Calcolo Differenziale ed Integrale 2
Giugno 2011

Parte Teorica Enunciare e provare il teorema sulla condizione necessaria di estremo relativo per una funzione di due variabili.

Esercizio 1 Stabilire se il seguente integrale improprio converge, diverge o è indeterminato

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}} \log(1+\frac{1}{x})\ dx$$

Sol: Mostriamo che l'integrale è convergente. Indicheremo con f la funzione integranda; essa è continua in tutti i punti dell'intervallo di integrazione, ad eccezione dell'origine e del punto 1. In $x = 0$ la funzione va all'infinito come la funzione logaritmo:

$$\frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}} \log(1+\frac{1}{x}) \sim \log(1+\frac{1}{x})$$

quindi in un intorno destro di zero l'integrale improprio è convergente. In $x = 1$ la funzione va all'infinito con ordine $1/2$. Pertanto la funzione f è integrabile in senso improprio in ogni intervallo $[0, a]$ con a positivo.
All'infinito la funzione è invece infinitesima va a zero con ordine 2. Per verificare questo osserviamo che a $+\infty$ il fattore $1/\sqrt{|x^2-1|}$ è infinitesimo di ordine 1. Anche il secondo fattore è infinitesimo di ordine 1, infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{x})}{1/x} = \lim_{z\to 0+} \frac{\log(1+z)}{z} = 1$$

Questo prova a $+\infty$ che l'integranda è un infinitesimo di ordine 2. Perciò è integrabile in senso improprio all'infinito. Per quanto detto precedentemente questo prova che l'integrale assegnato è convergente.

Esercizio 2 È data la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(e^{1/n^2}-1\right)}{1/\sqrt{n}}(x-3)^n$$

(i) Stabilire per quali x converge.

(ii) Detta f la somma della serie, calcolare $f(3), f'(3), f''(3)$ e utilizzare questi valori per disegnare un grafico approssimativo di f in un intorno di 3.

Sol.

(i) Si tratta di una serie di potenze di punto iniziale 3. Per semplificare i calcoli conviene studiare la serie ottenuta con il cambiamento di varabili $x-3=z$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(e^{1/n^2}-1\right)}{1/\sqrt{n}}z^n \tag{1}$$

Proviamo che questa serie per $|z|=1$ converge assolutamente. Da

$$\lim_n \frac{e^{1/n^2}-1}{1/n^2}=1$$

si ha

$$\left|(-1)^n \frac{\left(e^{1/n^2}-1\right)}{1/\sqrt{n}}\right| \sim \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Quindi la serie di potenze (1) converge assolutamente per $|z|=1$, quindi per le proprietà delle serie di potenze converge in tutto l'intervallo $[-1,1]$. Fuori di tale intervallo non converge perchè il termine generale non è infinitesimo (z^n va all'infinito esponenzialmente).
Da quanto detto, con il cambiamento di variabili $z=x-3$, otteniamo che la serie data converge in $[-2,4]$.

(ii) $f(3)=0$, $f'(3)=1-e$ e $f''(3)/2!=\sqrt{2}(e^{1/4}-1)$. Quindi la funzione è decrescente e rivolge la concavità verso l'alto.

Esercizio 3 È data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x^2+y^2}(e^{ax^2+y^2}-1) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x.y) = (0,0), \end{cases}$$

dove a è un numero reale positivo.

(i) Trovare l'insieme di continuità per ogni valore di a positivo.

(ii) Stabilire l'insieme di differenziabilità di f per il valore del parametro $a = 1$.

Sol:

(i) La funzione è continua in tutti i punti di $\mathbf{R}^2 \setminus (0,0)$, perchè rapporto di funzioni che qui sono continue. Mostriamo che è continua anche nell'origine. Moltiplicando e dividendo per ax^2+y^2 si ottiene

$$\frac{y}{x^2+y^2}(e^{ax^2+y^2}-1) = y\frac{ax^2+y^2}{x^2+y^2}\frac{e^{ax^2+y^2}-1}{ax^2+y^2}$$

Usando il limite notevole $\lim_{z\to 0}(e^z-1)/z = 1$ si vede subito che la funzione $(e^{ax^2+y^2}-1)/(ax^2+y^2)$ nell'origine tende a 1. Se mostriamo che

$$\lim_{x,y)\to(0,0)} y\frac{ax^2+y^2}{x^2+y^2} = 0 \tag{2}$$

avremo provato che la funzine data tende a zero nel'origine, e quindi è continua. Usando le coordinate polari si ha

$$\left| y\frac{ax^2+y^2}{x^2+y^2}\right| = \rho|\sin(\theta)|(a\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))| \leq \rho(a+1)$$

da cui si deduce il limite (2).

(ii) Sia $a = 1$. Nei punti del piano diversi dall'origine la funzione è certamente differenziabile perchè prodotto e rapporto di funzioni differenziabili. Per verificare se è differenziabile nell'origine calcoliamo il limite

$$\lim_{x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{3}$$

Si vede facilmente che $\nabla f(0,0) = (0,1)$, allora il limite (3) si scrive

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\,\frac{(e^{x^2+y^2}-1)-(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Passando in coordinate polari e maggiorando

$$\left|\sin(\theta)\frac{(e^{\rho^2}-1)-\rho^2)}{\rho^2}\right| \leq \frac{(e^{\rho^2}-1)-\rho^2}{\rho^2} = \frac{(e^{\rho^2}-1)}{\rho^2}-1 \tag{4}$$

Poichè la funzione all'ultimo membro tende a zero, abbiamo provato che la funzione è differenziabile anche nell'origine.

Esercizio 4 Calcolare

$$\iiint_T y\,dx\,dy\,dz$$

dove

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, y \geq 0, 1 \leq z \leq 6\}$$

Sol: Denotiamo con l'integrale da calcolare

$$I = \iiint_T y\,dx\,dy\,dz$$

Conviene fare un integrale per sezioni. Detta S_z la sezione di T con il piano a quota z, si ha

$$I = \int_1^6 \Big(\iint_{S_z} y dx dy \Big) dz = \int_1^6 \int_0^\pi \int_0^z \rho^2 \sin(\theta)\, d\rho d\theta\, dz = \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_1^6 \Big(\int_0^z \rho^2 d\rho \Big) dz$$

Quindi

$$I = \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_1^6 z^3 dz = \frac{6^4 - 1}{12} \big[-\cos(\theta) \big]_0^\pi = \frac{1295}{6}.$$