Soluzione di alcuni esercizi delle Sezioni 7-12

7. Limiti notevoli. Infiniti e infinitesimi.

7.1 Primo limite: operando il cambio di variabili $y = \frac{1}{x^2}$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} x^2(2^{\frac{1}{x^2}} - 1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^{\frac{1}{x^2}} - 1}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to0} \frac{2^y - 1}{y} = \log(2)$$

Secondo limite: operando il cambio di variabili $y = 2^{-x}$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+2^{-x})}{2^{-x}} = \lim_{y\to0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1.$$

7.2 Si ha $\log(x) \sim (x-1)$ per $x \to 1$. perchè $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{\log(x)}{x-1} = \lim_{y\to0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$

7.4 La funzione f è di ordine superiore rispetto a g perchè

$$f(x) = \log(1+x^3) \sim x^3 \qquad\qquad g(x) = x\sin(x) \sim x^2;$$

La funzione h è di ordine superiore rispetto a l perchè

$$h(x) = e^{x^2} - 1 \sim x^2 \qquad\qquad l(x) = \mathrm{arctg}(x) \sim x.$$

7.5 L'infinito di ordine inferiore è $\log(x)$, quello di ordine superiore è $x5^x$. Inoltre $\log(x) + 5^x + (x^2+1)^3 + x5^x \sim x5^x$.

7.6 L'infinitesimo di ordine superiore è x^3, quello di ordine inferiore è $\sqrt[7]{x}$; quindi $\sqrt[7]{x} + \sin(x) + x^2 + x^3 \sim \sqrt[7]{x}$.

7.8 Si ha $x + x\sqrt{|x|} \sim x$ mentre $\sin 2x + x^2 \sim \sin x \sim 2x$. Dunque

$$\lim_{x\to0} \frac{x + x\sqrt{|x|}}{\sin 2x + x^2} = \frac{1}{2}.$$

7.9 La verifica del fatto che sono infinitesime è semplice. Per quanto riguarda Il confronto degli ordini da quella di ordine inferiore a quella di ordine superiore:

$$\left\{\frac{1}{\log(n)}\right\} \qquad \left\{\frac{1}{\sin n}\right\} \qquad \left\{\frac{1}{n^2}\right\} \qquad \{2^{-n}\}.$$

7.10 La verifica del fatto che sono infinite è semplice. Per quanto riguarda Il confronto degli ordini di infinito, dal più piccolo al piu grande:

$$\{n + \log(n)\} \qquad \{n\log(n)\} \qquad \{n^3\} \qquad \{n^5\} \qquad \{3^n\}.$$

7.11 Si ha $\lim \frac{2^n}{n!} = 0$ e $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$; dalla successione di ordine inferiore a quella di ordine superiore:

$$\{n\log(n)\} \qquad \{2^n\} \qquad \{n!\} \qquad \{n^n\}.$$

7.13 Al numeratore l'infinito di ordine superiore è 2^n; al denominatore è e^n. Poichè$e > 2$ il denominatore 'e di ordine superiore al denominatore, e ne segue che il limite è zero.

8 Derivata

8.5 $h(x) = |x^2 - 1|$ è derivabile in tutti i punti in cui i è diversa da zero, cioè $x \neq \mp 1$. Si ha $h'_+(1) = 2$ e $h'_-(1) = -2$ mentre $h'_+(-1) = -2$. e $h'_-(-1) = +2$

8.6 Derivata della prima funzione: dalla formula $(f^g) = e^{g \log f}$ si ha: $7^{\sin(x)} \cos(x) \log_e(7)$.

8.7 Le derivate sono

$$\left(x^{\frac{1}{x}}\right)' = x^{\frac{1}{x}} \frac{1 - \log(x)}{x^2} \qquad\qquad (e^{-x}(\sin(x) + \cos(x)))' = -2e^{-x}\sin(x)$$

8.8 Ciascuna delle tre funzioni è derivabilie all'interno del corrispondente intervallo. Verifichiamo se nei punti 0 e 1 le derivate sinistra e destra sono finite e uguali. Nell'origine le due derivate destra e sinistra sono uguali a zero, mentre in 1 la derivata destra è uguale a 1 e la sinistra uguale a -2.

8.9 La derivata di $\log_a g(x)$ è $\frac{1}{g(x)} g'(x)$ (ricordare che, perchè la funzione sia definita occorre che $g \geq 0$).

8.12 Poiché $0 \leq |f(x)| \leq |x|$ si ha, per il teorema dei carabinieri, che la funzione tende a zero nell'origine, ne segue che è continua in zero e quindi in tutto il suo insieme di definizione , che è $\mathbf{R}$. Nei punti diversi dall'origine è derivabile. Il rapporto incrementale nell'origine è

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \sin\frac{1}{x}.$$

Quindi il limite non esiste e quindi in questo punto non è derivabile.

8.13 Poiché $0 \leq |f(x)| \leq |x|$ si ha, per il teorema dei carabinieri, che la funzione tende a zero nell'origine, ne segue che è continua in zero e quindi in tutto il suo insieme di definizione , che è $\mathbf{R}$. Nei punti diversi dall'origine è derivabile. Il limite del rapporto incrementale nell'origine è

$$\lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$$

Quindi anche in questo punto è derivabile. Ne segue che $h(x)$ è continua e derivabile dappertutto.

8.14 La derivata della funzione è zero, infatti la funzione è costante in quanto nell'intervallo $[-1, 1]$ si ha

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

8.15 La derivata è 1 perchè nell'intervallo $[0, \pi]$ si ha

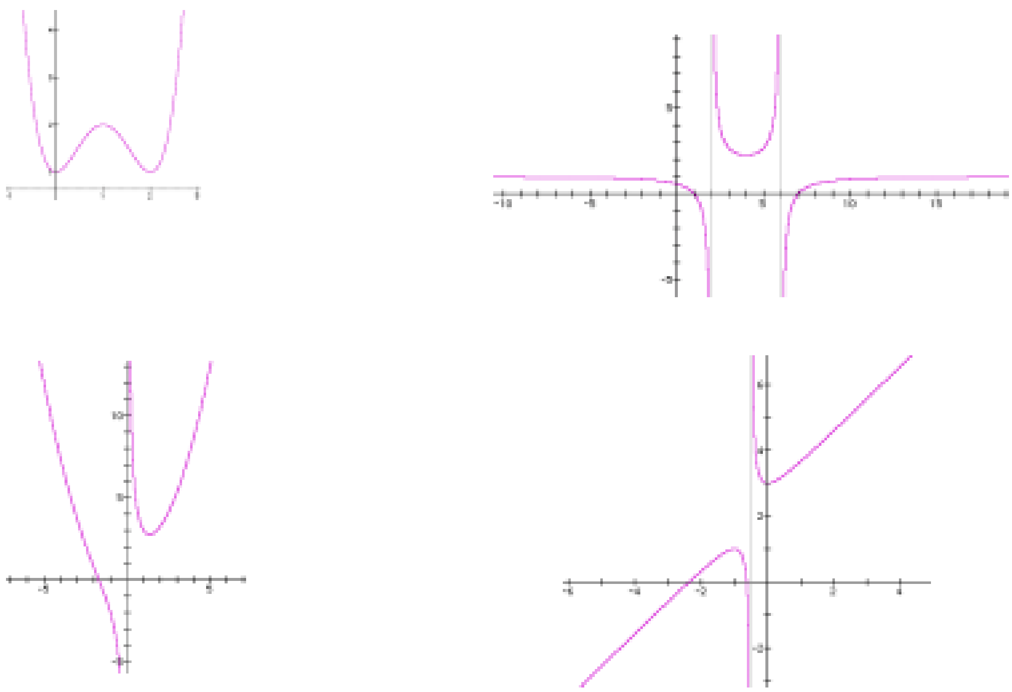
$$f(x) = \arccos(\cos(x)) = x.$$

8.16 Le due funzioni $-x^2 + ax + b$ e e^x sono continue e derivabili in $\mathbf{R}$. Quindi dobbiamo assicurarci la continuità e derivabilità nel punto di raccordo, l'origine. Perchè sia continua in zero occorre che $b = 1$. Per garantire la derivabilità bisogna che la derivata destra e la derivata sinistra in zero siano uguali. Esse sono 1 e a, quindi deve essere $a = 1$. Perciò la funzione è $-x^2 + x + 1$.

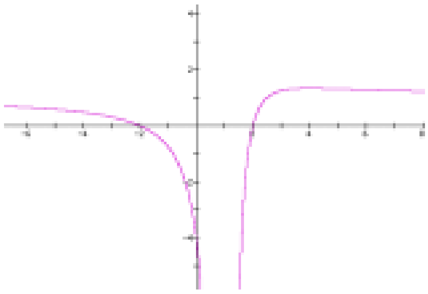
8.22 Studiamo solo la funzione f_1, delle altre forniamo solo il grafico.
La funzione f_1 è un polinomio, perciò è definita in tutto $\mathbf{R}$ e possiede derivate di ogni ordine. Tende a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$. Le derivate prima e seconda sono, nell'ordine

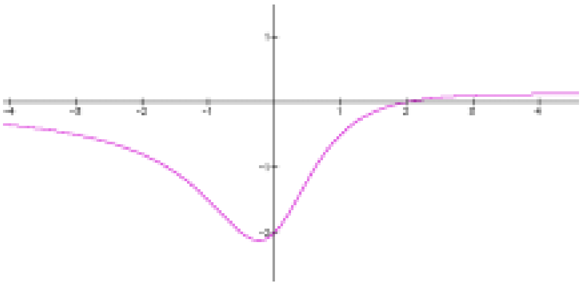
$$f_1'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x \qquad\qquad f_1''(x) = 12x^2 - 24x + 8.$$

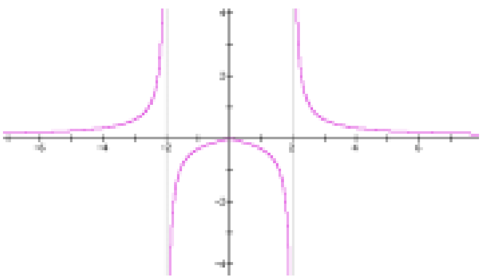
La derivata prima si annulla nei punti $x_1 = 1, x_2 = 2$. La derivata prima è positiva negli intervalli $(0,1)$ e $(2,+\infty)$ e negativa in $(0,1)$ e $(2,+\infty)$ Quindi f_1 è crescente in $(0,1)$ e $(2,+\infty)$ed è decrescente in $(0,1)$ e $(2,+\infty)$. Ci sono due punti di flesso $z_1 = 2 - \sqrt{\frac{10}{3}}$ e $z_2 = 2 + \sqrt{\frac{10}{3}}$. La funzione rivolge la concavità verso l'alto negli intervalli $-\infty, z_1$ e $z_2, +\infty$, rivolge la concavità verso il basso nell'intervallo z_1, z_2.
I grafici delle funzioni f_1, f_2, f_3, f_4 sono, nell'ordine,

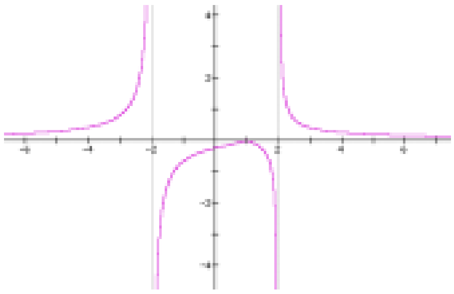


I grafici delle funzioni f_5, f_6, f_7, f_8 sono, nell'ordine,

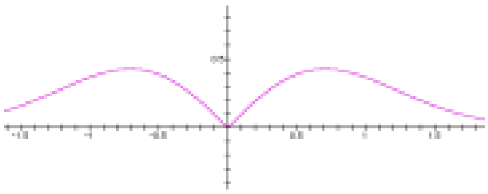


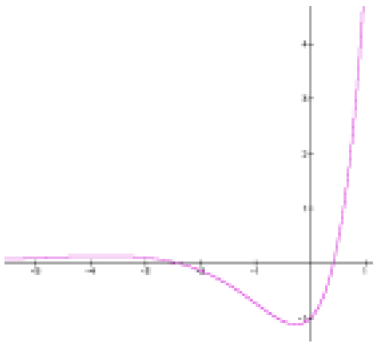




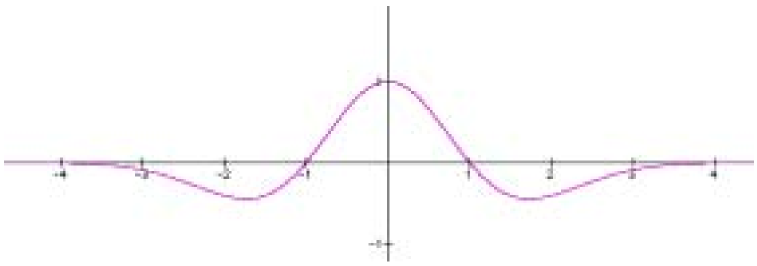


I grafici delle funzioni f_9, f_{10} sono, nell'ordine,





Il grafico della funzione f_{11} è



8.27

1. Per $x \neq 0$ la funzione è continua e derivabile perchè prodotto e somma di funzioni derivabili.

La funzione è derivabile anche in zero. Il limite del rapporto incrementale in zero è

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1 - x\sin(\frac{1}{x}) = 0$$

perchè $0 \le |x\sin(\frac{1}{x})| \le |x|$. Quindi la funzione è derivabile in zero.
In Figura 1 compare il grafico della funzione f.
2. Usiamo la relazione

$$x - x^2 \le f(x) \le x + x^2 \tag{1}$$

per provare che la funzione è crescente in 0. Per (1), poiché $x + x^2 \le 0$ se $x \in [-1,0]$, si ha che

$$f(x) \le x + x^2 \le 0 \qquad x \in [-1,0]. \tag{2}$$

Viceversa, poiché $0 \le x - x^2$ se $\in [0,1]$, si ha

$$0 \le x - x^2 \le f(x). \qquad x \in [0,1] \tag{3}$$

Poiché $0 = f(0)$, da (2) e (3) segue che, $f(x) \le f(0)$ se $-1 \le x \le 0$ mentre $f(0) \le f(x)$ se $0 \le x \le 1$. La Figura 2 illlustra tre funzioni $x - x^2$, $f(x)$, $x + x^2$.

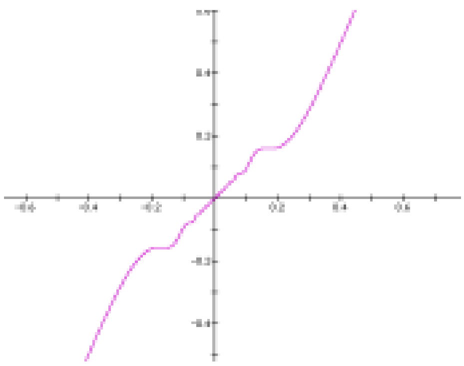


Figura 1 La funzione f.

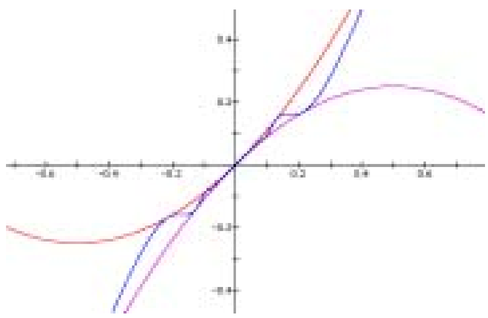


Figura 2 Le tre funzioni $x-x^2$, $f(x)$, $x+x^2$.

10 Formula di Taylor

10.5 Il primo limite è $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^2\text{tg}(x)} = \frac{1}{3}$. Infatti, per $x \to 0$ is ha

$$\sin(x) - x\cos(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x\Big(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big) \sim \frac{x^3}{3}.$$

$$x^2\text{tg}(x) \sim x^3.$$

Il secondo limite è
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg}(x)}{x\log(1+x)-x\sin(x)}=\frac{2}{3}.$$

10.9 Poiché le derivate, calcolate in 3, sono
$$P(3)=26;\qquad P'(3)=25;\qquad P''(3)=18;\qquad P^{(3)}(3)=6,$$
e tutte le successive derivate in 3 sono zero, la forma richiesta è
$$P(x)=26+25(x-3)+9(x-3)^2+(x-3)^3.$$

10.11 Per scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in $x_o=1$ per la funzione $f(x)=\frac{e^x}{x}$,calcoliamo le derivate fino all'ordine 2.
Si ha
$$f'(x)=\frac{xe^x-e^x}{x^2}\qquad\qquad f''(x)=\frac{x^3e^x-2x^2e^x+2xe^x}{x^4}$$
Quindi $f(1)=e$, $f'(1)=0$, e $f''(1)=e$. Quindi il polinomio è
$$p(x)=e+\frac{e}{2}(x-1)^2.$$

10.12 Il resto (vedi Tavole) si può maggiorare cosi̇̀
$$R(\frac{\pi}{60})\leq(\frac{\pi}{60})^{2n+1}\frac{1}{(2n+1)}\leq(\frac{1}{15})^{2n+1}\frac{1}{(2n+1)}.$$
Dunque, poiché l'ultimo membro è minore di 10^{-5} per $n\geq 2$, l'approssimazione richiesta è
$$\sin(\frac{\pi}{60})\simeq\frac{\pi}{60}-\frac{1}{6}(\frac{\pi}{60})^3\simeq 0.05233.$$

10.14
$$\begin{aligned}\cosh(x)&=1+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})\\ \sinh(x)&=x+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})\end{aligned}$$

10.15 ILa funzione non è derivabile in zero , quindi si per eseguire l' si possono solo scegliere i punti 1 e 2.

11. Integrali I

Esercizio 11.1

$$\int_0^x (1-t+t^3)dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \qquad\qquad \int_{-1}^0 (x+1)^2 dx = \frac{1}{3}$$

Esercizio 11.2 La media integrale di f in $[0,2]$ è $\frac{7}{3}$.

Esercizio 11.5 Nell'esercizio non viene specificato in quanti punti si vuole dividere l'intervallo di integrazione ; si può usare per esempio 1 o 2.
La funzione usata per il grafico è $50 * e^{|t|/2}$; il calcolo esatto dell'integrale usando questa funzione e' 25.7553.

Esercizio 11.7 Lo spazio percorso nell'intervallo di tempo $[0,T]$ è l'integrale della velocità, $\int_0^T v(t)dt$. In questo caso non abbiamo la legge che esprime la "funzione velocità" in tutti i punti dell'intervallo, ma conosciamo i valori $v_i = v(t_i)$ solo nei punti $t_0, \dots t_{180}$. Allora una approssimazione della distanza percorsa è

$$\sum_{i=1}^{180} v_i(t_i - t_{i-1}).$$

Poiché la velocità è espressa in *miglia/ora*, e $t_i - t_{i-1} = 1min = \frac{1}{60} ora$, otteniamo che lo spazio percorso, espresso in *miglia*, è

$$\frac{1}{60}\sum_{i=1}^{180} v_i = \frac{1}{60} 689.7374 = 11.4956$$

Esercizio 11.8 Poiché $P(t) = E'(t)$, l'energia consumata in un giorno è

$$E(T) - E(0) = \int_0^T P(t)dt,$$

dove $T = 1440$ (in un giorno ci sono 1440 minuti). Se la potenza è misurata in *megawatt*, l'energia sarà misurata in *megawatt* per *ora* (*megawatt-ora*). Per approssimare l'integrale usiamo una somma di Cauchy, usando intervalli di un minuto. Suddividiamo l'intervallo $[0,1440]$ in 1440 intervalli di ampiezza $\Delta t = \frac{1}{60} ora$ (un minuto) Denotiamo con P_i la potenza erogata all'istante t_i. L'energia consumata espressa in *megawatt-ora* è:

$$E \simeq \frac{1}{60}\sum_{i=0}^{1440} P_i \; = \; 9439.1423.$$

Esercizio 11.9 Un esempio di integrale definito: $\int_0^\pi \cos(x)dx$,
Esempio di una funzione integrale: $\int_0^x \cos(x)dx$ che è ovviamente anche una primitiva, perchè, ogni funzione integrale è una primitiva.
Ecco una seconda primitiva: $-\sin(x) + 4$

Esercizio 11.10 Una primitiva è $g(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$, con $c \in \mathbf{R}$.

12. Integrali II

Esercizio 12.3 Se una particella si muove lungo una linea retta con velocità $v(t), 4t \in [0, T]$ si ha $v(t) = s'(t)$, dove $s(t)$ denota lo spazio percorso al tempo t (legge oraria del moto). Se la la velocità è maggiore o uguale a zero, come nel primo caso, si ha

$$s(T) - s(0) = \int_0^T v(t)dt,$$

ma se la velocità assume anche valori negativi (la particella torna anche indietro) lo spazio percorso è espresso da

$$\int_0^T |v(t)|dt.$$

Nel primo caso la velocità è sempre positiva, e una primitiva di $e^{t^3-1}t^2$ è $\frac{1}{3}e^{t^3-1}$, quindi $s(1) - s(0) = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{e})$. Nel secondo caso si ha invece

$$\int_0^1 |v(t)|dt = \int_0^{.5} (.5 - t)dt + \int_{.5}^1 (t - .5)dt == \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

Esercizio 12.4 Il grafico di $G(x) = \int_0^x f(t)dt$ è in Figura 3.

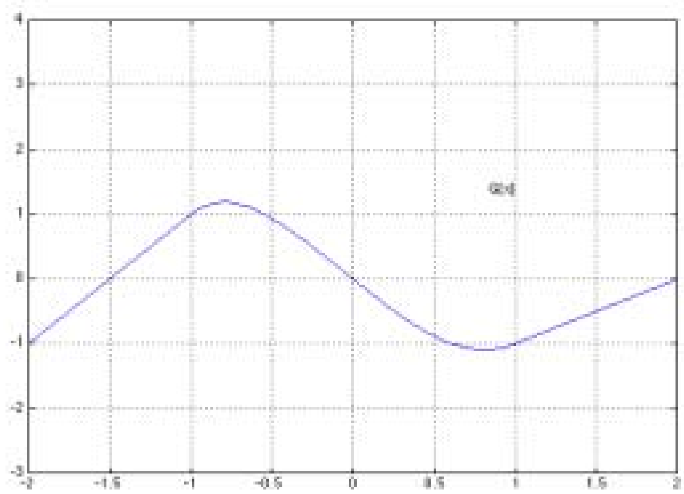


Figura 3

Esercizio 12.5 L'espressione analitica della funzione $G(x) = \int_0^x f(t)dt$ è

$$G(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{se } x \in [-2, -1) \\ -x^4 - 2x & \text{se } x \in [-1, 0) \\ x^3 - 2x & \text{se } x \in [0, 1) \\ x - 2 & \text{se } x \in [1, 2). \end{cases}$$

Esercizio 12.6 Integrando due volte entrambi i membri si ottiene $x^3/6 - \sin(x) + 3x + 1$.

Esercizio 12.8 Il primo integrale è 0, il secondo 844/5.

Esercizio 12.10

$$\Big(\int_a^{x^3} \frac{1}{t}dt\Big)' = \frac{1}{x^3}\,3x^2 \qquad\qquad \Big(\int_3^{\sin(x)} \frac{1}{1+t^2}dt\Big)' = \frac{1}{1+\sin^2(x)}\,\cos(x).$$

Esercizio 12.12

$$\Big(\int_{x^2}^{x^3} \sin^2(x)^2 dt\Big)' = 3x^2\,\sin^2(x^6)\;-\;2x\,\sin^2(x^4).$$

TEST 3. Soluzioni

T1 Le derivate prima e seconda della funzione $f(x) = x^4 - 4x^3$ sono

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x(x-3) \qquad\qquad f''(x) = 12x^3 - 24x = 12x(x-2).$$

Poiche $f''(3) > 0$ si ha che $(3, -27)$ è minimo relativo.Poiché $f''(0) = 0$ il test della derivata seconda non coclude. allora studiando il segno dlla f'' si trova che f rivolge la concavità verso l'alto in $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ mentre rivolge la concavità verso il basso in $(0, 2)$. Quindi in $(0, 0)$ si ha un flesso.
La f'' si annulla anche nel punto di ascissa $x = 2$ e cambia segno. Quindi $(2, -16)$ è un altro punto di flesso.