Corso di Laurea in Informatica

A.A.2003-2004

Calcolo Differenziale ed Integrale

Esercizi

Indice

Capitolo 1

Esercizi

Capitolo 2

Appendice

1. I numeri reali, massimo e minimo, estremi superiore e inferione

1.1 Eseguire la somma dei due numeri razionali $\frac{43}{8}$ e $\frac{31}{4}$ usando le loro rappresentazioni decimali. Eseguire il prodotto dei due numeri razionali $\frac{43}{8}$ e $\frac{1}{2}$ usando le loro rappresentazioni decimali.

1.2 Trovare tre coppie di numeri x e y per cui vale l'uguale nella disuguaglianza triangolare

$$|x+y| \leq |x| + |y| \tag{1}$$

1.3 Dire se è vera o falsa l' implicazione

$$ax < b \Rightarrow x < \frac{b}{a}$$

motivando la risposta.

1.4 Verificare la disuguaglianza triangolare per le seguenti coppie di numeri $x = -2, y = 6$, per $x = 3, y = 4$ per $x = -4, y = 4$e infine per $x = -1, y = -5$.

1.5 Usando la disuguaglianza triangolare provare che $\forall a, b \in \mathbf{R}$

$$|a - b| \leq |a| + |b|$$

Sugg. In (1) prendere $y = -b$ e $x = \dots$.

1.6 Usando la disuguaglianza triangolare provare che $\forall a, b \in \mathbf{R}$ si ha

$$|a| - |b| \leq |a - b|$$

Sugg.: scrivere a al seguente modo: $a = (a - b) + b$ e usare la (1) con $x = (a - b)$ e $y = \dots$

1.7 Mostrare che

[a] n pari $\Leftrightarrow n^2$ pari

[b] n dispari $\Leftrightarrow n^2$ dispari

Sugg: Provare prima le implicazioni da sinistra a destra, poi procedere con un ragionamento per assurdo.

1.8 Stabilire se ognuno dei seguenti insiemi è limitato superiormente o inferiormente, determinare gli eventuali estremi inferiore e superiore, e, se esistono, il massimo ed il minimo.

$$(-3, \infty) \qquad (0, 1) \cup [2, 5) \qquad (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

1.9 Ripetere l'esercizio precedente per gli insiemi

$$\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}, n \neq 0\} \qquad \{1 - \frac{1}{1+n^2} \mid n \in \mathbf{N}, n \neq 0\}.$$

1.10 Determinare estremi inferiore e superiore dell'insieme $A = \{1 - \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbf{N}\}$, precisando se sono anche minimo e massimo.

1.11 Determinare l'insieme dei numeri reali x per cui $\left|\frac{1}{x} - 1\right| < 2$.

1.12 Determinare l'insieme dei numeri reali x per cui $|x^2 - 2| < 1$.

1.13 Disegnare la regione del piano cartesiano $A = \{(x, y), x, y \in \mathbf{R} : |x - y| < 1\}$

1.14 Disegnare la regione del piano cartesiano $A = \{(x, y), x, y \in \mathbf{R} : |2x - y| < 1\}$

1.15 Disegnare le regioni del piano cartesiano

[a] $A = \{(x, y), x, y \in \mathbf{R} : |x + y| < 1\}$

[b] $B = \{(x, y), x, y \in \mathbf{R} : |y| < 1 + |x|\}$.

1.16 Per ciascuna delle due regioni del piano nella Figura 1 trovare una disequazione che abbia come soluzione i punti della regione stessa.

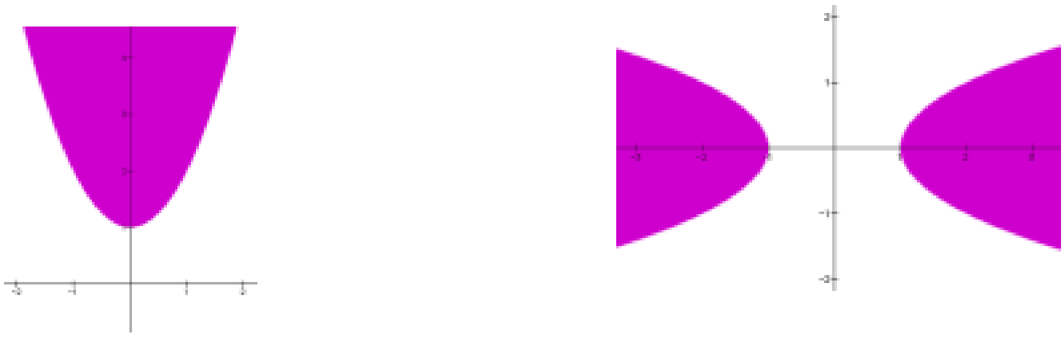


Figura 1

1.17 Trovare una disequazione che abbia come soluzione i punti della regione della Figura 2.

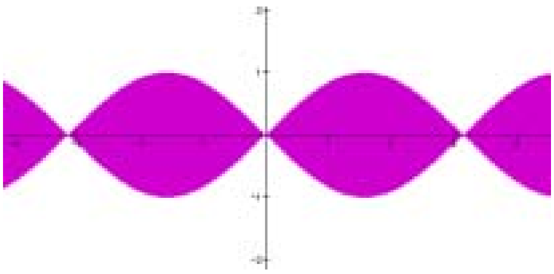
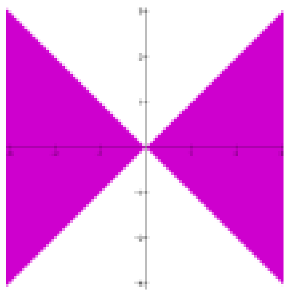


Figura 2

1.18 Per ciascuna delle due regioni del piano nella Figura 3 trovare una disequazione che abbia come soluzione i punti della regione stessa.



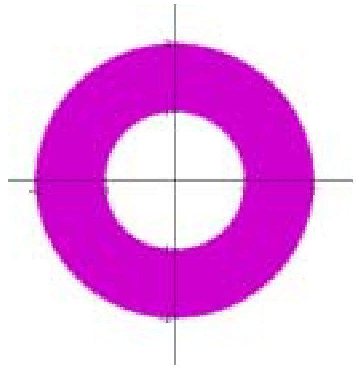


Figura 3

1.19 Per ciascuna delle disuguaglianze a) e b)

a) $\dfrac{x}{1-x} \geq 3$ b) $\dfrac{2x+3}{x} \geq x$

indicare l'insieme di tutti i valori di x che le soddisfano. Usare la notazione relativa agli intervalli.

1.20 In un sistema di coordinate ortogonali disegnare l' insieme dei punti le cui coordinate (x, y) soddisfano le condizioni a) e b)

a) $y^2 + x^2 - 6y - 2x - 6 \geq 0$ b) $x + |y - 2| = 1.$

1.21 Usando il principio di induzione provare che per ogni $n \in \mathbf{N}$

$$2^n \geq n + 1.$$

1.22 Usando il principio di induzione provare

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

$x \geq -1,\ n \in \mathbf{N}$.(Diseguaglianza di Bernoulli). *Suggerimento:* È vera per $n = 1$. Supposta vera la formula per n, moltiplicare per $1 + x$ entrambi i membri.

1.23 Usando il principio di induzione provare che

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$x \neq 1\ \ n \in \mathbf{N}$. *Suggerimento:* Supposta vera la formula per n, moltiplicare per $1 - x$ entrambi i membri e semplificare.

2. Grafico di una equazione, grafico di una funzione, funzione composta

2.1 Usando che l'insieme $\{2^n : n \in \mathbf{N}\}$ ha minimo 1 e non è limitato superiormente (Cap 1), dire se l'insieme $\{(\frac{1}{2})^n : n \in \mathbf{N}\}$ è limtato, e dire quali sono gli eventuali estremi superiore e inferiore (non occorre provarlo).

2.2 Disegnare il grafico delle seguenti equazioni nelle variabili reali x e y, precisando in quali casi esse definiscono una funzione della variabile y rispetto alla variabile x. Determinare infine, nei casi affermativi, l'insieme di definizione di tali funzioni

[i] $y^2 = 3 - x$ [ii] $(x-1)^2 = 0$,

[iii] $|\sin(x)| = y$, [iv] $x^2 = \pi xy$.

2.3 È vero che $\cos(x)$ è la traslata di $\sin(x)$? Se si, scrivere il parametro di traslazione, se no spiegare perchè.

2.4 Disegnare il grafico della funzione $\sin(nx)$ e quello di $\sin(\frac{x}{n})$ per $n = 1, 2, 3, 4$.

2.5 Per ciascuno dei grafici nella Figura 4 trovare insieme di definizione e immagine.

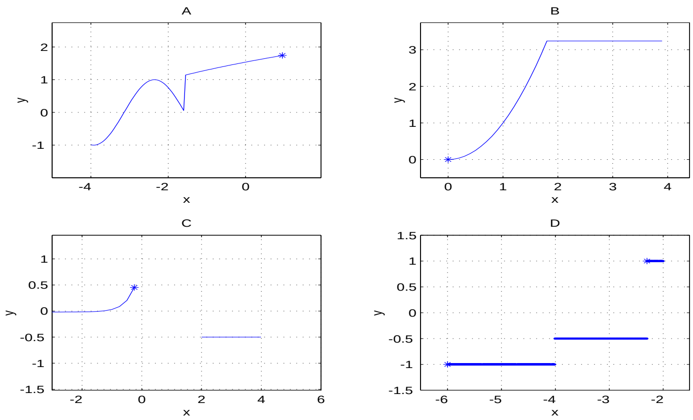


Figura 4

2.6 Trovare l'insieme di definizione della funzione $f(x) = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{4-x}$.

2.7 Sia f una funzione reale definita sull'intervallo I. Dato un numero reale positivo a determinare il dominio della funzioni seguenti e caratterizzarne il grafico mediante quello di f:

$$g(x) = f(x) + a, \qquad h(x) = f(x+a), \qquad k(x) = af(x), \qquad \ell(x) = f(ax).$$

2.8 Spiegare il legame fra il grafico di $f(x)$ e quello di $f(|x|)$. Spiegare il legame fra il grafico di $f(x)$ e quello di $|f(x)|$.

2.9 Disegnare il grafico di $\sin(x - \frac{\pi}{4})$ e quello di $\sin(x) - \frac{\pi}{4}$.

2.10 Disegnare la funzione periodica di periodo 2 che nell'intervallo $[-1, 1]$ è uguale a $1 - |x|$.

2.11 Per ciascuna delle due coppie di funzioni in $[a]$ e $[b]$ trovare $f \circ g$ e $g \circ f$ precisando il dominio di definizione.

[a] $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = 1 - \sqrt{x}$

[b] $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ e $g(x) = x + 1$.

2.12 Dire se sono vere le affermazioni in [i] e [ii]; se sono vere, provare, se sono false, fare un controesempio.

[i] il prodotto di una funzione crescente e di una decrescente è una funzione crescente.

[ii] il prodotto di una funzione crescente e di una decrescente è una funzione decrescente.

Sugg: Si consideri $f(x) = x^2$ in $(0, \infty)$ e la si moltiplichi prima per $g(x) = \frac{1}{x}$ poi per $g(x) = \frac{1}{x^3}$.

2.13 È data la funzione $f(x) = (x - 3)^2$.
Eseguire, analiticamente e graficamente, le seguenti operazioni nell'ordine assegnato, cioè in modo che ogni operazione agisca sul risultato della precedente:
1) traslare di 1 nella direzione e verso del semiasse positivo delle ascisse
2) operare una riflessione rispetto all'asse delle ordinate
3) operare una traslazione di 1 nella direzione e verso del semiasse negativo delle ordinate.
4) Dilatare di un fattore 3.

2.14 Ripetere l'esercizio precedente con la funzione $f(x) = 2^x$.

2.15 Siano $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = \cos x$. Trovare l'espressione della funzione $g \circ f$ specificandone l'insieme di deinizione.

2.16 Per ciascuna delle seguenti coppie di funzioni

$$\begin{cases} f(x) = \cos(x) \\ g(x) = 1 - x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = |x| \\ g(x) = x^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{x-1} \\ g(x) = x^2 \end{cases}$$

dire dove è definita la funzione $g \circ f$ e dove la funzione $f \circ g$.

2.17 Per ciascuna delle seguenti coppie di funzioni

$$\begin{cases} f(x) = \cos(x) \\ g(x) = \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = f(x) = x^2 - 5x + 6 \\ g(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$

dire dove è definita la funzione $g \circ f$ e dove la funzione $f \circ g$.

2.18 I grafici in Figura 5 sono stati ottenuti da diversi esperimenti. Per ciascuno di essi cercare una funzione che ne costituisca un buon modello. Motivare le scelte fatte.

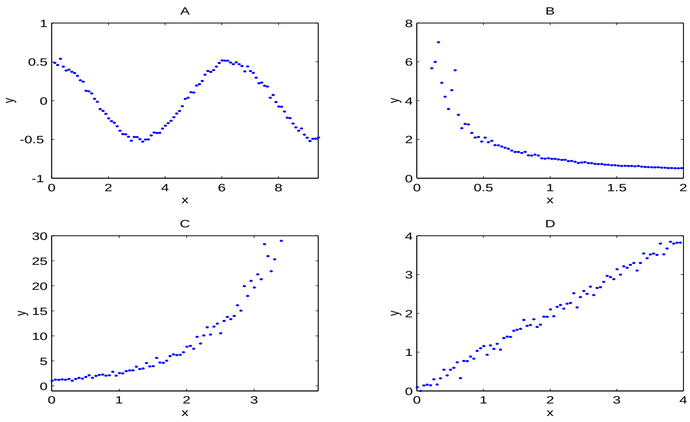


Figura 5

3. Funzione inversa.

3.1 Stabilire in quali intervalli la funzione $f(x) = 1 + (x-2)^2$ è invertibile. Determinare, se possibile, le eventuali funzioni inverse precisandone per ciascuna l'insieme di definizione. Disegnare il grafico delle inverse.

3.2 Ripetere l'esercizio precedente per la funzione $f(x) = 2^{(x-1)} + 3$.

3.3 Ripetere l'esercizio precedente per la funzione $g(x) = 2^x + x$.

3.4 Siano $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Dire dove è definita la funzione $g \circ f$.

3.5 Dimostrare che nell'intervallo $(0, 1]$ la funzione $f(x) = (1 - x^n)^{\frac{1}{n}}$, $n > 0$, è inversa di se stessa verificando che

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = x.$$

3.6 Dimostrare che ciascuna delle funzioni

$$f(x) = x, \qquad g(x) = -x, \qquad h(x) = \frac{1}{x}, \qquad s(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad x \neq -1$$

è inversa di se stessa.

3.7 Usando le proprietà delle potenze, verificare le seguenti proprietà della funzione logaritmo

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \qquad \log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y) \qquad \log_a(x^b) = b\log_a(x).$$

3.8 Trovare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \arcsin(2x - \frac{1}{2}).$$

3.9 Trovare l'insieme di definizione della funzione

$$g(x) = \sqrt{\frac{1}{2} - \arccos(x)}.$$

3.10 La funzione $\cos(x)$ è invertibile nell' intervallo $[-\pi, \pi]$? In caso positivo disegnare il grafico dell'inversa. Rispondere alla stessa domanda nel caso dell'intervallo $[\pi, 2\pi]$.
Più in generale, scrivere tutti gli intervalli in cui la funzione è invertibile.

TEST 1

T1 Il numero $\sqrt{50}+\sqrt{8}$ è uguale a

[*a*] $\sqrt{58}$ [*b*] $7\sqrt{2}$ [*c*] 7 [*d*] $2(\sqrt{5}+\sqrt{2})$

T2 Tra i termini: intero, razionale, irrazionale, quale si applica a ciascuno dei seguenti numeri?

[*a*] $\sqrt{\frac{4}{9}}$; [*b*] 0.87; [*c*] $\left(-\frac{1}{4}\right)^3$; [*d*] 2^{-3}; 0.1010010001......

T3 Il valore assoluto di $-x$ è uguale a

[a] x [b] $|x|$ [c] $-|x|$ [d] $-x$.

T4 Il numero di soluzioni dell'equazione $x-|2x-1|=4$ è

[*a*] 0; [*b*] 1; [*c*] 2; [*d*] 3

T5 Le soluzioni della disequazione $\dfrac{x+2}{|x-1|}>0$ sono

[a] $x\neq 1$ e $x>-2$ [b] $x>-2$

[c] $x>1$ e $x>-2$ [d] nessuna delle precedenti

T6 L'unione degli intervalli $[1,5)$ e $(5,8]$ è:

[*a*] $[1,8]$; [*b*] 5; [*c*] $[1,8]-\{5\}$; [*d*] $\mathbf{R}$

T7 Quale disequazione ha come soluzione l'insieme dei numeri reali maggiori di 2?

$\sqrt{x+7}>3$; $\sqrt{5-x}<3$; $\sqrt{x+7}>-3$.

T8 Se $f(x)=3x^2+3$ quale è l'espressione di $f(f(a))$?

[a] $3a^2+3$ [b] $3(3a^2+3)^2+3$

[c] 0 [d] nessuna delle precedenti

T9 Le funzione $f(g(x))=\dfrac{1-2^x}{1+2^x}$ è composta mediante le funzioni

[a] $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, $g(x)=2^x$

[b] $f(x)=2^x$, $g(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$

[c] $f(x)=1-2^x$, $g(x)=1+2^x$

T10 L'inversa della funzione coseno in $[\pi, 2\pi]$ è

[a] $\operatorname{arcsen}(x) + \pi$ [b] $\operatorname{arcsen}(x)$ [c] $\operatorname{arcsen}(x + \pi)$ [d] non esiste.

T11 l'inversa della funzione $e^{x-1} + 2$ è

[a] $\log(x - 1) + 2$ [b] $1 + \log(x - 2)$ [c] $\dfrac{1}{e^{x-1} + 2}$ [d] non esiste.

CACCIA ALL'ERRORE

1 L'equazione fratta

$$\frac{x-1}{x+2} > 0$$

è equivalente a $(x - 1)(x + 2) > 0$. Le soluzioni di quest'ultima sono le x per le quali entrambi i fattori $x - 1$ e $x + 2$ sono positivi. Quindi la soluzione della disequazione data è $x > 1$.

2 L'equazione $\dfrac{x-1}{x+2} > 2x$ è equivalente a $(x - 1) > 2x(x + 2)$ e quindi a $2x^2 + 3x + 1 < 0$.