7. Funzioni di più variabili. Parte II

Limiti e continuità

7.1 Mostrare che i due seguenti limiti non esistono

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - xy + y^2}{3x^2 + y^3}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - x^2y^2 + y^4}{x^4 + y^4}$$

7.2 Dire se esistono i limiti seguenti e in caso positivo calcolarli

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2) - x^2y}{x^2 + y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(4x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

7.3 È data la funzione $g(t) = e^{-t^2}$.

(i) Disegnare il gafico della funzione di due variabili $f_1(x,y) = g(x)$ e della funzione $f_2(x,y) = g(y)$

(ii) Disegnare la funzione $h(x,y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$

7.4 Dire se esistono i limiti delle seguenti funzioni nell'origine e in caso affermativo calcolarli

$$\frac{2x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \qquad x\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{x - 3y}{x + y},$$

$$3^{x^2+y^2}, \qquad \frac{\sin(xy)}{xy} \qquad \frac{x^2(x+1)}{x^2 + y^2}.$$

7.5 Stabilire l'insieme di continuità delle seguenti funzioni di due variabili

$$\frac{1}{x+y}, \qquad \frac{1}{2 + \sin(xy)}, \qquad \log(x^2 - y).$$

7.6 Stabilire l'insieme di continuità delle seguenti funzioni di due variabili

$$\sin(x)\cos(y), \qquad \sqrt{x^2 - y}, \qquad \log(x)\log(x - y).$$

7.7 Dire se è continua la seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-2)^2}{(x-1)^2 + (y-2)^2} + 3x + y & \text{se } (x,y) \neq (1,2) \\ 5 & \text{se } (x.y) = (1,2), \end{cases}$$

7.8 La seguente funzione

$$f(x,y) = (e^x - 1)\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

non è definita nell'origine. Definire in tutto $\mathbf{R}^2$ in modo che sia continua.
Rispondere alla stessa domanda per la funzione seguente confrontando il risultato.

$$g(x,y) = (e^x - 1)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

7.9 Dire se le seguenti funzioni di due o tre variabili sono continue

$$f(x,y,z) = x^2 + z^3, \quad g(x,y) = \sin(x+y) + x^3 - y^4, \quad h(x,y,z) = log(1+x^2)$$

Sugg. Adoperare la Proposizione 5

7.10 È data la funzione $g(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & \text{se } 0 \le t \le 1 \\ \frac{1}{t} & \text{se } 1 \le t \end{cases}$. Disegnare (a mano) la funzione $f(x,y) = g(x^2+y^2)$ e discuterne la continuità. Calcolare il limite di f nell'origine.

Funzioni continue su compatti

7.11 Dopo aver disegnato l'insieme S dei punti soddisfacenti le sottoelencate disuguaglianze, stabilire se S è chiuso, aperto, né chiuso né aperto se è connesso per archi.

[a] $S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| < 2, |y| < 2\}$

[b] $S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < y < x^2, |x| \le 2\}$

7.12 Dopo aver disegnato l'insieme S dei punti soddisfacenti le sottoelencate disuguaglianze, stabilire se S è chiuso, aperto, né chiuso né aperto, limitato, connesso per archi.

[a] $S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\} \cap \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| > 1\}$

[b] $S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\} \cap \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \le 1\}$

[c] $S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{|x|}\}$

[d] $S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y \ge x^2\} \cap \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \le 2\}$

7.13 Stabilire se le seguenti funzioni hanno massimo e minimo negli insiemi S definiti nei punti da $[a]$ a $[d]$ del precedente esercizio

$$f(x,y) = \sin(x^2 - y) \qquad g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

7.14 Usando il teorema dei valori intermedi, trovare il segno della funzione $f(x,y) = (y^2 - x^4)x$.

7.15 Usando il teorema dei valori intermedi, trovare il segno della funzione $f(x,y) = y^3 - 1 + x^4$.

8. Calcolo differenziale Prima parte

8.1 È data la funzione $f(x,y) = x^3 + 4x^2y + 6y^2 + 3y^3$.

i) Calcolare il gradiente.

ii) Calcolare la derivata direzionale nel punto $P = (1,1)$ in tutte le direzioni.

ii) Dire dove è differenziabile.

8.2 Calcolare il gradiente delle funzioni seguenti

i) $f(x,y) = ye^{2x^2+y^2}$

ii) $g(x,y) = \log(x^2 + y^4)$

8.3 Calcolare (se esiste) il gradiente delle funzioni seguenti nell'origine

$$g(x,y) = |x|e^{y^2} \qquad h(x,y) = |x|\sin(x+y)e^{y^2}$$

8.4 Calcolare le derivate parziali delle seguenti funzioni nell'origine e nel punto (1,2)

$$f(x,y) = x^2\sin(xy) \qquad g(x,y) = e^{x+y} \qquad \frac{2xy^2}{x^2+y^2+1}.$$

prima usando la definizione e poi con le ordinarie regole di derivazione.

8.5 Calcolare la derivata delle seguenti funzioni di due variabili nelle direzioni V e nei punti P_o assegnati

$$x^2\sin(xy), \qquad P_o = (0,0), V = (1,1); \qquad \frac{2xy^2}{x^2+y^2}, \qquad P_o = (0,0), V = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}});$$

$$e^{x+y}, \qquad P_o = (0,1), V = (1,0); \qquad y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad P_o = (0,0), V = (a,b).$$

8.6 Calcolare le derivate parziali delle funzioni dell' esercizio precedente.

8.7 È data la funzione

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

(i) Dire per quali valori di α è continua su $\mathbf{R}^2$

(ii) Scelto questo valore di α calcolare il gradiente e dire se f è differenziabile nell'origine.

8.8 È data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos(xy)}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^4}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x.y) = (0,0), \end{cases}$$

i) Trovare l'insieme di definizione D e l'insieme di continuià.

ii) Trovare l'insieme di differenziabilità.

8.9 È data la funzione

$$f(x,y) = xy \sin(\frac{1}{x^2+y^2}).$$

[i] Determinare insieme di definizione e segno.

[ii] Stabilire se è prolungabile per continuità nell'origine.

[iii] stabilire se la prolungata è differenziabile.

Il seguente esercizio è stato svolto nelle esercitazioni.

8.10 È data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \frac{x^3y^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

(i) Trovare l'insieme di definizione D

(ii) Stabilire dove è continua

(iii) Stabilire dove è differenziabile.

(iv) Calcolare l'equazione del piano tangente in tre punti $A = (a,0), B = (0,b)$ e $C = (c,c)$, dove a, b e c sono tre numeri diversi da zero.

Soluzione

(i) L'insieme di definizione è $\mathbf{R}^2$.

(ii) In tutti i punti diversi dall"origine è continua perchè composta di funzioni continue (Prop. 3 pag 18 Cap 5). Mostriamo la continuità nell'origine, cioè che il limite è uguale a 1. Basta passare alle coordinate polari e osservare che

$$|f(x,y) - 1| = \left| \frac{x^3y^3}{(x^2+y^2)^2} \right| = \left| \rho^2 \cos^3(\theta) \sin^3(\theta) \right| \leq \rho^2.$$

dove $\rho = \sqrt{(x^2+y^2)}$. Poichè l'ultimo membro è una funzione infinitesima di ρ ne deduciamo che anche il primo membro tende a zero e quindi f è continua in tutto $\mathbf{R}^2$.

(iii) Le derivate parziali sono

$$f_x(x,y) = \frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^3}[3y^2 - x^2] \qquad f_y(x,y) = \frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^3}[3x^2 - y^2].$$

Basta calcolarne una sola e per avere l'espressione dell'altra usare la simmetria di f scambiando x e y.

In tutti i punti diversi dall'origine si verifica facilmente che sono continue. Per mostrare la differenziabilità possiamo usare due strade: usare la definizione di diferenziabilità oppure mostrare che le derivate parziali sono continue nell'origine. Usiamo questa seconda strada.

Nell'origine non sono definite ma si possono definire facilmente prolungandole per continuità. Infatti detto u il versore dell'asse delle ascisse, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \lim_{h \to o} \frac{f(h,o) - f(0,0)}{h} = 0$$

quindi $f_x(0,0) = 0$. Da ció si ricava

$$\Big| f_x(x,y) - f_x(0,0) \Big| = \Big| f_x(x,y) \Big| = \Big| \frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^3}[3y^2 - x^2] \Big| \le 4\rho.$$

Perció f_x tende a zero nell'origine. Per la derivata rispetto a y si procede allo stesso modo e si vede che anch'essa tende a zero nell'origine.

Questo ci assicura che f_x e f_y si possono prolungare per continuità nell'origine. Continueremo a chiamare f_x e f_y le funzioni così prolungate. Abbiamo così mostrato che le derivate prime sono continue in $\mathbf{R}^2$; quindi, possiamo concludere che la funzione f è differenziabile in tutto $\mathbf{R}^2$.

(iv) In A : $f(a,0) = 1$ e $\nabla f(a,0) = (0,0)$ pertanto il piano tangente in A è $z = 1$. In B si trova anche $z = 1$. In C si ha

$$f(c,c) = 1 + \frac{c^2}{4} \qquad \text{e} \qquad \nabla f(c,c) = \frac{c^5}{4c^6}[3c^2 - c^2]\big(1,1\big) = \frac{c}{2}\big(1,1\big).$$

Quindi l'equazione del piano tangente nel punto C è

$$z = 1 + \frac{c^2}{4} + \frac{c}{2}\left[(x-c) + (y-c)\right].$$

9. Calcolo differenziale. Parte II

9.1 È data la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se(x, y)} \neq (0,0) \\ 0 & \text{se(x, y)} = (0,0). \end{cases}$$

[i] dire se è continua nell'origine.

[ii] dire è differenziabile nell'origine e, in caso affermativo, scrivere l'equazione del piano tangente in $(0,0)$ e della derivata in $(0,0)$ nella direzione del vettore $(1,1)$.

[iii] in quale direzione la derivata nell'origine è massima?

9.2 è data la funzione $f(x,y)=x-y^2$. Calcolare la derivata direzionale di f nel punto $P_o=(0,1)$ nella direzione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche $x(t)=t+1$ $y(t)=\sqrt{t+2}$ $t\geq 2$. Commentare il risultato.

9.3 Trovare le curve di livello corrispondenti a $c=3$ $d=4$ della funzione $f(x,y)=x^2y$. Nellla Figura 1 compaiono alcune curve di livello. Disegnare la direzione di massima pendenza nei punti $(-1,3)$ e $(1,3)$.

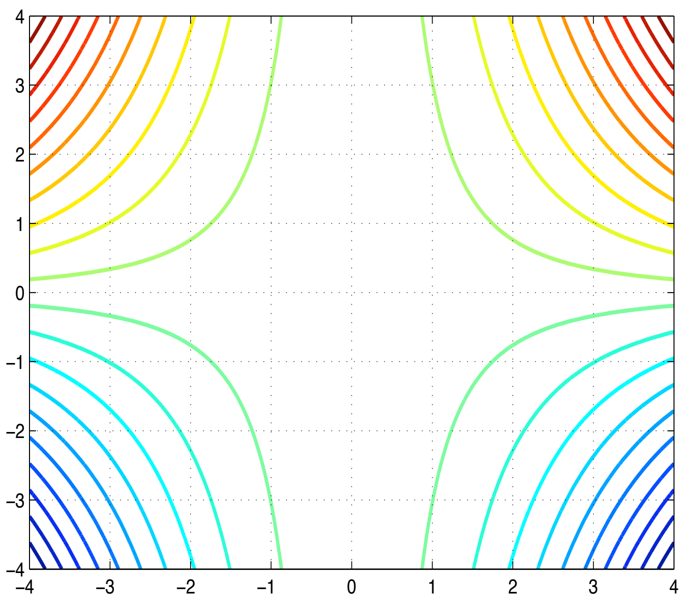

Figura 1: Linee di livello della funzione x^2y

9.4 È data la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{se}(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se}(x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Mostrare che nell'origine esistono le derivate nelle direzioni degli assi ma non è differenziabile.

9.5 È data la funzione $f(x, y) = e^{xy}$.

[i] Dire se esiste il piano tangente nell'origine e in caso affermativo scriverne l'equazione.

[ii] Tracciare la curva di livello passante per il punto $P = (1, 2)$ e verificare che $\nabla f(1, 2)$ è ortogonale alla tangente alla curva nel punto P. Spiegare perchè.

9.6 In Figura 2 compaiono le linee di livello di una funzione relative alle quote $[-4, 4, 6, 12, 30, 32]$. Disegnare approssimativamente il gradiente nei punti $(0, 1)$, $(-1, 0)$. Nel punti $(2, 2)$ disegnare il la direzione di massima pendenza.

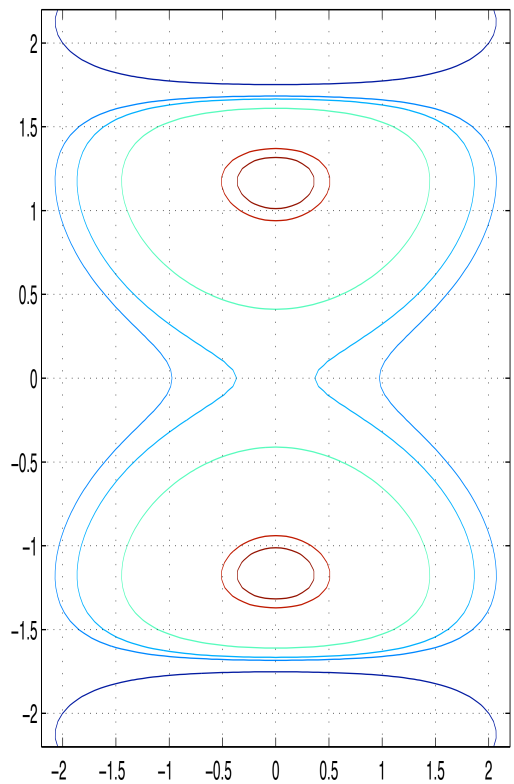

Figura 2: Linee di livello

9.7 Sia f una funzione differenziabile in $P_o = (x_o, y_o)$, il cui gradiente in P_o è $(1, 2)$. Calcolare la derivata direzionale nella direzione $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

9.8 È data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{se(x, y)} \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se(x, y)} = (0, 0). \end{cases}$$

[i] Dire se è continua nell'origine.

[ii] Calcolare tutte le derivate direzionali nell'origine.

[iii] Dire se nell'origine è differenziabile.

[iii] Dire se le derivate parziali sono continue nell'origine.

9.9 Scrivere l'equazione del piano tangente alla superfice S descritta dall'equazione $xyz = 8$ nel punto $P_o = (-2, -1, 4)$. Trovare inoltre l'equazione della retta normale a questo piano nel punto
Sol. La superfice è una curva di livello della funzione $f(x, y, z) = xyz$ corrispondente alla quota 8. Il piano tangente ha equazione $\nabla(P_o) \cdot (P - P_o) = 0$, esplicitamente

$$f_x(P_o)(x - x_o) + f_y(P_o)(y - y_o) + f_z(P_o)(z - z_o) = 0$$

Poichè $f_x(x, y, z) = yz$, $f_y(x, y, z) = xz$ e $f_z(x, y, z) = xy$, questa equazione si scrive

$$-4(x + 2) + -8(y + 1) + 2(z - 4) = 0$$

La retta normale al piano in P_o ha equazione

$$\frac{x - x_o}{f_x(P_o)} = \frac{y - y_o}{f_y(P_o)} = \frac{z - z_o}{f_z(P_o)}.$$

Perciò

$$\frac{x + 4}{-4} = \frac{y + 1}{-8} = \frac{z - 4}{2}.$$

9.10 Scrivere l'equazione del piano tangente alla superfice

$$f(x, y, z) = x^2 + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$$

nel punto $P = (0, 1, 0)$.

9.11 Trovare il piano tangente alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ nel punto $P_o = (1, 1, 4)$. Trovare la retta normale nel punto P_o.

9.12 Ripetere l'esercizio precedente per la superfice $-x^2 + y^2 + z^2 = 2$ nel punto $P_o = (-1, 1, 0)$.

9.13 Ripetere l'esercizio precedente per la superfice $z = xe^y \cos(z) - 1$ nel punto $P_o = (1, 0, 0)$.

Sol: $x + y - z = 1$ $x - 1 = y = -z$.

9.14 Sia $h(r, \theta)$ la funzione composta mediante le funzioni $f(x, y)$ e $x = r\cos(\theta)$ $y = r\sin(\theta)$. Calcolare le derivate

$$\frac{\partial h}{\partial r} \qquad \frac{\partial h}{\partial \theta}.$$

9.15 Sia $h(s, t)$ la funzione composta mediante $f(x, y)$ e $x = s + t$ e $y = s - t$. Mostrare che

$$\frac{\partial h}{\partial x}^2 - \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}$$

10. Derivata delle funzioni composte. Estremi relativi ed assoluti

Esercizio risolto in fondo alla sezione!

10.1 Calcolare la derivata della funzione composta mediante le funzioni $f(x,y) = e^{x^2+y+1}$ $x = \cos(s)$ $y = \sin(s)$.

10.2 Calcolare le derivate prime e seconde della funzione $f(x,y) = x^2 e^{x^2+y}$.

10.3 Calcolare la derivata della funzione composta mediante $g(x,y) = \sin(x^2+y^2)$ e la funzione vettoriale $\underline{F}(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$, $t \in [0,2]$.

10.4 Scrivere il polinomio $T(x,y)$ di Taylor di 1 e il polinomio $L(x,y)$ di grado 2 della funzione $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ in $P_o = (0,0)$. Disegnare sullo stesso grafico f e T. Fare un secondo grafico sovrapponendo f e L.

10.5 Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 della funzione $f(x,y) = \sin(3x+5y)$ nell'origine.

Massimi e minimi, relativi ed assoluti

10.6 Trovare i punti critici della funzione $f(x,y) = x^4 - y^4$. Classificarli dopo averne studiato il segno usando il teorema degli zeri.

10.7 Trovare e classificare i punti critici delle funzioni

$$f(x,y) = xy \qquad g(x,y) = e^{xy} \qquad h(x,y) = 2^{x^2+y^2}.$$

10.8 Trovare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = (3x - x^3)(3y - y^3)$$

10.9 Dire se l'origine è un punto di estremo relativo per la seguente funzione

$$f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

Sugg Calcolare il segno della funzione.

10.10 (*) Determinare gli estremi relativi delle funzioni

$$f(x,y) = x^2 + y^3 - xy \qquad g(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2+1}.$$

10.11 Classificare i punti critici delle funzioni

$$f(x,y) = \log(1 + x^2 + y^2) \qquad\qquad g(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2.$$

10.12 Trovare gli estremi relativi della funzione

$$f(x,y,z) = xyz - x^2 - y^2 - z^2$$

10.13 Mostrare che la funzione

$$f(x,y,z) = 4xyz - x^4 - y^4 - z^4$$

ha un estremo relativo in $(1,1,1)$.

10.14 Una funzione di tre variabili ha nel punto P_o la seguente matrice Hessiana

$$\mathcal{H}(P_o) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Usare il criterio di Silvester per mostrare che (la forma quadratica è indefinita e quindi) il punto è un punto di sella.

10.15 Sono date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad\qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Mostrare, usando il criterio di Silvester, che A è definita positiva e B è indefinita. Per la seconda alternativamente calcolare gli autovalori.

10.16 Trovare massimo e minimo assoluti delle seguenti funzioni nelle regioni assegnate

$$\begin{aligned} f(x,y) &= y^2 - 2xy & \qquad A &= \{(x,y) \mid -2 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 1\} \\ g(x,y) &= 1 - x + 2y & \qquad B &= \{(x,y) \mid -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1\}. \\ h(x,y) &= 1 - x + 4y & \qquad D &= \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x^2\}. \end{aligned}$$

10.17 Trovare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x,y) = x^2 - x + 2y^2$ nel cerchio di centro l'origine e raggio 2.

10.18 Si trovino gli estermi relativi ed assoluti della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{1 + x + y^2}$$

nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \ge 0, y \ge 0, x + y^2 \le 1\}$.

Soluzione L'insieme D, disegnato in Figura 3 è chiuso e limitato. La funzione f è continua in tutti i punti di $\mathbf{R}^2$ eccetto i punti che annullano il denominatore, dove non è definita; si tratta dei punti della curva di equazione $x + y^2 = -1$. Ma questa curva ha ovviamente intersezione vuota con l'insieme D, i cui punti sono nel primo quadrante (vedi Figura 3). Cerchiamo i punti critici; il gradiente di f è

$$\nabla f(x, y) = \frac{-1}{(1 + x + y^2)^2}(1, 2y)$$

e non si annulla in nessun punto. Quindi i punti di massimo e minimo relativo devono essere necessariamente sulla frontiera di D. Studiamo ora la funzione sulla frontiera di D.
Denotiamo con γ_1, γ_2 le parti di frontiera che sono sull'asse x e sull'asse y e con γ_3 la parte di frontiera che è sulla parabola. E siano

$$g_1(t) = \frac{1}{1 + t^2}, \quad g_2(t) = \frac{1}{1 + t^2}, \quad g_3(t) = \frac{1}{2}, \quad t \in (0, 1).$$

Si ha

$$\min g_1 = \frac{1}{2}, \quad \max g_1 = 1; \qquad \min g_2 = \frac{1}{2}, \quad \max g_2 = 1; \qquad \min g_3 = \max g_3 = \frac{1}{2}$$

Perciò il minimo assoluto di f è $1/2$ mentre il massimo è 1.

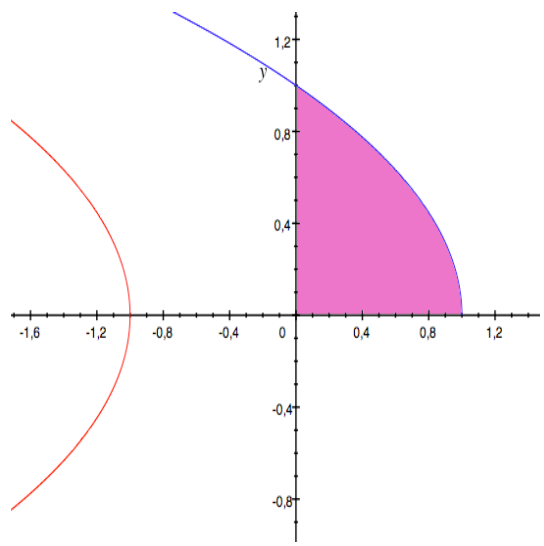

Figura 3: L'insieme D e il grafico di $x + y^2 = -1$..

11. Estremi vincolati

Esercizio con soluzione in fondo alla sezione!

11.1 Trovare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = 2x^2 - 3y + y^3 - 3x^2 + 1.$$

Inoltre trovare, se esistono, il massimo e minimo assoluti in

$$T = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le x\}$$

11.2 Trovare il massimo e minimo della funzione $f(x,y) = xy$ soggetta al vincolo

$$x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$$

(da M.Bramanti,C. Pagani, S. Salsa: *Matematica- Calcolo infinitesimale e Algebra Lineare*).

11.3 Massimizzare $f(x,y) = xy$ soggetta al vincolo $3x + 5y = 90$

11.4 Trovare il massimo e minimo della funzione $f(x,y) = x - y$ soggetta al vincolo $x^2 + y^2 = 4$

11.5 Trovare il massimo e minimo della funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + 1$ soggetta al vincolo $x^2 + y^2 = 9$

11.6 Cercare gli eventuali massimi e minimi della funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 8(x^2 + y^2)$$

soggetta al vincolo $x^2 + y^2 = 9$.

11.7 Massimizzare $f(x,y) = x^2 + y^2 + z^2$ sull'intersezione delle superfici $xyz = 1$ e and $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$
Sol. Si trova

$$x = \mp\sqrt{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{2}}} \quad y = \pm\sqrt{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{2}}} \qquad z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

11.8 Trovare i punti di massimo, i punti di minimo, il valore massimo e il valore minimo della funzione $f(x,y) = xy$ sulla circonferenza C di equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$.
Soluzione. La funzione è continua e C è un insieme chiuso e limitato quindi esistono sia il massimo che il minimo. Il sistema

$$\begin{cases} \nabla(xy) = \lambda\nabla(x^2 + y^2) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

si riscrive

$$\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Si trovano i punti $(\pm 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ $(1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$. Siano

$$A = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \qquad A_1 = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) \qquad B = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \qquad B_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$$

si trova che $f(A) = f(A_1) = 1/2$ e $f(B) = f(B_1) = -1/2$ quindi i primi sono punti di massimo, i secondi di minimo.

12. Integrali doppi

Esercizi risolti in fondo alla sezione!

12.1 Sia T la regione del piano delimitata dall'asse delle ascisse, dalle rette $x = 3$ $y = 3$ e dal grafico della funzione $y = \frac{1}{x}$. Calcolare l'integrale

$$\iint_T (x^2 + y^2)\ dx\,dy.$$

12.2 Calcolare l'integrale

$$\iint_T xy\ dx\,dy$$

dove $T = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1 + x\}$.
Sol: $5/8$.

12.3 Calcolare l'integrale

$$\iint_T \frac{y\cos^2(x)}{(1 + y^2)^2}\ dx\,dy.$$

dove T è la regione del piano delimitata dall'asse delle ascisse, dalle rette $x = \pi/2$ e dal grafico della funzione $y = \sin(x)$.

12.4 Calcolare l'integrale

$$\iint_S \frac{sin(y)}{y}\ dx\,dy$$

dove $S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, x \leq y \leq \pi\}$.
Verificare che si può usare solo una delle due formule di riduzione, in quanto $\sin(y)/y$ *non è integrabile elementarmente. Sol:* 2.

12.5 Calcolare l'integrale

$$\iint_T y\ dx\,dy.$$

dove T è la regione del semipiano superiore del piano delimitato dai grafici delle funzioni $y = |x|$ $y = x^2$ e dall'iperbole $y^2 - x^2 = 1$.

12.6 Sia A una regione del piano simmetrica rispetto all'asse delle ascisse ed f una funzione tale che

$$f(x, y) = -f(x, -y)$$

per $x, y \in A$. Mostrare che

$$\int\int_A f(x, y)\ dx\,dy = 0.$$

12.7 Calcolare il baricentro della lamina omogenea di densità 1 descritta da nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| + |y| \leq 1, |y| \leq \frac{3}{4}x^2 \ , x \geq 0\}$.

*Soluzione*L'insieme D è disegnato in Figura 1. Denotiamo con A il punto di intersezione della parabola $y = \frac{3}{4}x^2$ con la retta $y = -x + 1$ e con B il punto di intersezione della parabola $y = -\frac{3}{4}x^2$ con la retta $y = x - 1$. Si ha $A = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ e $A = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$. Per la simmetria della lamina il baricentro deve avere ordinata y_b uguale a zero. Per calcolare l'ascissa x_b occorre calcolare l'area. L'insieme D è normale sia rispetto all'asse x che rispetto all'asse y. Con semplici calcoli si ottiene

$$\iint_D dxdy = \frac{7}{27}.$$

Ancora con semplici calcoli si ottiene

$$\iint_D x \ dxdy = \frac{13}{81}.$$

Pertanto $x_b = \frac{13}{21}$.

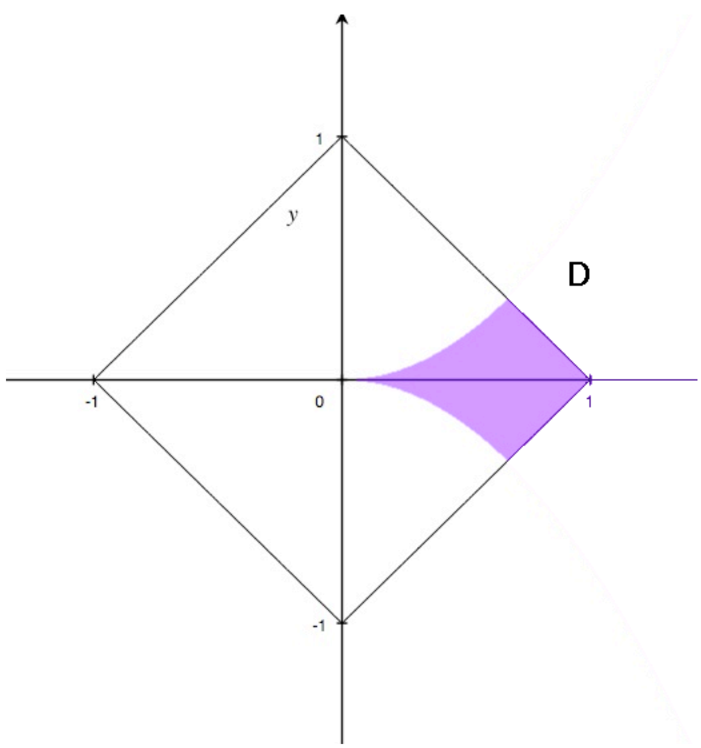

Figura 1