Gli esercizi di questo foglio saranno assegnati con cadenza settimanale. Dopo una settimana verrà fornita anche la soluzione.

Esercizi - 24 Marzo 2011

Esercizio 1 Mostrare che il seguente integrale improprio è finito per ogni valore di a positivo

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{xe^{-ax}\ \log(1+x)}{\sqrt{|x-1|}} dx \tag{1}$$

Soluzione Denotiamo con f la funzione integranda. Si ha che f è continua in $(-1,1)\cup(1,+\infty)$ e l'integrale assegnato è finito se ciascuno dei due integrali impropri

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ dx \qquad\qquad \int_{1}^{+\infty} f(x)\ dx$$

è finito e in tal caso si ha

$$\int_{-1}^{+\infty} f(x)\ dx = \int_{-1}^{1} f(x)\ dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)\ dx. \tag{2}$$

Per stabilire se l'integrale in senso improprio su $(-1,1)$ è finito, osserviamo che

$$f(x) \sim \frac{-e^{\alpha}}{\sqrt{2}} \log(1+x)$$

quindi la funzione è integrabile in un intorno destro di -1. Inoltre

$$\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty \tag{3}$$

con ordine $1/2$. Quindi f è integrabile anche in un intorno (destro e sinistro) di 1. Possiamo quindi concludere che l'integrale di f su $(-1,1)$ è finito.
Poichè abbiamo già visto che in 1 la funzione è integrabile, per stabilire se l'integrale improprio su $(1,+\infty)$ è finito, basta calcolare il limite di f a $+\infty$. Questo dipende da α :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se}\, \alpha \leq 0 \\ 0 & \text{se}\, \alpha > 0. \end{cases}$$

Quindi escludiamo i valori di $\alpha \leq 0$. Mentre, se $\alpha > 0$, f tende a zero in maniera esponenziale, quindi con ordine maggiore di ogni polinomio. Pertanto la funzione è integrabile anche a $+\infty$.
Abbiamo così visto che i due integrali al secondo membro di (2) sono finiti.

Esercizio 2 Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big[3n^2\ \log\big(1+\frac{1}{4n^2+1})\Big]^n$$

Soluzione Per brevità denotiamo con a_n il termine generale della serie. Usiamo il criterio della radice

$$\sqrt[n]{a_n} = 3n^2\ \log\big(1+\frac{1}{4n^2+1}\big)$$

Inoltre si ha

$$\log\left(1 + \frac{1}{4n^2+1}\right) \sim \frac{1}{4n^2+1},$$

quindi $\sqrt[n]{a_n} \sim \frac{3n^2}{4n^2+1}$. Perciò

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \frac{3}{4}$$

e per il criterio della radice ne segue che la serie data converge.

Esercizi - 13 Aprile 2011 **Esercizio 1** È data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 26}.$$

(i) Sviluppare f in serie di potenze di punto iniziale -1, trovandono l'intervallo di convergenza.

(ii) Calcolare $f^{(5)}(-1)$ e $f^{(6)}(-1)$

Sol.

(i) Il denominatore è sempre positivo, quindi la funzione è definita e continua in un intorno di -1.

(ii) Riscriviamo la funzione come segue

$$f(x) = \frac{1}{1 + (\frac{x+1}{5})^2} = \frac{1}{1 - \left[-(\frac{x+1}{5})^2\right]}$$

E ricordando la serie geometrica si ha

$$f(x) = \sum_0^\infty (-1)^n \big(\frac{x+1}{5}\big)^{2n} = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{5^{2n}} (x+1)^{2n}.$$

Poichè la serie geometrica ha raggio di convergenza 1, questa serie converge se $|x+1| < 5$ cioè ha raggio di convergenza 5. Quindi l'intervallo di convergenza è $(-6, 4)$. Si noti infatti che negli estremi non converge.

(iii) Per l'unicità della serie di Taylor (Teorema 8 Cap 4) la serie di potenze trovata al punto precedente è lo sviluppo di Taylor di punto iniziale -1. Quindi $f^5(-1)$ e $f^6(-1)$ si ottengono da esso prendendo il coefficiente di $(x-1)^5$ e di $x+1)^6$ rispettivamente (moltiplicati per $5!$ e $6!$). Quindi

$$f^{(5)}(-1) = 0 \qquad f^{(6)}(-1) = -\frac{6!}{5^6}$$

Esercizio 2 È data la funzione

$$f(x, y) = \frac{xy + x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

(i) Trovare l'insieme di definizione.

(ii) Dire se esiste il limite nell'origine e in caso positivo calcolarlo.

Sol.

(i) L'insieme di definizione è $\mathbf{R}^2 \setminus (0, 0)$.

(ii) Il limite nell'origine non esiste: la funzione si può scrivere come somma delle due funzioni

$$f_1(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad f_2(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}.$$

La prima delle due non ha limite nell'origine, infatti il limite della funzione lungo una direzione assegnata dipende dalla direzione

$$f_1(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) = \cos(\theta)\sin(\theta).$$

Invece il limite di f_2 è zero:

$$\big|f_2(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))\big| = |\rho\cos(\theta)\sin(\theta)| \leq \rho.$$

Possiamo concludere che il limite della funzione data non esiste, perchè se esistesse esisterebbe anche quello di f_1

28 Aprile 2011

Esercizio È data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|y-x|(y+x)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x.y) = (0,0), \end{cases}$$

(i) Trovare l'insieme di definizione D e l'insieme di continuità.

(ii) Stabilire se esiste il piano tangente nell'origine, in caso positivo trovare la sua equazione.

(iii) Esistono dei punti in cui la funzione non ha piano tangente? Se esistono individuarne uno.

Questo esercizio presenta una certa difficoltà

Soluzione

(i) L'insieme di definizione è $\mathbf{R}^2$. In tutti i punti diversi dall'origine la funzione è continua perchè il numeratore è continuo (somma e prodotto di funzioni continue in $\mathbf{R}^2$) e il denominatore continuo e diverso da zero. Per stabilire la continuità nell'origine calcoliamone il limite. Usando le coordinate polari si ha

$$f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) = \rho\Big|\sin(\theta) - \cos(\theta)\Big|(\sin(\theta) + \cos(\theta)) \tag{4}$$

e quindi, maggiorando il modulo della somma con la somma dei moduli e il seno e coseno con 1 si ottiene

$$\Big| f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) - f(0,0)\Big| \leq 4\rho$$

Ne segue

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Quindi la funzione è continua su tutto $\mathbf{R}^2$.

(ii) Il piano tangente nell'origine esiste se la funzione è differenziabile in tale punto. Per studiare la differenziabilità della funzione nell'origine calcoliamo il gradiente in tale punto. Denotiamo con $P_o = (0,0)$ l'origine. Sia (u,v) un versore, la derivata direzionale nella direzione di tale versore è

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(ut,vt) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\big|ut - vt\big|(ut + vt)}{t|t|} = |u-v|(u+v).$$

Pertanto scegliendo i versori degli assi si ha $\nabla f(P_o) = (1,1)$. Calcoliamo il limite

$$\begin{aligned}
&\lim_{P\to P_o} \frac{f(P) - f(P_o) - \nabla f(P_o)\cdot(P-P_o)}{|P-P_o|} \\
&\quad = \lim_{P\to P_o} \frac{f(P) - (1,1)\cdot P}{|P|} \\
&\quad = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - (x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&\quad = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \Big(\frac{|y-x|(y+x)}{x^2+y^2} - \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big) \\
&\quad = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \Big(\frac{(y+x)}{x^2+y^2}|y-x| - \frac{(y+x)}{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}\Big) \\
&\quad = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y+x)}{x^2+y^2}\big(|y-x| - \sqrt{x^2+y^2}\big)
\end{aligned}$$

Si vede facilmente che limite all'ultimo membro non esiste; infatti lungo la direzione $(1,0)$ il limite è 0, mentre il limite lungo la retta $y=x$ non esiste:

$$f(x,x) = \frac{x}{x^2}(-\sqrt{2x^2}) = -\sqrt{2}\frac{|x|}{x}$$

il limite per x tendente a zero di questa funzione è ± 1 a seconda che il limite si faccia da destra o da sinistra.
Quindi la funzione data non è differenziabile nell'origine, e quindi il piano tangente non esiste.

(iii) Ovviamente per quanto visto al punto precedente si ha che l'origine è un punto in cui il piano tangente non esiste. Si può osservare inoltre che il piano tangente non esiste in tutti i punti $P=(x,y)$ tali che $x=y$.
Mostriamolo per il punto $Q=(1,1)$. Basta mostrare che esiste una direzione lungo la quale non esiste la derivata direzionale. Calcoliamo la generica derivata direzionale. Sia $\underline{w}=(u,v)$ un versore. La derivata in Q della funzione in tale direzione è

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{w}}(Q) = \lim_{t\to 0}\frac{f(1+ut,1+vt)}{t} = |v-u|\lim_{t\to 0}\frac{|t|}{t|t|}(2+(v+u)t) \tag{5}$$

Ma se $u \neq v$ si ha che il limite a secondo membro non esiste, perchè il limite sinistro è uguale a $-\infty$ il destro è $+\infty$. E quindi il limite (5) non esiste per tutte le direzioni per cui $u\neq v$. Perciò non esiste la derivata direzionale nel punto Q in tutte queste direzioni. Ne segue che nel punto Q non esiste il piano tangente.

Esercizi - 6 Maggio 2011

Esercizio 1 Trovare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^6 + y^6.$$

Trovare il massimo e minimo assoluti della funzione nell'insieme

$$A = \big\{(x, y) \in \mathbf{R} : x^2 + y^2 \leq 1\big\}.$$

Soluzione

L'unico punto critico è l'origine, infatti il gradiente di f è $\nabla f(x, y) = 6\big(x^5, y^5\big)$. Non occorre calcolare la matrice Hessiana nell'origine (che è la matrice nulla) perchè è chiaro che il punto è un minimo assoluto, e quindi un minimo relativo. Rispondiamo alla seconda domanda sul massimo e minimo assoluti sull'iniseme A, che certamente esistono per il Teorema di Weiestrass.
Per quanto detto prima il minimo assoluto in A non può che essere zero, che è assunto nell'origine, che è dentro A. Il massimo assoluto non può che essere sulla frontiera, perchè se fosse interno ad A sarebbe anche un minimo relativo e quindi un punto critico; ma l'unico punto critico che abbiamo trovato è l'origine.

Per valutare f sullla frontiera di A osserviamo che, per la simmetria, basta studiare la funzione nel primo quadrante. Usiamo le coordinate polari di centro l'origine

$$f\big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big) = \cos^6(\theta) + \sin^6(\theta) \qquad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Denotiamo con g la funzione al primo membro e con I l'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ovviamente il massimo assoluto di f va cercato fra i massimi relativi di g. Si vede facilmente che g ha in I due massimi relativi (in $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$) e un minimo relativo (in $\theta = \frac{\pi}{4}$). Infatti

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= 6\Big(- \cos^5(\theta)\sin(\theta) + \sin^5(\theta)\cos(\theta)\Big) \\ &= 6\cos(\theta)\sin(\theta)\big(- \cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)\big) \\ &= 3\sin(2\theta)\big(\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)\big) \\ &= - 6\sin(2\theta)\cos(2\theta) = -3\sin(4\theta) \end{aligned}$$

nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ si annulla in $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$. Dal segno di g' si vede che i punti di massimo relativo di g in I sono $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$, in questi punti la funzione g assume valore 1. Quindi il massimo assoluto della funzione f in A è 1. Tale valore è assunto da f nei punti di coordinate $(0, \pm 1)$ e $(\pm 1, 0)$.
Si noti: si poteva evitare di studiare il segno della g' e calcolare semplicemente g nei punti $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ deducendo che nel punto in cui g assume valore 1 si hanno dei massimi assoluti.

Esercizio 2 Si trovino gli estermi relativi ed assoluti della funzione $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x + y^2}$ nell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y^2 \leq 1\}$.

Soluzione

L'insieme D, disegnato in Figura 2, è chiuso e limitato. La funzione f è continua in tutti i punti di $\mathbf{R}^2$ eccetto i punti che annullano il denominatore, dove non è definita cioè i punti della curva di equazione $x + y^2 = -1$. Ma questa curva ha ovviamente intersezione vuota con l'insieme D, i cui punti soddisfano sono nel primo quadrante. (vedi Figura 3). Quindi abbiamo una funzione continua in un insieme chiuso e limitato perciò massimo e minimo assoluti esistono per il teorema di Weiestrass.

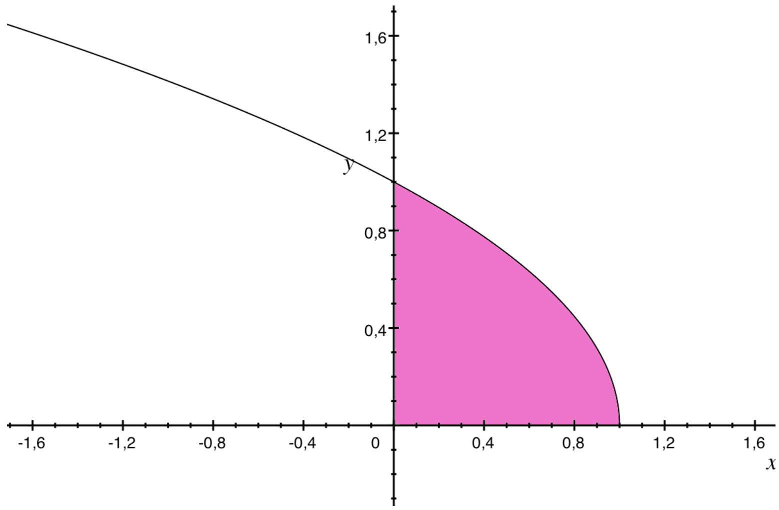

Figura 2 L'iniseme D.

Cerchiamo i punti critici, il gradiente di f è

$$\nabla f(x, y) = \frac{-1}{(1 + x + y^2)^2}(1, 2y)$$

e non si annulla in nessun punto. Quindi i punti di massimo e minimo relativo devono essere necessariamente sulla frontiera di D. Studiamo ora la funzione sulla frontiera di D.

Denotiamo con γ_1, γ_3 le parti di frontiera che sono sull'asse x e sull'asse y e con γ_3 la parte di frontiera che è sulla parabola. E siano

$$g_1(t) = \frac{1}{1 + t^2}, \quad g_2(t) = \frac{1}{1 + t^2}, \quad g_3(t) = \frac{1}{2}, \quad t \in (0, 1).$$

Si ha

$$\min g_1 = \frac{1}{2}, \quad \max g_1 = 1; \qquad \min g_2 = \frac{1}{2}, \quad \max g_2 = 1; \qquad \min g_3 = \max g_3 = \frac{1}{2}$$

Perciò il minimo assoluto di f è $1/2$ mentre il massimo è 1.

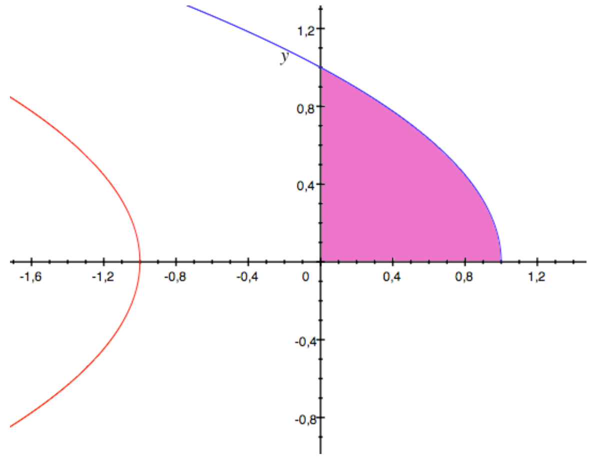

Figura 3 L'iniseme D e il grafico di $x + y^2 = -1.$.