Indice

Capitolo 1

Esercizi

1. Infiniti e infinitesimi. Formula di Taylor

Limiti all'infinito

1.1 Usando i limiti notevoli e la tecnica del cambiamento di variabili, calcolare i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} x^2(2^{1/x^2}-1) \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+2^{-x})}{2^{-x}}.$$

1.2 Fra le seguenti funzioni, tutte infinite in $+\infty$, indicare quella di ordine inferiore e quella di ordine superiore.

$$\log(x) \qquad 5^x \qquad (x^2+1)^3 \qquad x5^x$$

Nella loro somma $\log(x)+5^x+(x^2+1)^3+x5^x$ quali sono i termini trascurabili?

1.3 Mostrare che per $x\to+\infty$ si ha $1+x=o(x^2-1)$

1.4 Siano

$$f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}} \qquad g(x)=x^2$$

Verificare che per $x\to+\infty$ si ha che $f\sim g$.

1.5 Mostrare che la funzione $f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}$ è asintotica a $g(x)=x^2$ per $x_o\to+\infty$.

1.6 Mostrare che la funzione $f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}$ è asintotica a $h(x)=-x^2$ per $x_o\to-\infty$.

Limiti in un punto

1.7 È vero che per $x\to1$ si ha $1-x\sim(1-x^2)$?

1.8 Verificare che per $x\to1$ si ha $\log(x)\sim(x-1)$ (cioè $\log(x)$ è asintotica a $(x-1)$).

1.9 Trovare due funzioni f e g che sono asintotiche per $x\to1$.

1.10 Per ciascuna delle seguenti coppie f e g di infinitesimi in zero stabilire quale delle due funzioni è di ordine superiore all'altra.

$$f(x)=\log(1+x^3) \quad g(x)=x\sin(x); \qquad\qquad h(x)=e^{x^2}-1, \quad l(x)=\mathrm{arctg}(x).$$

1.11 Fra le seguenti funzioni, tutte infinitesime in $x_o=0^+$, indicare quella di ordine inferiore e quella di ordine superiore.

$$\sqrt[7]{x} \qquad \sin(x) \qquad x^3 \qquad x^{3/2}$$

Nella loro somma $\sqrt[7]{x} + \sin(x) + x^2 + x^3$ quali sono i termini trascurabili?

1.12 Usando la regola di eliminazione dei termini trascurabili, mostrare che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1 + \sin(x^2) + \log(x+1)}{\sin(\sqrt{x}) + x^2 + xe^x} = 1.$$

1.13 Usando la regola di eliminazione dei termini trascurabili, calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + x\sqrt{|x|}}{\sin 2x + x^2}.$$

1.14 Verificare che la funzione

$$f(x) = \tan(x^{2/3})(2^x - 1),$$

è infinitesima in $x_o = 0$. Usando i limiti notevoli trovare l'infinitesimo campione in 0 che ha lo stesso ordine di f.

1.15 Ripetere l'esercizio precedente per le funzioni

$$g(x) = x\log(x^4+1)\sin(x); \qquad h(x) = \tan(x^2)\sin(x^3);$$

$$l(x) = (2^x - 1)\sin(x); \qquad m(x) = x^3\log(1-x).$$

1.16 Usando i limiti notevoli mostrare che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x) - \sin(x) - x^3}{x^3} = -\frac{1}{2}.$$

Mostrare che il procedimento seguente è errato: *poichè* x^3 *è un infinitesimo di ordine superiore sia a* $\tan(x)$ *che a* $\sin(x)$ *si ha*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x) - \sin(x) - x^3}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3} = \frac{1}{2}$$

Dove è l'errore?

2. Formula di Taylor

Esercizi sulla formula di Taylor con resto di Peano

2.1 Usando un software grafico, tracciare il grafico dei polinomi MacLaurin, di grado 1, 3, 5, della funzione $\sin(x)$ sovrapponendoli al grafico della funzione $\sin(x)$ nell'intervallo $[-.5, .5]$

2.2 Ripetere l'esercizio precedente per le funzioni $e^x - 1$ e per $1 - \cos(x)$.

2.3 Per ciascuna delle seguenti funzioni, scrivere il polinomio di Mc Laurin di grado 3

$$\begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{se x} \neq 0 \\ 1 & \text{se x} = 0; \end{cases} \qquad \frac{1}{\cos(x)}; \qquad \frac{1}{\sqrt{3+x}}.$$

2.4 Mostrare che il polinomio di Mc Laurin di grado 3 di $h(x) = \arctan(x)$ è $T(x) = x - \dfrac{x^3}{3}$.

2.5 Usando la formula di Taylor stabilire se i seguenti limiti esistono, e in caso positivo, determinarli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^2 \mathrm{tg}(x)}; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x - \mathrm{arctg}(x)}{x\log(1+x) - x\sin(x)}.$$

2.6 Usando il polinomio di Mac Laurin della funzione e^x scrivere i polinomi di Mac Laurin per le funzioni

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2.7 È data la funzione $f(x) = \sqrt{x}$. Scrivere la formula di Taylor di ordine 2 scegliendo come punti iniziali due dei seguenti punti $x_o = 0$ $x_o = 1$ e $x_o = 2$. Motivare la scelta.

2.8 È data la funzione $f(x) = x^3 + 2x + 1$ scrivere il suo polinomio di Taylor centrato in zero di grado $1, 2, 3, 4$. Trovare il polinomio $T_{3,1}$ (di Taylor di grado minore o uguale a 3 e centrato in $x_o = 1$) Verificare che $f(x) = T_{3,1}(x)$ e spiegare perchè.

2.9 Scrivere il polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ secondo le potenze di $x - 1$

Esercizi sulla formula di Taylor con resto di Lagrange

2.10 (***)

i) Scrivere il polinomio di MacLaurin $T_{5,0}(x)$ di $\sin(x)$. Fare un plot di entrambe le funzioni e dell'errore $\sin(x) - T_{5,0}(x)$.

ii) Usando la formule di MacLaurin con il resto di Langrange, stimare l'errore commesso nell'approssimare $\sin(x)$ con il polinomio $T_{5,0}$ in $[-.1, .1]$.

2.11 Stimare l'errore commesso nell'approssimare la funzione $\frac{1}{1-x}$ con il suo polinomio di Taylor di grado 2 in $[-10^{-2}, 10^{-2}]$.

2.12 (**)Usando la formula di Taylor, calcolare e a meno di 10^{-2}.

2.13 Sappiamo che una funzione f soddisfa le condizioni:

$$f(0) = 2, \qquad f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 0$$

e che la derivata terza in $[-.5, .5]$ è uguale a $x^2 \log(1 + x^2)$. Trovare una approssimazione di $f(.1)$ e stimare l'errore commesso.

3. Integrali impropri

Per alcuni dei seguenti esercizi è necessario il calcolo di integrali, è ammesso l'uso di tavole se si desidera.

3.1 Mostrare che il primo dei seguenti integrali impropri converge e il secondo diverge

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{|x^2-1|}}\,dx$$

3.2 Calcolare l'area della regione seguente

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right\}.$$

3.3 Mostrare che i seguenti integrali impropri convergono e calcolarli

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx \qquad \int_0^1 \log^2(x)\,dx \qquad \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(x)\,dx$$

Sugg: per tutti e tre si trova una primitiva facilmente, per la seconda usare le tavole.

3.4 Mostrare che i seguenti integrali impropri convergono e calcolarli

$$\int_{-1}^1 \frac{x\,\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx.$$

Sugg: Per entrambi conviene trovare la primitiva e poi usare la definizione di integrale improprio. Per il primo integrale si integra prima per parti prendendo $\arcsin(x)$ come fattore non derivato.
Per il secondo si può fare il cambio di variabili $z = e^x$ Attenzione agli estremi di integrazione quando si cambia variabile. Dovrebbe venire $\pi/2$

3.5 Dire se è finita l'area della regione compresa fra le rette $x = 0$, $x = \pi/2$, l'asse delle ascisse e il grafico della funzione $1/\sqrt{\tan(x)}$

3.6 Dire se è finita l'area della regione compresa fra le rette $x = 0$, $x = 1$, l'asse delle ascisse e il grafico della funzione $e^{\sqrt{x}} - 1$.

3.7 Stabilre se il seguente integrale improprio è finito e in caso positivo calcolarlo

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$$

3.8 Dire se i seguenti integrali impropri convergono

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\log^4(x)} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx \qquad \int_0^1 x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$$

Sugg: Per il primo si può calcolare la primitiva e usare la definizione di integrale improprio. Per gli ultimi due usare il criterio del confronto asintotico.

3.9 Stabilire se i seguenti integrali impropri sono convergenti

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{2+x}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}dx \qquad\qquad \int_{0}^{\infty} \frac{\log|x-2|}{x^2-1}dx$$

3.10 È dato il seguente integrale improprio, dipendente dal parametro $z \in \mathbf{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \sin(xz)\, dx;$$

stabilre se converge.

3.11 (***)Si consideri la funzione integrale

$$F(x) = \int_1^x f(t)\ dt = \int_1^x \frac{t-5}{t+1}e^{-t}\ dt.$$

[i] dopo aver trovato l'insieme di definizione dell'integranda f, determinare il campo di esistenza E di F

[ii] Dire se esistono i limiti di F agli estremi di E e se sono finiti.

4. Serie

4.1 Verificare che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2$ converge. Sapendo che la sua somma è $\pi^2/6$ trovare la somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/(n+2)^2$.

4.2 Rappresentare il numero decimale $0,\overline{56}$ come rapporto di due numeri interi usando la serie geometrica di ragione $1/100$. *Suggerimento* . Sia $x = 0,\overline{56}$. Si ha

$$x = \frac{56}{100} + \frac{56}{1000} + \frac{56}{10^4} + \cdots = 56 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{10^n}$$

La conclusione si ottiene subito usando la serie geometrica.

4.3 Verificare, usando la serie geometrica, che $3.7\overline{2} = \frac{67}{18}$.

4.4 Un cliente vuole investire i propri risparmi presso una banca che da un interesse del 3%. Che versamento deve fare per

i) avere 1000 euro dopo 1 anno?

ii) avere una rendita di 1000 euro all'anno per 10 anni, a cominciare dall'anno successivo?

iii) avere una rendita di 1000 euro all'anno per sempre, a cominciare dall'anno successivo?

Suggerimento. È noto che si ha

$$x_n(1+i)^n = c_n; \tag{1}$$

dove i è l'interesse, n il numero di anni di deposito, x_n il capitale versato, e c_n il valore del capitale maturato dopo n anni (la cifra versata più gli interessi maturati).
In questo problema dobbiamo trovare la cifra x_n da investire; ricavando x_n da (1), poichè $i = 0.03$, si ottiene

$$x_n = c_n/(1.03)^n \tag{2}$$

Quindi

i) per avere 1000 euro dopo un anno, in (2) si pone $n = 1$ e $c_1 = 1000$. Si ottiene $x_1 = 970,87$ euro circa. E questa è la somma che si deve versare.

ii) se x_1 è la cifra da versare oggi per avere 1000 fra un anno, x_2 è la cifra da versare oggi per avere 1000 fra 2 anni e così via, la cifra da versare oggi per avere una rendita annua di 1000 euro per i prossimi dieci anni è $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Dunque la cifra totale da versare oggi per avere 1000 euro tutti gli anni per 10 anni è

$$\sum_{n=1}^{10} x_n = \sum_{n=1}^{10} 1000/(1,03)^n = 1000 \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{(1,03)^n}.$$

Basta allora calcolare la somma a secondo membro.

iii) Basta ripetere il ragionamento precedente con n infinito.

4.5 Trovare la somma della serie

$$1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots$$

4.6 Verificare che le seguenti serie sono a termini di segno costante

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^3+3}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n)}{n+1}; \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+2^{-n}}{n+1}; \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!};$$

e stabilirne il carattere usando, per ciascuna, un criterio per le serie a termini di segno costante.

4.7 Dopo aver verificato che le seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{(n+1)^2-1}$$

sono a termini di segno costante, stabilirne, se possibile, il carattere, usando il criterio dell'ordine.

4.8 Dopo aver verificato che le seguenti serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sin(\frac{1}{1-n^2}); \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \cos\frac{1}{n}\Big); \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

sono a termini di segno costante, stabilirne, se possibile, il carattere, usando, per ciascuna, il criterio di convergenza più adatto.

4.9 Stabilire quali delle seguenti serie sono a termini di segno positivo, quali a segni alterni e quali né l'uno né l'altro e stabilirne il carattere.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n^{3/2}}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}; \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n^2+4}.$$

4.10 È vero che se $\lim_n a_n = 0$ allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge?
È vero che se $a_n = 0 \ \forall n \in \mathbf{N}$ allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge?

4.11 Quale ridotta approssima la somma di $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ a meno di 10^{-2}?

4.12 Calcolare a meno di 10^{-4} la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$.

4.13 Stabilire il carattere delle seguenti serie al variare del parametro reale x

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n(x^2+x+1)}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{n|x^2-x|}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(3x)^n}.$$

4.14 Utilizzando serie note, trovare la somma delle serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{n!};\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!};\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{5^n n!}.$$

4.15 Verificare che la seguente serie converge e calcolarne la somma

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n^2-1)}.$$

Suggerimento: scrivere il termine generale come la somma di due fratti semplici e poi vedere la serie come una serie telescopica. In tal modo il calcolo della somma si riduce al calcolo di un limite di una successione.

4.16 (***) Mostrare che se una serie $\sum_1^\infty a_n$ è a termini di segno positivo e converge allora anche $\sum_1^\infty a_n^2$ converge. È vero il viceversa? Cosa si può dire su $\sum_1^\infty a_n^3$? Sapresti generalizzare l'affermazione?

4.17 Sia $\sum_1^\infty a_n = s$ Calcolare la somma di $\sum_1^\infty \big(2a_n + a_{n+1}\big)$.

4.18 Stabilire il carattere delle seguenti serie al variare del parametro reale x

$$\sum_{n=o}^{\infty}\Big(\frac{2\arccos(x)}{\pi}\Big)^n \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{3-x}{2+x}\Big)^n.$$

4.19 Stabilre il carattere della seguente serie al variare del parametro x

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^n}{n3^n}.$$

Per quali valori di x converge assolutamente?

5. Serie di potenze

5.1 Sviluppare in serie di Mc Laurin la funzione seguente specificando è l'intervallo di convergenza.

$$x\sin(x) + e^{2x}.$$

.

5.2 Sviluppare in serie di Mc Laurin la funzione seguente specificando è l'intervallo di convergenza.

$$\frac{x}{1-2x} + \frac{1}{x-3}.$$

5.3 Sviluppare in la serie di potenze di termini $x+4$ la funzione $2x^2 - 5x - 2$.

5.4 Tovare la serie di Taylor di punto iniziale -2 della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+5}$ determinando l'intervallo di convergenza.
Calcolare

$$\int_{-2}^{-1} f(x)dx$$

e dedurre che

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Sugg. Si ha $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1$

5.5 Usando la serie geometrica, scrivere lo sviluppo in serie di MacLaurin delle funzioni $1/(1+x)$, $1/(1-x^2)$.

5.6 Esprimere le seguenti funzioni come somma di una serie di potenze centrate in zero

$$\int_0^x e^{-t^3} dt \qquad \int_0^x \cos t^2 dt$$

.

5.7 Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor di centro $x_o = 0$ di $f(x) = \log(1+x)/x$ stabilendo l'intervallo di convergenza.

5.8 Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor di centro $x_o = 0$ della funzione

$$\frac{1}{x^2+3x+2}$$

stabilendo l'intervallo di convergenza.
Scrivere la funzione data nella forma $\frac{1}{ax+b} + \frac{1}{cx+d}$ *e utilizzare sviluppi noti.*

5.9 Calcolare a meno di 10^{-2}

$$\int_0^1 \sum_1^\infty \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}} dx.$$

5.10 Trovare il raggio di convergenza della seguente serie

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \left(\frac{t}{2}\right)^n.$$

Detta $f(t)$ la sua somma, calcolare l'integrale $\int_0^1 f(t)\ dt$.

5.11 È data la seguente serie

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}(x-2)^n$$

(i) Trovare l'intervallo I di convergenza.

(ii) Detta f la somma della serie, calcolare $f(2), f'(2), f''(2)$ e utilizzare questi valori per disegnare un grafico approssimativo di f in un intorno di 2.

(iii) Operare il cambio di variabili $x-2=2t$. Scrivere la serie e trovarne la somma.

5.12 Si vuole calcolare il seguente integrale

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos(t^2)-1}{t^4} dt$$

con un errore minore di 10^{-8} usando le serie di potenze. Dunque eseguire i passi seguenti

(i) trovare la serie di MacLaurin della funzione integranda (specificando l'insieme di convergenza) e integrare termine a termine spiegando perchè è lecito.

(ii) Trovare quali somme parziali bastano per avere una approssimazione della somma della serie numerica minore o uguale a 10^{-8}. Giustificare il procedimento.

Concludendo: quale è il valore approssimato dell'integrale? Quale somma parziale è stata usata per calcolare questa approssimazione? Si tratta di una approssimazione per eccesso o per difetto?

6. Funzioni di più variabili. Parte I

Gli esercizi di questa sezione possono essere svolti a partire dal 13 Aprile

Determinazione dell'insieme di definizione di una funzione e ricerca di insiemi di livello

6.1 Trovare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni.

$$\log(1-x-y), \qquad \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}, \qquad \frac{x+y}{x-y}$$

$$\sqrt{\frac{xy}{x-y}} \qquad \arcsin\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \qquad \arcsin(x^2+y^2-1).$$

6.2 Delle funzioni seguenti determinare gli insiemi di livello corrispondenti agli assegnati valori di c.

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= xy & c=-1, c=0;\\
f(x,y) &= e^{xy} & c=0, c=e;\\
f(x,y) &= 2^{x^2-y^2} & c=2, c=-1;\\
f(x,y) &= x^2+y^2+4z^2 & c=-1, c=0, c=4;\\
f(x,y) &= \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & c=-1, c=0, c=1;\\
f(x,y) &= \arcsin(x^2+y^2-1) & c=2\pi, c=-\pi/2;
\end{aligned}$$

6.3 Usando MATLAB tracciare i grafici e le curve di livello di alcune delle funzioni dell'esercizio precedente a scelta.

6.4 In Figura 1 pag 16 compaiono i grafici delle funzioni

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= \sqrt{1-x^2-y^2} & f_2(x,y) &= \sqrt{x^2+y^2+1} & f_3(x,y) &= \sqrt{x^2+y^2-1}\\
f_4(x,y) &= \sqrt{x^2+y^2} & f_5(x,y) &= \frac{x^3}{\sqrt{x^2+10y^2}} & f_6(x,y) &= \frac{x^4}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

Associare ad ogni funzione il suo grafico. Quali di queste funzioni sono radiali?

6.5 Trovare l'insieme di definizione della seguente funzione

$$\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}} + \log(|x|-\frac{1}{2})$$

6.6 Trovare l'insieme di definizione e le linee di livello delle seguenti funzioni

$$f(x,y)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}, \qquad g(x,y)=x^2-y^2, \qquad h(x,y)=y^2$$

6.7 Sono assegnate le funzioni

$$f(x,y) = y\log(x+1) \qquad\qquad g(x,y) = \sqrt{2y - x^2}$$

Trovare l'insieme di definizione di $f\,, g\,,\ f+g\,,\ f/g$.

6.8 Trovare l'insieme di definizione e le linee di livello delle seguenti funzioni

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2}{y+1}}, \qquad\qquad g(x,y) = \frac{1}{4x^2+y^2}.$$

6.9 In Figura 2 compaiono i grafici delle funzioni

$$\frac{\sin(2(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)}, \qquad\qquad 2 + \frac{x-y}{x^2+y^2+1}$$

$$\sqrt{(x^2+y^2)} + \sin(x^2) \qquad\qquad x^2 - 4y^2 - x^3$$

. Associare a ciascuno il suo grafico e stabilire l'insieme di continuità per ciascuno di essi.

6.10 L'esempio discusso a lezione (*) È data la funzione

$$f(x,y) = 4\frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (y-x^2)^2}$$

Verificare che

[a] nell'origine ha limite zero in ogni direzione,

[b] la sua restrizione alla curva $y = x^2$ è costante e uguale a 4.

Questo è dunque un esempio di funzione che in un punto ha limite lungo in ogni direzione ma il limite in quel punto (come funzione di due variabili) non esiste. Fare un plot con un qualunque software grafico.

7. Funzioni di più variabili. Parte II

Limiti e continuità

7.1 Mostrare che i due seguenti limiti non esistono

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - xy + y^2}{3x^2 + y^3}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - x^2y^2 + y^4}{x^4 + y^4}$$

7.2 Dire se esistono i limiti seguenti e in caso positivo calcolarli

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2) - x^2y}{x^2 + y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(4x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

7.3 È data la funzione $g(t) = e^{-t^2}$.

(i) Disegnare il gafico della funzione di due variabili $f_1(x,y) = g(x)$ e della funzione $f_2(x,y) = g(y)$

(ii) Disegnare la funzione $h(x,y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$

7.4 Dire se esistono i limiti delle seguenti funzioni nell'origine e in caso affermativo calcolarli

$$\frac{2x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \qquad x\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{x - 3y}{x + y},$$

$$3^{x^2+y^2}, \qquad \frac{\sin(xy)}{xy} \qquad \frac{x^2(x+1)}{x^2 + y^2}.$$

7.5 Stabilire l'insieme di continuità delle seguenti funzioni di due variabili

$$\frac{1}{x+y}, \qquad \frac{1}{2 + \sin(xy)}, \qquad \log(x^2 - y).$$

7.6 Stabilire l'insieme di continuità delle seguenti funzioni di due variabili

$$\sin(x)\cos(y), \qquad \sqrt{x^2 - y}, \qquad \log(x)\log(x - y).$$

7.7 Dire se è continua la seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-2)^2}{(x-1)^2 + (y-2)^2} + 3x + y & \text{se } (x,y) \neq (1,2) \\ 5 & \text{se } (x.y) = (1,2), \end{cases}$$

7.8 La seguente funzione

$$f(x,y) = (e^x - 1)\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

non è definita nell'origine. Definire in tutto $\mathbf{R}^2$ in modo che sia continua.
Rispondere alla stessa domanda per la funzione seguente confrontando il risultato.

$$g(x,y) = (e^x - 1)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

7.9 Dire se le seguenti funzioni di due o tre variabili sono continue

$$f(x,y,z) = x^2 + z^3, \quad g(x,y) = \sin(x+y) + x^3 - y^4, \quad h(x,y,z) = log(1+x^2)$$

Sugg. Adoperare la Proposizione 5

7.10 È data la funzione $g(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & \text{se } 0 \le t \le 1 \\ \frac{1}{t} & \text{se } 1 \le t \end{cases}$. Disegnare (a mano) la funzione $f(x,y) = g(x^2+y^2)$ e discuterne la continuità. Calcolare il limite di f nell'origine.

Funzioni continue su compatti

7.11 Dopo aver disegnato l'insieme S dei punti soddisfacenti le sottoelencate disuguaglianze, stabilire se S è chiuso, aperto, né chiuso né aperto se è connesso per archi.

[a] $S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| < 2, |y| < 2\}$

[b] $S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < y < x^2, |x| \le 2\}$

7.12 Dopo aver disegnato l'insieme S dei punti soddisfacenti le sottoelencate disuguaglianze, stabilire se S è chiuso, aperto, né chiuso né aperto, limitato, connesso per archi.

[a] $S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\} \cap \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| > 1\}$

[b] $S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\} \cap \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \le 1\}$

[c] $S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{|x|}\}$

[d] $S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y \ge x^2\} \cap \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \le 2\}$

7.13 Stabilire se le seguenti funzioni hanno massimo e minimo negli insiemi S definiti nei punti da $[a]$ a $[d]$ del precedente esercizio

$$f(x,y) = \sin(x^2 - y) \qquad g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

7.14 Usando il teorema dei valori intermedi, trovare il segno della funzione $f(x,y) = (y^2 - x^4)x$.

7.15 Usando il teorema dei valori intermedi, trovare il segno della funzione $f(x,y) = y^3 - 1 + x^4$.

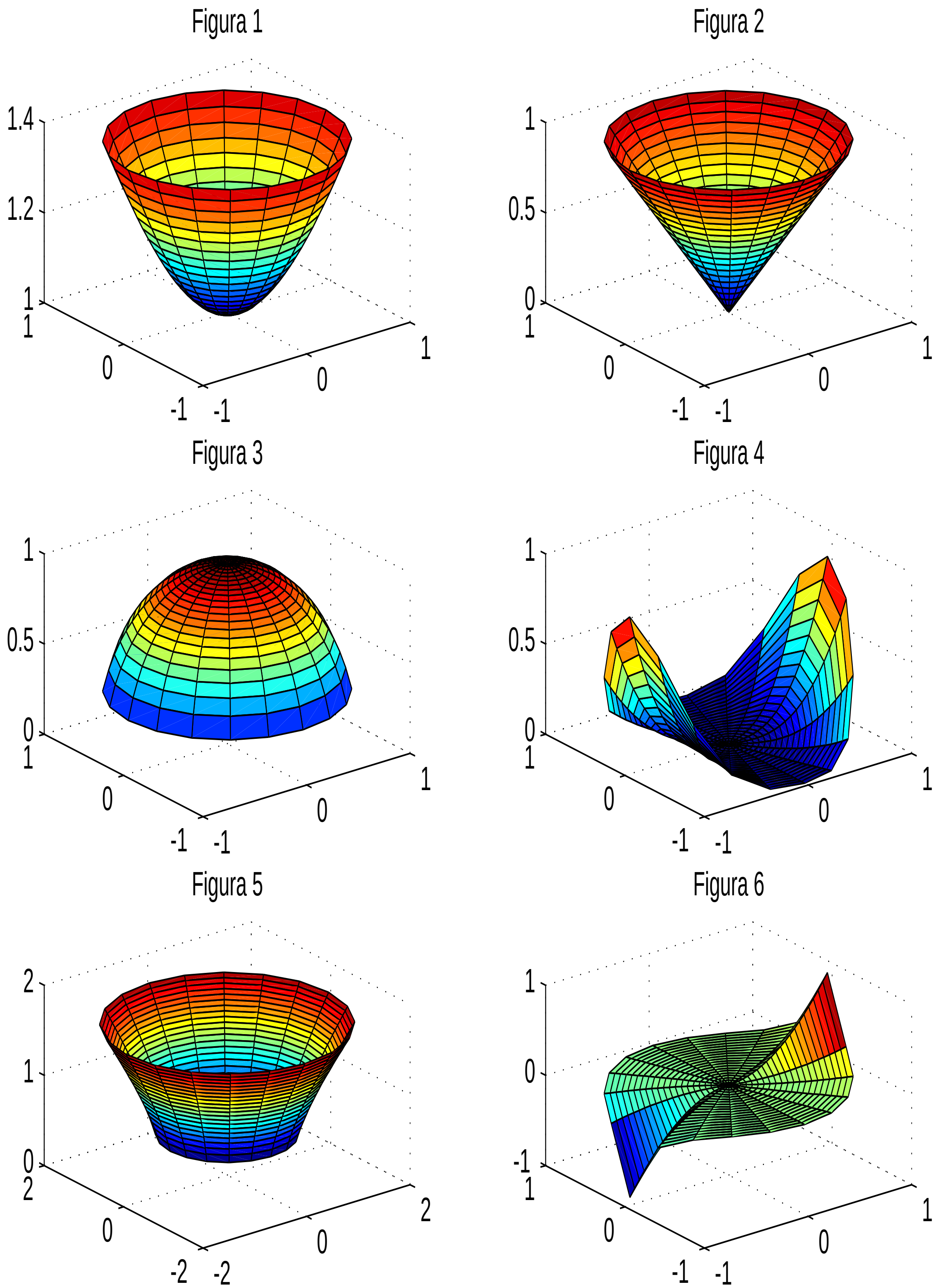

Figura 1: Grafici Es. 6.4

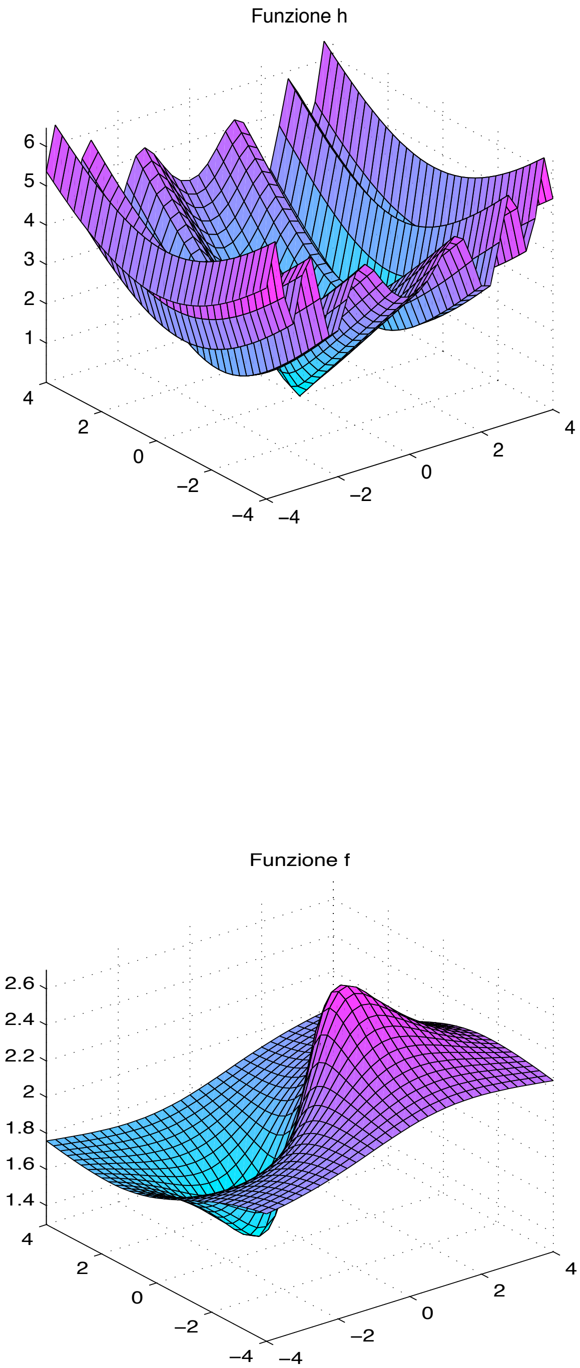

Figura 2: Grafici