5. Successioni

5.1 Le successioni $\{(-1)^n\}\,, \{-n^2+n+1\}\,, \left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}$ sono limitate?

5.2 Usando la definizione di limite, mostrare che $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n-1} = 1$

5.3 Dire quali delle seguenti successioni sono limitate, quali crescenti e quali decrescenti, quali né crescenti né decrescenti

$$\left\{3^{n-1}\right\} \qquad \{\sin(2n\pi)\} \qquad \left\{\frac{1}{n^2}\right\} \qquad \left\{\frac{2n^2}{n^2+1}\right\}$$

5.4 Una successione si dice infinitesima se converge a zero. Usando un teorema di confronto mostrare che la successione $\left\{\frac{\sin(n)}{n}\right\}$ è infinitesima. Più in generale mostrare che il prodotto di una succesione infinitesima e di una limitata è una successione infinitesima.

5.5 Usando i limiti di funzioni elementari, trovare i limiti delle seguenti successioni

$$\left\{\sin\frac{1}{n}\right\} \qquad \left\{\frac{n+1}{n}\right\} \qquad \{(0.5)^n\} \qquad \left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}.$$

Sugg: per il primo usare il limite noto $\lim_{x\to 0}\sin(x) = 0$ e la successione $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ e il teorema....

5.6 Usando i limiti di funzioni elementari, trovare i limiti delle seguenti successioni

$$\left\{\frac{2^n-2^{-n}}{2^n+2^{-n}}\right\} \qquad \left\{\frac{1-n^2}{n+3n^2}\right\} \qquad \left\{\frac{(-1)^n}{n^2}\right\} \qquad \left\{\frac{n^2+1}{n+1}\right\}.$$

5.7 Usando i limiti di funzioni elementari, trovare i limiti delle seguenti successioni

$$\left\{n^2(\cos(\frac{1}{n})-1)\right\}, \qquad \left\{\frac{n+3}{2n-1}\right\}, \qquad \left\{\frac{\sin(\frac{1}{n^2+1})}{\frac{1}{n^2+1}}\right\}, \qquad \left\{\frac{n^4+3}{2n+1}\right\}.$$

5.8 Scegliendo delle opportune successioni che tendono a $+\infty$ e a $-\infty$, mostrare che non esistono i limiti

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sin(x) \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\cos(x).$$

5.9 Usando il criterio del rapporto mostrare che la successione $\left\{\dfrac{n^\alpha}{a^n}\right\}$ tende a zero se $a > 1$ e $\alpha > 0$.

5.10 Mostrare che la successione $\left\{\frac{a^n}{n!}\right\}$ tende a zero se $a > 0$. Per $a > 1$ usare il criterio del rapporto.

5.11 Usando il limite di funzioni razionali (vedi Formulario e la teoria, calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_p\, n^p + a_{p-1}n^{p-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_o}{b_q\, n^q + b_{q-1}n^{q-1} + \ldots\ldots + b_1 x + b_o}$$

nei tre casi $p = q,\ p > q$ e $p < q$.

5.12 Dopo ever verificato che le seguenti successioni sono tutte infinitesime, trovare quella che è di ordine superiore

$$\{2^{-n}\} \qquad \left\{\frac{1}{n^2}\right\} \qquad \left\{\frac{1}{\log(n)}\right\} \qquad \left\{\sin(\frac{1}{n})\right\}.$$

5.13 Dopo aver verificato che le seguenti successioni sono infinite, ordinarle dall'infinito più piccolo al più grande.

$$\{3^n\} \qquad \left\{n^3\right\} \qquad \{n\log(n)\} \qquad \{n + \log(n)\} \qquad \left\{n^5\right\}.$$

5.14 Dopo aver verificato che le seguenti successioni sono tutte infinite, trovare quella che è di ordine superiore

$$\{2^n\} \qquad \left\{n^2\right\} \qquad \{n\log(n)\} \qquad \{n^n\} \qquad \{n!\}.$$

Sugg: Ricordare i limiti delle successioni $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ e $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$.

5.15 È data la successione $\{e^n\}$; trovare

[i] una successione che è asintotica alla data

[ii] una successione che è infinita di ordine superiore

[ii] una successione che è infinita di ordine inferiore.

5.16 È data la successione $\{3^{-n}\}$; trovare

[i] una successione che è asintotica alla data

[ii] una successione che è infinitesima di ordine superiore

[ii] una successione che è infinitesima di ordine inferiore.

5.17 Calcolare il limite

$$\lim_n \frac{2^n + n^5 + n\log(n) + 1}{e^n - n^5 - 2}$$

confrontando gli infiniti che compongono il numeratore e il denominatore.