Proprietà globali delle funzioni continue. Funzione inversa

6.1 Provare che la funzione $f(x) = 2^{-x} - x$ ha un solo zero nell'intervallo $(0,1)$. Approssimare a meno di 10^{-3} con il metodo di bisezione.

6.2 Ripetere l'esercizio precedente con la funzione $g(x) = e^{-4x} + e^{-x} - 1$.

6.3 (*) Mostrare che $f(x) = x^n - 3$, $n > 1$, ha un solo zero positivo. Ripetere per $f(x) = x^n - .5$.
Sugg: Per provare che c'è almeno uno zero usare il teorema degli zeri. Per provare che è unico usare che x^n è crescente in ogni intervallo $[0, c]$.
Con la stessa dimostrazione si vede che se n è un intero positivo e se $a > 0$ prima allora esiste uno ed un sol numero positivo tale che $x^n = a$. Abbiamo così provato che l'equazione $x^n = a$ ha una ed una sola radice positiva (fatto che abbiamo enunciato in precedenza).

6.4 Mostrare che l'immagine della funzione $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $x \in \mathbf{R}$,è l'intervallo $(0,1]$. Usare il Corollario al teorema dei valori intermedi.

6.5 Sia f un polinomio di grado $n \geq 1$. Supponiamo che il primo e l'ultimo coefficiente abbiano segni opposti. Dimostrare che esiste almeno un punto $\overline{x} > 0$ tale che $f(\overline{x}) = 0$.

6.6 (*) Sia f una funzione continua sull'intervallo $[0,1]$ tale che $0 \leq f(x) \leq 1$ per ogni x in $[0,1]$. Dimostrare che esiste almeno un punto $\overline{x}$ in $[0,1]$ tale che $f(\overline{x}) = \overline{x}$. Interpretare e illustrare il risultato geometricamente.
Sugg: applicare il teorema degli zeri alla funzione $g(x) = f(x) - x$.

6.7 Sia f una funzione derivabile due volte in un intervallo $[a, b]$ Mostrare che se esistono tre punti dell'intervallo in cui f si annulla, allora f'' deve annullarsi in almeno un punto.

6.8 Per ciascuna delle seguenti equazioni trovare un intervallo contenente una soluzione e, utilizzando il metodo di bisezione e un calcolatore, determinarne una approssimazione:

$$\tan x = e^x, \qquad \log|x| = \cos x, \qquad \frac{\sin x}{x} = \sqrt{|x|}.$$

6.9 (*) Sia f una funzione continua su $\mathbf{R}$ tale che $\lim_{x \to -\infty} f(x) < 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) > 0$. Dimostrare che esiste almeno un punto $\overline{x}$ tale $f(\overline{x}) = 0$.

6.10 Risolvere per via grafica la disequazione $\sin(x) < \sin(2x)$ $x \in [0, 2\pi]$.

6.11 Trovare l'espressione della funzione inversa della funzione $\log(\frac{1-x}{x})$ in $(0,1)$.

6.12 Trovare l'espressione della funzione inversa della funzione $\frac{1}{e^x+1}$ in $\mathbf{R}$.

6.13 (**) Stabilire se esiste l'inversa della funzione $f(x) = \sin(x)$, $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. In caso positivo disegnare il grafico. Inoltre trovare una espressione di tale inversa in termini della funzione $\arcsin(x)$.

6.14 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{se } x \in [0,1] \\ -x-1 & \text{se } x \in [-1,0). \end{cases}$ Verificare che è invertibile nel suo insieme di definizione, ma non è monotona.

6.15 Per ciascuna delle seguenti funzioni trovare il campo di esistenza D, i limiti agli estremi di D, e tracciare il grafico usando i grafici di funzioni elementari

$$\log(\frac{1+x}{x}), \qquad \frac{1}{e^x+1}, \qquad \log(\sqrt{x-4}).$$

6.16 Per ciascuna delle seguenti funzioni trovare il campo di esistenza D, i limiti agli estremi di D, e tracciare il grafico usando i grafici di funzioni elementari

$$\log(\frac{1-x^2}{1+x^2}), \qquad e^{\frac{1}{x}}, \qquad e^{x^2}, \qquad e^{-x^2}.$$

6.17 In Figura 6 compaiono i grafici delle funzioni f_1, f_2, f_3, f_4; associare a ciascuna funzione il grafico giusto.

$$f_1(x) = \frac{x^2-9}{x^2+1} \qquad f_2(x) = |x|2^{-|x|} \qquad f_3(x) = x^2 2^{-x^2} \qquad f_4(x) = (x^2-9)e^{-x^2}.$$

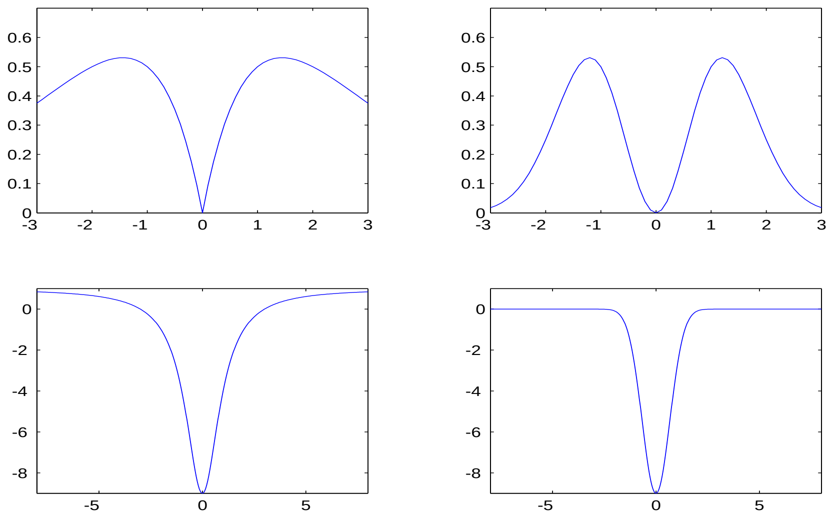

Figura 6: Grafici delle funzioni f_1, f_2, f_3, f_4

7. Limiti notevoli. Infiniti e infinitesimi.

7.1 Usando i limiti notevoli e la tecnica del cambiamento di variabili, calcolare i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} x^2(2^{\frac{1}{x^2}}-1) \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+2^{-x})}{2^{-x}}.$$

7.2 Verificare che per $x\to 1$ $\log(x)\sim(x-1)$ ($\log(x)$ è asintotica a $(x-1)$).

7.3 Trovare due funzioni f e g che sono asintotiche per $x\to 1$.

7.4 Per ciascuna delle seguenti coppie f e g di infinitesimi in zero stabilire quale delle due è di ordine superiore all'altro.

$$f(x)=\log(1+x^3) \quad g(x)=x\sin(x); \qquad\qquad h(x)=e^{x^2}-1, \quad l(x)=\mathrm{arctg}(x).$$

7.5 Fra le seguenti funzioni, tutte infinite in $+\infty$, indicare quella di ordine inferiore e quella di ordine superiore.

$$\log(x) \qquad\qquad 5^x \qquad\qquad (x^2+1)^3 \qquad\qquad x5^x$$

Nella loro somma $\log(x)+5^x+(x^2+1)^3+x5^x$ quali sono i termini "trascurabili"?

7.6 Fra le seguenti funzioni, tutte infinitesime in zero, indicare quella di ordine inferiore e quella di ordine superiore.

$$\sqrt[7]{x} \qquad\qquad \sin(x) \qquad\qquad x^3 \qquad\qquad x^{3/2}$$

Nella loro somma $\sqrt[7]{x}+\sin(x)+x^2+x^3$ quali sono i termini "trascurabili"?

7.7 Usando la regola di eliminazione dei termini trascurabili, mostrare che

$$\lim_{x\to0^+} \frac{e^{\sqrt{x}}-1+\sin(x^2)+\log(x+1)}{\sin(\sqrt{x})+x^2+xe^x} = 1.$$

7.8 Usando la regola di eliminazione dei termini trascurabili, calcolare

$$\lim_{x\to0} \frac{x+x\sqrt{|x|}}{\sin 2x+x^2}.$$

8. Derivata

8.1 Scrivere la definizione di derivata di $f(x) = x^2 + 1$.

8.2 Scrivere la definizione di derivata di $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$.

8.3 Calcolare il limte

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

8.4 Una macchina si muove lungo una strada dritta con la legge oraria del moto $s(t) = 2.13t^2+3t$, dove t è il tempo, espresso in secondi e s la distanza in "piedi" (1 piede = 30.48 cm).

[a] Calcolare la velocità media negli intervalli $[23, 24]$ e $[23, 23.1]$

[b] Calcolare la velocità istantanea nell'istante $t = 23$.

[c] Calcolare l'accelerazione nell'istante $t = 1$.

8.5 Dire per quali valori di x sono derivabili le seguenti funzioni

$$\sin(|x|) \qquad \cos(|x|) \qquad e^{|x|} \qquad |x^2-1|.$$

Stabilire inoltre se nei punti in cui non sono derivabili esistono la derivata destra e la derivata sinistra. Disegnare il grafico delle funzioni.

8.6 Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

$$7^{\sin(x)}, \qquad \log(1+\cos^2(x)), \qquad \mathrm{tg}(3^{x^2}), \qquad \log(\log(x)).$$

8.7 Calcolare le derivate delle funzioni

$$x^{\frac{1}{x}}, \qquad e^{-x}(\sin(x)+\cos(x)), \qquad \log\frac{1-x}{1+x}, \qquad \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \qquad \frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

8.8 Studiare continuità e derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \le 0 \\ 1-x^2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ \log(x) & \text{se } x \ge 1. \end{cases}$$

8.9 Usando il teorema sulla derivata della funzione composta, calcolare la derivata di $\log_a g(x)$.

8.10 Sia f una funzione derivabile. Scrivere la definizione di derivata di $xf(x^2)$.

8.11 Siano f e g due funzioni derivabili tali che $f(0) = 1$, $f'(0) = 10$, $f'(3) = 5$ e $g(1) = 3$, $g'(1) = 7$. Calcolare la derivata di $f(g(f(x))$ in zero.

8.12 Stabilire continuità e derivabilità nell'origine della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

8.13 Stabilire continuità e derivabilità nell'origine della funzione

$$h(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Confrontare con il risultato dell'esercizio precedente.

8.14 Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x)$ nell'intervallo $[-1, 1]$. Discutere il risultato.

8.15 Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \arccos(\cos(x))$ nell'intervallo $[0, \pi]$. Discutere il risultato.

8.16 Scegliere i parametri a e b affinchè sia continua e derivabile in tutto $\mathbf{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax + b & \text{se } x < 0 \\ e^x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

8.17 Calcolare la derivata delle seguenti funzioni, dove esiste. Studiare i punti di non derivabilità, stabilendo se si tratta di punti angolosi (in questo caso calcolare la derivata destra e sinistra), punti di cuspide, flessi a tangente verticale e tracciando un grafico locale della funzione in quei punti. Prima di eseguire il calcolo della derivata, cercare di prevedere quali saranno i punti di non derivabilità, in base alla forma della funzione.

$$f_1(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1 \qquad f_3(x) = \frac{(x^3 + 5)}{2x}$$

$$f_2(x) = \frac{(x-1)(x-7)}{(x-2)(x-6)} \qquad f_4(x) = \frac{2x^2 + 6x + 3}{2x + 1}$$

8.18 Ripetere l'esercizio precedente per le seguenti funzioni

$$f_5(x) = \frac{(x^2 - 4)}{(x-1)^2} \qquad f_7(x) = \frac{|x|}{(x^2 - 4)}$$

$$f_6(x) = \frac{(x-2)}{(x^2 + 4)} \qquad f_8(x) = \frac{|x-1|}{x^2 - 4}$$

8.19 Ripetere l'esercizio precedente per le seguenti funzioni

$$f_9(x) = |x|e^{-x^2} \qquad f_{10}(x) = e^x(x^2 + 2x - 1).$$

8.20 Ripetere l'esercizio precedente per la funzione $f_{11}(x) = e^{-x^2}(1 - x^2)$.

8.21 Ripetere l'esercizio precedente per le funzioni

$$f_{12}(x) = \text{artg}(x^2 - 1) \qquad\qquad f_{13}(x) = \text{artg}|x^2 - 1|.$$

8.22 Calcolando le derivate delle funzioni f_1, f_2 fino a f_{13} dei precedenti esercizi, analizzare concavità, convessità e flessi.

8.23 Calcolando la derivata delle funzioni sottoelencate, trovare gli intervalli in cui sono crescenti o decrescenti.

[a] $x^2 - 2$	[b] $x^3(x-5)^2$	[c] $\log(1 + x^2)$
[d] $(x^2 - 9)^2$	[e] $x^2 + 2x + 2$	[f] $\frac{1}{1+x^4}$,

8.24 Usando la regola de l'Hopital calcolare i limiti notevoli.

8.25 Usando la regola de l'Hopital verificare che per $x \to +\infty$ 2^x è un infinito di ordine superiore a x^n per ogni n. Verificare inoltre che per $x \to -\infty$ 2^x è un infinitesimo di ordine superiore a x^{-n} per ogni n.

8.26 Usando la regola de l'Hopital calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\Big).$$

8.27 (****) Ecco un esempio di funzione crescente in un punto ma non crescente in un intorno del punto:

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Usando un software grafico disegnane il grafico.
1. Provare che è continua e derivabile in tutto $\mathbf{R}$ e che la derivata è

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Per provare che è derivabile nell'origine fare il limite del rapporto incrementale. Si noti che il limite della derivata f' in zero non esiste: questo è un esempio istruttivo per la regola dell'Hopital, in quanto non esiste il limite della derivata prima, però esiste il limite del rapporto incrementale (vedere il capitolo *Applicazioni della derivata*).
Si noti inoltre che la funzione f' non è continua in zero.
2. Per studiare la funzione in un intorno dell'origine si può osservare (provare) che

$$x - x^2 \leq f(x) \leq x + x^2$$

Da qui si vede subito che f è crescente in 0. Fare un plot delle tre funzioni $x - x^2$, $f(x)$, $x + x^2$.

TEST 2

T1 Dopo aver disegnato il grafico della successione $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ dire quali delle risposte è esatta

[a] converge a 1 [b] diverge a $+\infty$ [c] converge a 0 [d] irregolare

T2 Siano $a_n = -n^2 + \sqrt{n} + \log(n+1)$ e $b_n = n^5 + 3n$. Allora $\lim \dfrac{a_n}{b_n}$ è uguale a

[a] ∞ [b] $\dfrac{1}{3}$ [c] 0 [d] 5

T3 La successione $\{-n^2 + n - 1\}$ è

[a] super.limitata [b] infer.limitata [c] convergente [d] divergente

T4 Il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x + x^2}{2^x + x^3}$ è

[a] 0; [b] $\dfrac{3}{2}$; [c] $+\infty$; [d] $\dfrac{2}{3}$

T5 La successione $\left\{\dfrac{n^2 + n\sqrt{n}}{4n^2 + n}\right\}$ tende a

[a] 0; [b] $+\infty$; [c] $\dfrac{1}{4}$; [d] è irregolare

T6 Sia $f(x) = x^2 - 1$ il rapporto incrementale in 0 $\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$ è

[a] h [b] $\dfrac{h^2 - 1}{h}$ [c] $-h$ [d] $\dfrac{h - 1}{h}$ [e] nessuno degli altri.

T7 La derivata di $e^{x\sin(x)}$ è

[a] $e^{x\sin(x)}$; [b] $e^{x\sin(x)}(\sin(x) + x\cos(x))$; [c] $e^{x\cos(x)}$; [d] $e^x + e^{\sin(x)}$

T8 Sia $F(x) = g(f(x)$, dove $f(x) = (x^2 - 1)^3$, $g(1) = 2$ e $g'(1) = 4$. Allora $F'(\sqrt{2}) =$

[a] $\sqrt{2}$; [b] $2\sqrt{2}$; [c] $24\sqrt{2}$; [d] 4 [e] nessuna delle altre

T9 Fra le seguenti funzioni indicare quelle non sono derivabili in almeno un punto del loro insieme di definizione.

[a] $(x^2 - 1)^{10}$; [b] $10^{|x^2-1|}$; [c] $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$; [d] $\sin^3(x)$

T10 La pendenza della retta tangente al grafico dell'equazione $y^2 + 2x = 3x^2$ in $(1, -1)$ è

[a] 0; [b] -2; [c] $\frac{1}{4}$; [d] nessuna delle altre

T11 La pendenza della retta tangente al grafico di $y = 0.234x^2 - 0.131x + 0.132$ nel punto $(1, 0.235)$ è

[a] 0.711 [b] 0.337 [c] 0.103 [d] 0.507 [e] nessuna delle altre

VERO O FALSO

1 La funzione $\log(|x|)$ è continua e derivabile in tutto il suo insieme di definizione.

2 Ogni funzione continua è derivabile.

3 La derivata della funzione $|f(x)|$ è
$$\frac{f(x)}{|f(x)|} f'(x)$$

4 Una funzione definita in zero, dispari, deve annullarsi nell'origine.

5 Sia f una funzione pari, allora, se k è un numero dispari, deve essere $f^{(k)}(0) = 0$.

6 Sia f una funzione dispari, allora, se k è un numero pari, deve essere $f^{(k)}(0) = 0$.