Integrali

dicembre 2001

Integrali immediati

- $\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$, dove $a \neq -1$ e $x > 0$ se $a \notin \mathbb{Z}$.
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \log |x| + c$, con $x \neq 0$.
- $\int e^x \, dx = e^x + c$.
- $\int \cos x \, dx = \sin x + c$.
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$.
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$, con $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -cotan\, x + c$, con $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\int \cosh x \, dx = \sinh x + c$.
- $\int \sinh x \, dx = \cosh x + c$.
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$, con $-1 < x < 1$.
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$.
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = settsinh\, x + c = \log(x + \sqrt{x^2+1}) + c'$.
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = settcosh\, x + c = \log(x + \sqrt{x^2-1}) + c'$, con $x > 1$.

Metodi di integrazione

- **Integrazione per sostituzione**

  $\int f(\varphi(x))\varphi'(x) \, dx = F(\varphi(x)) + c$, dove F è una primitiva di f: $F'(x) = f(x)$.

  Si può scrivere $\varphi(x) = t$, $dt = \varphi'(x) \, dx$ e $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) \, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) \, dt$.

- **Integrazione per parti**

  $\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$, dove f e g sono funzioni derivabili. Si ricordi che ciò segue da $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Integrazione di funzioni razionali

$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$, dove $f(x)$ e $g(x)$ sono due polinomi in x. Se $grado(f) \leq grado(g)$, allora esistono polinomi $q(x)$ ed $r(x)$ tali che $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, con $grado(r) < grado(g)$. Così si può scrivere $\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$ e basta considerare il caso $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$, con $grado(f) < grado(g)$.

1. $\int \frac{b}{x-\alpha}\,dx = b\log|x-\alpha| + c$, dove $x \neq \alpha$.

2. $\int \frac{ax+b}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}\,dx$, dove $x \neq \alpha_1, \alpha_2$.

   Si trovano due costanti $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ tali che $\frac{ax+b}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)} = \frac{A_1}{(x-\alpha_1)} + \frac{A_2}{(x-\alpha_2)}$, risolvendo il sistema lineare $\begin{cases} A_1 + A_2 = a \\ \alpha_2 A_1 + \alpha_1 A_2 = -b \end{cases}$

   L'integrale diventa $\int \frac{A_1}{(x-\alpha_1)}\,dx + \int \frac{A_2}{(x-\alpha_2)}\,dx$ (v. caso 1).

3. $\int \frac{b}{(x-\alpha)^2}\,dx = \frac{-b}{x-\alpha} + c$, con $x \neq \alpha$.

4. $\int \frac{ax+b}{(x-\alpha)^2}\,dx$.

   Si trovano due costanti $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ tali che $\frac{ax+b}{(x-\alpha)^2} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2}$, risolvendo il sistema lineare $\begin{cases} A_1 = a \\ -\alpha A_1 + A_2 = b \end{cases}$

   L'integrale diventa $\int \frac{A_1}{x-\alpha}\,dx + \int \frac{A_2}{(x-\alpha)^2}\,dx$ (v. casi 1 e 3).

5. $\int \frac{1}{x^2+\alpha x+\beta}\,dx$, con $\Delta := \alpha^2 - 4\beta < 0$.

   Usando il completamento dei quadrati, si può scrivere

   $x^2 + \alpha x + \beta = (x + \frac{\alpha}{2})^2 - \frac{\alpha^2}{4} + \beta = (\frac{2x+\alpha}{2})^2 + (\frac{\sqrt{-\Delta}}{2})^2$.

   L'integrale diventa $\int \frac{dx}{(\frac{2x+\alpha}{2})^2+(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2})^2} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \int \frac{dt}{t^2+1}$, con la sostituzione $t = \frac{2x+\alpha}{\sqrt{-\Delta}}$.

   Così l'integrale è uguale a $\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\, arctan\,(\frac{2x+\alpha}{\sqrt{-\Delta}}) + c$.

6. $\int \frac{ax+b}{x^2+\alpha x+\beta}\,dx$, con $\Delta := \alpha^2 - 4\beta < 0$.

   Poichè $\frac{ax+b}{x^2+\alpha x+\beta} = \frac{a}{2}\frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta} + \frac{2b-a\alpha}{2}\frac{1}{x^2+\alpha x+\beta}$, l'integrale è uguale a $\frac{a}{2}\log(x^2+\alpha x+\beta) + \frac{2b-a\alpha}{2}\int \frac{1}{x^2+\alpha x+\beta}\,dx$ e l'ultimo integrale rientra nel caso precedente.

7. $I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$. Per $n=1$ si ha $I_1 = arctan\, x + c$. Per $n \geq 2$ si integra per parti più volte. Infatti $I_n = \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^n}\,dx = I_{n-1} - \frac{1}{2}\int x\,\frac{2x}{(x^2+1)^n}\,dx = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$.

8. $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx$, si opera la sostituzione $t = \frac{x}{a}$ e si rientra nel caso precedente.

9. $\int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^n}\,dx$, con $\Delta := \alpha^2 - 4\beta < 0$. Si noti che si ha $x^2+\alpha x+\beta = (\frac{2x+\alpha}{2})^2 + (\frac{\sqrt{-\Delta}}{2})^2$, operando la sostituzione $t = \frac{2x+\alpha}{\sqrt{-\Delta}}$, si rientra nel caso 7.

10. $\int \frac{ax+b}{(x^2+\alpha x+\beta)^n}\,dx$, con $\Delta := \alpha^2 - 4\beta < 0$, con $n \geq 2$.

    Poichè $\frac{ax+b}{(x^2+\alpha x+\beta)^n} = \frac{a}{2}\frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^n} + \frac{2b-a\alpha}{2}\frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^n}$, l'integrale è uguale a $\frac{a}{2(1-n)}\frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^{n-1}} + \frac{2b-a\alpha}{2}\int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^n}\,dx$ e l'ultimo integrale rientra nel caso precedente.

11. Ogni polinomio monico $g(x)$ (cioè avente il coefficiente del monomio di grado massimo uguale a 1) si decompone in

    $$g(x) = (x-\gamma_1)^{m_1}\cdots(x-\gamma_r)^{m_r}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{n_1}\cdots(x^2+\alpha_s x+\beta_s)^{n_s},$$

    con le radici $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ distinte e con le coppie $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_s, \beta_s)$ distinte.

    Se $grado(f) < grado(g)$, allora si può scrivere

    $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_{11}}{x-\gamma_1} + \frac{A_{12}}{(x-\gamma_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1m_1}}{(x-\gamma_1)^{m_1}} + \cdots\cdots + \frac{A_{r1}}{x-\gamma_r} + \frac{A_{r2}}{(x-\gamma_r)^2} + \cdots + \frac{A_{rm_r}}{(x-\gamma_r)^{m_r}} + \frac{a_{11}x+b_{11}}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1} + \cdots + \frac{a_{1n_1}x+b_{1n_1}}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{n_1}} + \cdots\cdots + \frac{a_{s1}x+b_{s1}}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1} + \cdots + \frac{a_{sn_s}x+b_{sn_s}}{(x^2+\alpha_s x+\beta_s)^{n_s}}$$

    e gli integrali che intervengono sono stati trattati nei casi precedenti.

Casi particolari

- Sia $p(x)$ un polinomio di grado n ed a una costante non nulla, allora applicando più volte l'integrazione per parti si ottiene

  $\int p(x)\, e^{ax}\, dx = e^{ax}\,(\frac{p(x)}{a} - \frac{p'(x)}{a^2} + \frac{p''(x)}{a^3} - \cdots + (-1)^n \frac{p^{(n)}(x)}{a^{n+1}}) + c.$

- $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\, dx,$ dove $R(x,y)$ è una funzione razionale. Operando la sostituzione $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$, ci si riduce ad integrare una frazione di polinomi.

- $\int R(\sin x, \cos x)\, dx,$ dove $R(x,y)$ è una funzione razionale.

  Si può operare la sostituzione $t = \tan\frac{x}{2}$, quindi $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ e $dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$.

  Se $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, si sostituisca con $t = \cos x$.

  Se $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, si sostituisca con $t = \sin x$.

  Se $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, si sostituisca con $t = \tan x$.

- $\int R(e^{ax})\, dx,$ dove $R(x)$ è una funzione razionale.

  Si opera la sostituzione $t = e^{ax}$.

- $\int \sin(ax)\, \sin(bx)\, dx,$ $\int \sin(ax)\, \cos(bx)\, dx,$ $\int \cos(ax)\, \cos(bx)\, dx.$

  Si usano le seguenti formule trigonometriche:

  $\sin(ax)\, \sin(bx) = \frac{1}{2}\,(\cos((a-b)x) - \cos((a+b)x)),$

  $\sin(ax)\, \cos(bx) = \frac{1}{2}\,(\sin((a-b)x) + \sin((a+b)x)),$

  $\cos(ax)\, \cos(bx) = \frac{1}{2}\,(\cos((a-b)x) + \cos((a+b)x)).$