Corso di laurea in Informatica

Calcolo differenziale ed integrale II A.A. 2011-2012 II Prova in itinere

Esercizio 1 È data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(y-x^2)}{(x^2+y^2)} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

(i) Trovare l'insieme di continuità.

(ii) Trovare il segno della funzione.

(iii) Stabilire se nell'origine è differenziabile e in caso positivo scrivere l'equazione del piano tangente.

(iv) È dato il punto $P_o = (2,0)$. Dire se in P_o esiste il piano tangente e in caso positivo scriverne l'equazione.
Denotiamo con $\underline{\omega}$ la direzione di massima pendenza di f nel punto P_o. Trovare la derivata direzionale di f in P_o nella direzione $\underline{\omega}$ e quella nella direzione ortogonale a $\underline{\omega}$.

Soluzione

(i) La funzione è continua certamente in tutti i punti diversi dall'origine perchè rapporto di polinomi, che, anzi, sono funzioni differenziabili.
Stabiliamo se è continua nell'origine. Poichè sull'asse delle ordinate la funzione è uguale a zero, se il limite c'e deve essere zero. Passando alle coordinate polari e ricordando che il modulo della somma è minore o uguale della somma dei moduli, si ottiene

$$|f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)| = \rho\Big|\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \rho\cos^3(\theta)\cos(\theta)\Big| \leq \rho(1+\rho).$$

Da ciò, per la teoria, ricaviamo che nell'origine il limite è zero. Perciò la funzione è continua in tutto $\mathbf{R}^2$.

(ii) L'insieme dei punti in cui si annulla la funzione è descritto dalle seguenti equazioni

$$x = 0; \qquad y = 0; \qquad y = x^2.$$

Osserviamo che queste curve dividono il piano in sei regioni (vedi Figura 1) ciascuna delle quali è un insieme connesso. Per il teorema dei valori intermedi (f è continua) in tali parti la funzione deve assumere segno costante; quindi il segno della funzione si trova valutando la funzione in uno solo dei punti di ciascuno di tali insiemi. In tal modo si trova il segno descritto nella Figura 1.

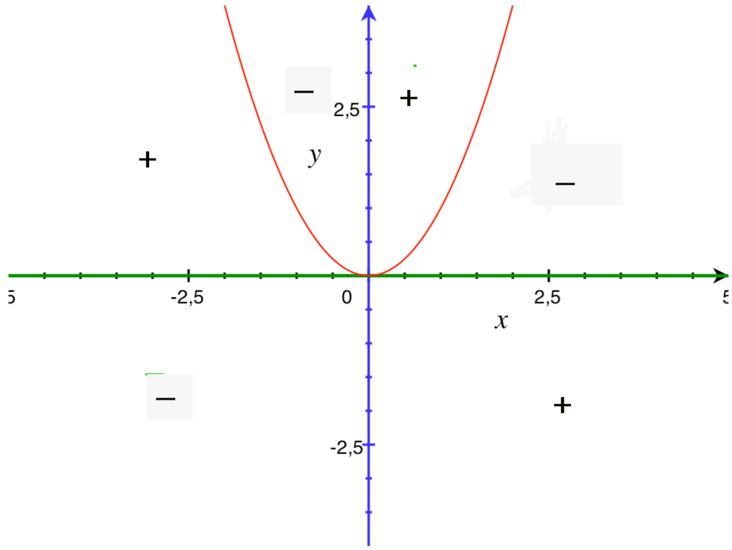

Figura 1 Il segno della funzione nelle sei regioni

(iii) In tutti i punti diversi dall'origine f è differenziabile, perchè rapporto di polinomi (che sono funzioni differenziabili) e il denominatore si annulla solo nell'origine.
Verifichiamo che nell'origine non è differenziabile; qui le derivate direzionali nella direzione degli assi sono uguali a zero, perchè qui la funzione è costante. Dunque il limite da calcolare è

$$\lim_{P\to 0} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2 - x^3y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Passando alle coordinate polari si ottiene

$$\frac{f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)}{\rho^3} = \cos^2(\theta)\sin(\theta) - \rho\cos^3(\theta)\cos(\theta)$$

il limite di questa funzione per ρ tendente a zero dipende dalla direzione. Possiamo quindi concludere che la funzione f non è differenziabile nell'origine.

(iv) Come abbiamo già spiegato al punto precedente, a funzione è differenziabile in P_o. Il piano tangente in P_o esiste perchè qui, come abbiamo detto, la funzione è differenziabile. Per scrivere l'equazione del piano tangente occorre il gradiente in P_o. È preferibile calcolarlo come derivata direzionale nelle direzioni $1,0)$ e $(0,1)$. La derivata direzionale in $P_o = (2,0)$ nella direzione dell'asse x, cioè con direzione $\underline{\omega}_1 = (1,0)$ è

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\omega}_1}(P_o) = \lim_{t\to 0} \frac{f(1+t,0) - f(2,0)}{t} = 0.$$

Osserviamo che questo si poteva dire subito perchè il punto si trova sull'asse x e lungo questo asse la funzione è costante. La derivata in P_o nella direzione $\underline{\omega}_2 = (0,1)$ è

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\omega}_2}(P_o) = \lim_{t\to 0} \frac{f(2,t) - f(2,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2t(t-4)}{t(4+t^2)} = -2.$$

Quindi abbiamo trovato che il gradiente in P_o è

$$\nabla f(P_o) = (0,-2).$$

L'equazione del piano tangente in P_o dunque è $z = \nabla f(P_o) \cdot (P - P_o)$ cioè

$$z = -2y$$

Poichè f è differenziabile in P_o, la direzione di massima pendenza è il gradiente, dunque $(0, -2)$. Sappiamo dalla teoria (teorema del differenziale) che la derivata nella direzione di massima pendenza in P_o è il modulo di $\nabla f(P_o)$ e che la derivata nella direzione ad essa ortogonale è zero. Quindi le due derivate sono rispettivamente 2 e zero.

Esercizio 2 È data la funzione

$$f(x,y) = x^3 + 2y^3 - 3y^2 - 3x + 1$$

(i) trovare gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti in $\mathbf{R}^2$.

(ii) Trovare massimi e minimi assoluti e relativi nella regione

$$T = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 1/2,\ x \leq y \leq 1/2\}.$$

Soluzione Il gradiente è

$$\nabla f(x,y) = \big(3x^2 - 3, 6y^2 - 6y\big)$$

Quindi i punti critici sono

$$P = (-1,0),\ Q = (-1,1),\ R = (1,0),\ S = (1,1).$$

La matrice Hessiana è

$$\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 12y - 6 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

Nei quattro punti critici P, Q, R, S diventa, nell'ordine,

$$\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix},$$

Gli autovalori della matrice sono evidenti, guardando il loro segno possiamo subito dire che Q ed R sono dei punti di sella, mentre P è un massimo relativo e S è un punto di minimo relativo.
Abbiamo così trovato e classificato gli estremi relativi. Il massimo assoluto non esiste, infatti la funzione è un polinomio, pertanto illimitata. Si noti che il teorema di Weiestrass non vale perchè l'insieme $\mathbf{R}^2$ non è limitato.

Rispondiamo alla seconda domanda. L'insieme T (in Figura 1) è chiuso e limitato; la funzione è continua, quindi per il teorema di Weierstrass, esitono il massimo e il minimo assoluto. I punti in cui vengono assunti questi due valori sono sicuramente sulla frontiera del triangolo. Infatti se fossero interni sarebbero anche estremi relativi ma nel triangolo T estremi relativi non ne abbiamo trovati (vedi prima parte).
Troviamo i massimi e minimi sui vari "pezzi"di frontiera. Si tratta a questo punto di cercare massimo e minimo di funzioni di una variabile le funzioni composte con f e le equazioni parametriche di ciascuna curva.

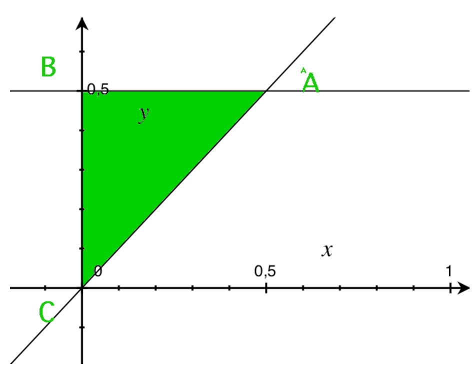

Figura 1

Le equazioni parametriche dei segmenti che compongono la frontiera sono:
Segmento AB:
$\underline{F_1}(t) = (t, 1/2)$ con $t \in [0, 1/2]$ e qui la funzione composta è $\varphi_1(t) = t^3 - 3t + 1/2$
Segmento BC:
$\underline{F_2}(t) = (0, t)$ con $t \in [0, 1/2]$ e qui la funzione composta è $\varphi_2(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$
Segmento CA:
$\underline{F_3}(t) = (t, t)$ con $t \in [0, 1/2]$ e qui la funzione composta è $\varphi_3(t) = 3t^3 - 3t^2 - 3t + 1$.

Calcolando le derivate si trova il loro comportamento nell'intervallo $[0, 1/2]$, vedi Figure 2, 3, 4.
Quindi il massimo e il minimo saranno il più grande ed il più piccolo dei valori assunti da f nei punti A, B, C. Poichè si ha $f(A) = -7/8, f(B) = 1/2, f(C) = 1$ il massimo è 1 ed il minimo è $-7/8$.

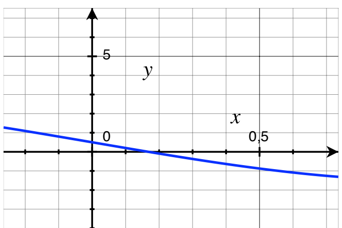

Fig. 2 $\varphi_1(t)$, $t \in [0, 1/2]$

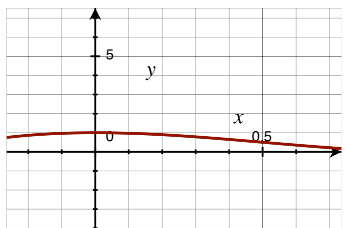

Fig. 3 $\varphi_2(t)$, $t \in [0, 1/2]$

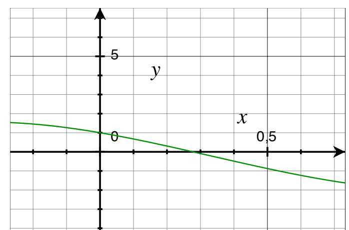

Fig. 4 $\varphi_3(t)$, $t \in [0, 1/2]$

Esercizio 3 Calcolare l'integrale
$$\int\int_S |y|\, dxdy$$
dove S è l'insieme disegnato in Figura 1.
Suggerimento L'insieme di integrazione può essere ridotto alla parte di S nel primo quadrante. Spiegare perchè.

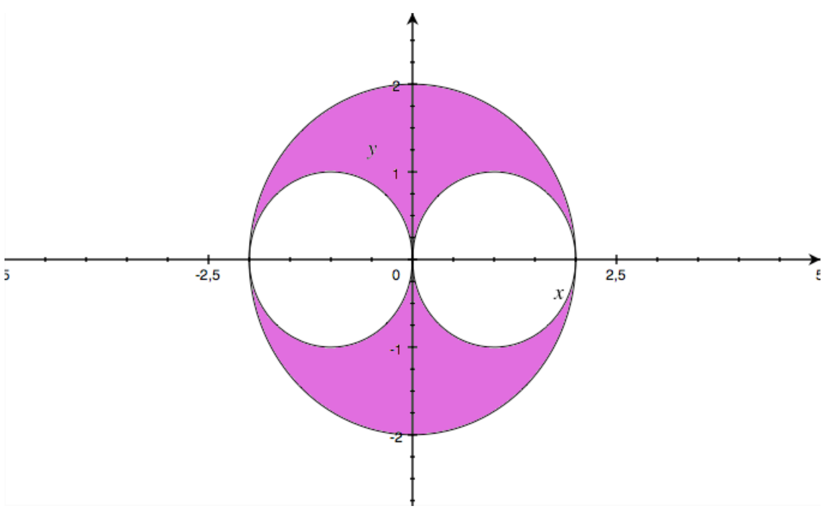

Figura 1 L'insieme S

Soluzione L'insieme S è descritto dalle seguenti equazioni

$$S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ (x-1)^2 + y^2 > 1, (x+1)^2 + y^2 > 1\}$$

L'insieme S è simmetrico rispetto all'asse delle ascisse e delle ordinate e l'integranda è una funzione "pari"rispetto a x e rispetto ad y. Quindi gli integrali estesi ai quarti del cerchio saranno tutti uguali. Denotando con T la parte di S contenuta nel primo quadrante (vedi Figura 2), si ha

(2) $$\int\int_S x\,dxdy = 4\int\int_T x\,dxdy.$$

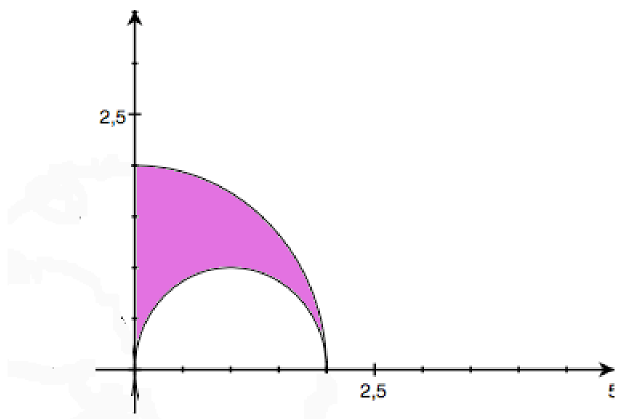

Figura 2 L'insieme T

Calcolo dell'integrale a secondo membro in (2): lo facciamo in due modi, senza e con cambiamento di variabili

II Modo

$$\int_T y\,dxdy = \int_0^2 \Big(\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} ydy\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \Big[4 - x^2 - 2x + x^2\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 [4 - 2x]\ dx = 2$$

Quindi l'integrale richiesto è 8.

II Modo Calcolo dell'integrale a secondo membro in (2), usando le coordinate polari. La frontiera è formata da un quarto di circonferenza e da una semicirconferenza che in coordinate polari hanno equazione

$$\rho = 2, \quad \theta \in [0, \pi); \qquad \rho = 2\cos(\theta) \quad \theta \in [0, \pi/2).$$

E l'insieme T', trasformato di T è (vedi Figura 3)

$$\{(\rho,\theta) : 2\cos(\theta) \le \rho < 2, \qquad \theta \in [0,\pi)\}.$$

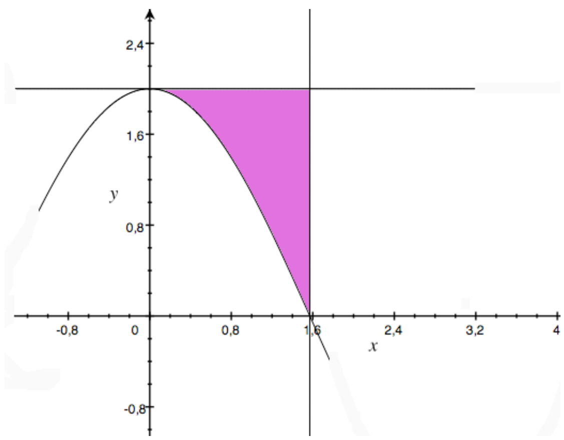

Figura 3 L'insieme $T^{'}$

Dunque

$$\int_{T'} y\,dxdy = \int_0^{\pi/2}\int_{2\cos(\theta)}^{2}\Big(\rho^2\sin(\theta)d\rho\Big)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\sin(\theta)\Big(\int_{2\cos(\theta)}^{2}\rho^2 d\rho\Big)d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\sin(\theta)\Big[\rho^3\Big]_{2\cos(\theta)}^{2}d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\sin(\theta)\Big[8-8\cos^3(\theta)\Big]d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}\sin(\theta)d\theta - \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3(\theta)\sin(\theta)d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\big[-\cos(\theta)\big]_0^{\pi/2} + \frac{8}{12}\big[\cos^4(2\theta))\big]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{8}{12} = 2$$

Quindi l'integrale richiesto è 8.