## Integrali II

**12.1** Calcolare l'integrale $\int_0^1 e^{x^2} dx$ usando la regola dei trapezi e 6 intervalli. Ripetere il calcolo con 12 intervalli.

**12.2** Un corpo si muove lungo una direzione assegnata con funzione accelerazione $e^{-t^2}$, $t \in [0, 2]$. Usando la regola del punto medio, calcolare approssimativamente la sua velocità in $t = 1$ sapendo che la velocità iniziale è zero.

**12.3** Una particella si muove lungo una linea retta con velocità $v(t) = e^{t^3-1}t^2$, $t \in [0, 1]$. Calcolare la lunghezza dello spazio percorso.
Ripetere l'esercizio con $v(t) = t - .5$, nello stesso intervallo di tempo.

**12.4** (*) Disegnare approssimativamente il grafico della funzione $G(x) = \int_0^x f(t)dt$ dove $f$ è la funzione il cui grafico è in Figura 13.

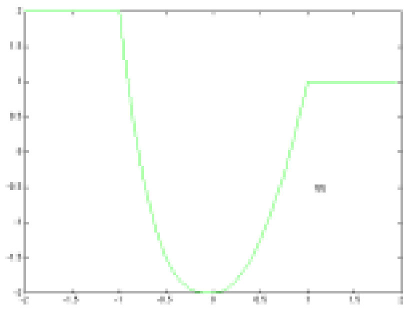

**Figura 13** Grafico della funzione $f$.

**12.5** (*) L'espressione analitica della funzione $f$ del precedente esercizio è:

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } t \in [-2, -1) \\ -4\,t^3 - 2 & \text{se } t \in [-1, 0) \\ 3\,t^2 - 2 & \text{se } t \in [0, 1) \\ 1 & \text{se } t \in [1, 2). \end{cases}$$

Calcolare $G(x) = \int_0^x f(t)dt$. Confrontare il grafico di questa funzione con il grafico ottenuto nel precedente esercizio.

**12.6** Sono assegnate le funzioni

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad F(x) = |x| \qquad G(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x > 0 \\ -x + 3 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Mostrare che $F$ e $G$ sono entrambe primitive di $f$, ma la loro differenza non è costante. Spiegare perché questo non è in disaccordo con la teoria.

**12.7** Determinare una funzione $y$ tale che $y"(x) = x + \sin(x)$ e tale che $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$.

**12.8** Calcolare gli integrali seguenti usando la formula fondamentale del calcolo

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin(2x)}{\cos(x)} dx \qquad\qquad \int_4^9 2\ y\ \sqrt{y}\, dy.$$

**12.9** È data la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 2\sin(t) & \text{se } \ t \leq 0) \\ t^3 & \text{se } \ t \in [0,1] \\ te^{t^2} + 1 & \text{se } \ t > 1 \end{cases}$$

Trovare l'epressione di $G(x) = \int_0^x f(x)\ dx$.

**12.10** Calcolare l'area della parte di piano limitata superiormente da $y = x + 6$, inferiormente da $y = x^2$ e ai lati dalle rette $x = 0$ e $x = 2$.

**12.11** Calcolare l'area della parte di piano compresa fra la curva $y = x^2$, e la retta $y = x + 6$.

**12.12** Mostrare che se $f$ è una funzione dispari, integrabile in $[-a, a]$ allora il suo integrale su tale intervallo è zero. Cosa si può dire invece se la funzione è pari?

**12.13** Calcolare l'area della parte di piano compresa fra le curve $y = \frac{1}{9+x^2}$, l'asse $x$ e le rette $x = \pm\sqrt{3}.$

**12.14** Trovare l'area della parte di piano compresa fra le curve $y = \sqrt{x}$, $y = -x + 6$ e la retta $y = 1$.

**12.15** (**) Utilizzare il teorema fondamentale del calcolo integrale e la regola di derivazione delle funzioni composte per mostrare che

$$\Big(\int_a^{g(x)} f(t)dt\Big)' = f(g(x))\ g'(x). \tag{1}$$

**12.16** (*) Usando la formula (1) eseguire le seguenti derivate

$$\Big(\int_a^{x^3} \frac{1}{t} dt\Big)' \qquad\qquad \Big(\int_3^{\sin(x)} \frac{1}{1+t^2} dt.\Big)'$$

**12.17** (*) Usando la formula (1) mostrare che

$$\Big(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt\Big)' = \ f(g(x))\, g'(x) - f(h(x)\, h'(x). \tag{2}$$

**12.18** (*) Usando la formula (2) calcolare la derivata $\Big(\int_{x^2}^{x^3} \sin^2(x)^2 dt\Big)'$.

TEST 3

**T1** I punt critici della funzione $f(x) = x^4 - 4x^3$ sono $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$. Si ha:

[a] $(0,0) =$ maxrel. e $(3,-27) =$ min.rel

[b] $(0,0) =$ min.rel e $(3,-27) =$ maxrel.

[c] $(0,0) =$ flesso e $(3,-27) =$ min.rel.

**T2** Il polinomio di Mc Laurin di grado 3 della funzione $x^2 \sin(x)$ è

[a] $x + x^2 + x^3$ [b] $x^3$ [c] $x^2 - x^3$

**T3** Il polinomio di Mac Laurin di grado 2 della funzione $e^x - \cos(x)$ è

[a] $x + x^2$ [b] $2 + x + \frac{3}{2}x^2$ [c] $1 + x + x^2$.