

Esercizio 3 Dopo aver disegnato approssimativamente il grafico delle funzioni $f(x) = \sin(\sqrt{x})$ e $g(x) = \frac{x^2}{2}$ in $[0,1]$, calcolare l'area della parte di piano compresa fra il grafico delle funzioni e le rette $x = 0$ e $x = 1$.

Esercizio 4 Trovare e classificare i punti critici della funzione $f(x,y) = e^{yx^3+y^2}$.

Esercizio 5 Definire i concetti di massimo relativo e di punto sella di una funzione di due variabili.

Seconda prova intercorso. A.A. 2002-2003. Compito B

Esercizio 1 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = |1+x|e^{-x}$ precisando

[a] l'insieme di definizione D e limiti agli estremi di D

[b] derivabilità, monotonia, concavità e convessità.

Esercizio 2 È data la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Scrivere il suo polinomio di Mac Laurin di grado minore o uguale a 2 e stimare l'errore commesso nell'approssimare la funzione con tale polinomio nell'intervallo $[-0.2, 0.2]$.

Esercizio 3 Dopo aver disegnato approssimativamente il grafico delle funzioni $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ e $g(x) = 1 - x^2$ in $[0,1]$, calcolare l'area della parte di piano compresa fra il grafico delle funzioni e le rette $x = 0$ e $x = 1$.

Esercizio 4 Trovare e classificare i punti critici della funzione $f(x,y) = e^{y^2-x^3y}$.

Esercizio 5 Definire i concetti di minimo relativo e di punto sella di una funzione di due variabili.

Prova d'esame. Febbraio 2003.

Esercizio 1 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \frac{x}{\log(x)}$ precisando

[a] l'insieme di definizione D e limiti agli estremi di D

[b] derivabilità, monotonia, concavità e convessità.

Esercizio 2 Scrivere il polinomio di Mac Laurin di grado 3 della funzione

$$g(x) = \int_0^x e^{t^2-t}dt$$

e stimare l'errore in $[-0.5, 0.5]$. Disegnare approssimativamente il grafico della funzione f in un intorno dell'origine.

Esercizio 3 Calcolare il valor medio della funzione $\sin(x)\sqrt{1-\sin(x)}$ nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Esercizio 4 È data la funzione $g(x,y) = x^3y - y^3x$

[a] disegnarne la curva di livello corrispondente alla quota 0

[b] trovarne gli eventuali punti critici e classificarli.

Esercizio 5 Dire se le affermazioni in a) e in b) sono vere o false: nel primo caso dimostrare nel secondo produrre un controesempio.
Sia f una funzione di una variabile

[a] se f è continua in un punto allora è anche derivabile in quel punto.

[b] se f è derivabile in un punto, allora è anche continua in quel punto.

Prova d'esame. Giugno 2003.

Esercizio 1 Enunciare, dimostrare e interpretare geometricamente il Teorema di Lagrange.

Esercizio 2 Studiare il grafico della funzione $f(x) = \log(x + \sqrt{|x|})$ trovando l' insieme di definizione D, i limiti agli estremi di D, contimuità, derivabilità, massimi e minimi relativi, concavità, convessità e flessi.

Esercizio 3 Trovare l'espressione della funzione $G(z) = \int_0^z f(t)dt$ dove f è data da

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 2e^{x-1} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Esercizio 4 Scrivere il polinomio di Mac Laurin di grado 3 della funzione

$$g(x) = \sin^2(x) - x^2 e^{-x}.$$

Valutare l'errore commesso nell'approssimare g con tale polinomio nell'intervallo $[-0.5, 0.5]$.

Prova d'esame. Luglio 2003.

Parte teorica Mostrare il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

Esercizio 1 È data la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x|}{1-x}}$$

Trovare il suo insieme di definizione D e i limiti agli estremi di D. Calcolare le derivate prima e seconda, dove esistono, e trovare gli eventuali punti di flesso. Disegnare il grafico.

Esercizio 2 Approssimare la funzione

$$F(x) = \int_0^x \sin(t^2)dt$$

con un polinomio di grado 3 nell'intervallo $[-.5, .5]$ e stimare l'errore commesso.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 e^{-x}\frac{e^x + 1}{e^x + 3}dx.$$

Prova d'esame. Settembre 2003.

Parte teorica Dare la definizione di asintoto verticale, orizzontale e obliquo. Per ciascuno produrre un esempio.

Esercizio 1 È data la funzione

$$f(x) = x^2\sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

Trovare il suo insieme di definizione D, segno e limiti agli estremi di D. Calcolare le derivate prima e seconda, dove esistono, e trovare gli eventuali punti di massimo e minimo. Disegnarne il grafico.

Esercizio 2 È data la funzione

$$F(x) = \int_0^x e^{t^3-t}dt$$

Usando il polinomio di Mac Laurin di grado 2, calcolare approssimativamente $F(\frac{1}{10})$ valutando l'errore.

Esercizio 3 Calcolare l'area della parte di piano compresa fra le curve

$$4y = x^2 \qquad\qquad y = \frac{8}{x^2+4}.$$