Calcolo differenziale ed integrale 2
Aprile 2012

Esercizio 1 Calcolare il seguente limite usando la formula di Taylor

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - \cos x. + (1/2)\log(1+x^2)}{x^4} \tag{1}$$

Soluzione Ricordando la formula di Mac Laurin delle funzioni e^x, $\cos(x)$ e $\log(1+x)$ si ha per $x \to 0$

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + o(x^6) \\ -\cos(x) &= -1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6) \\ \frac{1}{2}\log(1+x^2) &= +\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + o(x^6). \end{aligned}$$

Semplifichiamo e osserviamo che $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24} - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{24}$. Allora indicando con $N(x)$ il numeratore in (1), si ha

$$N(x) \sim \frac{5}{24}x^4 + o(x^4).$$

Ne segue che il limite richiesto è $5/24$.

Esercizio 2 Stabilire se il seguente integrale improprio converge, diverge o è indeterminato

$$\int_{-3}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{(x+4)} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-9}}\, dx.$$

Soluzione Denotiamo con f la funzione integranda; è definita e continua in ogni punto tranne che in ± 3 e -4. Dobbiamo stabilire se è integrabile in $[-3, +\infty)$ ma dei tre punti trovati soltanto -3 e 3 cadono in questo intervallo. Quindi dobbiamo stabilire se f è integrabile in senso improprio in -3, $+3$ e in $+\infty$.
In -3 la funzione f è un infinito e si ha

$$f(x) \sim \frac{\sin(3)}{7} \frac{1}{\sqrt[3]{x-3}} \quad \text{per} \quad x \to 3$$

In 3 la funzione f è un infinito e si ha $1/\sqrt[3]{x-3}$

$$f(x) \sim \sin(-3) \frac{1}{\sqrt[3]{x+3}} \quad \text{per} \quad x \to -3.$$

Quindi per il criterio del confronto asintotico la funzione è integrabile in senso improprio in entrambi i punti -3 e 3.

Infine resta da stabilire se la funzione è integrabile in un intorno di $+\infty$. Dovendo calcolare il limite all'infinito possiamo supporre x abbastanza grande, per esempio $x > 3$. Allora, poichè $|\sin(x)| \leq 1$ possiamo scrivere

$$0 \leq \Big|\frac{\sin(x)}{(x+4)}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-9}}\Big| \leq \frac{1}{(x+4)}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-9}}.$$

La funzione a destra della disuguaglianza è infinitesima dello stesso ordine di $1/x^{1+2/3}$ quindi per il teorema del confronto asintotico è integrabile in senso improprio a $+\infty$; quindi anche f lo è.
Concludendo: l'integrale assegnato è convergente.

Osservazione Alternativamente si poteva scrivere l'integrale assegnato come la somma dei seguenti integrali impropri

$$\int_{-3}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-3}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{6} f(x)dx + \int_{6}^{+\infty} f(x)dx$$

e procedere poi allo stesso modo.

Esercizio 3 Sia f la somma della serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \tag{2}$$

i) Trovare l'intervallo di convergenza.

ii) Calcolare $f(1/4)$ a meno di 10^{-3}.

iii) Disegnare approssimativamente la somma della serie in un intorno dell'origine.

Soluzione

i) Usando il criterio del rapporto per le serie di potenze per la serie dei moduli si ha
$$\lim_n \frac{2n+3}{2n+1} = 1$$
quindi il raggio di convergenza è 1. Si vede subito che la serie converge in entrambi gli estremi per il criterio sulle serie a segni alterni. Quindi l'intervallo di convergenza è $[-1,1]$.

ii) Calcoliamo in $x = 1/4$, si ha
$$f(\frac{1}{4}) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\frac{1}{4^{2n+1}}$$
Si tratta di una serie numerica a segni alterni (convergente per il punto ii)) che soddisfa il criterio di Leibnitz. Infatti la successione di termine generale

$1/((2n+1)4^{2n+1})$ è infinitesima e non crescente (si verifica subito). Denotiamo con S_n la somma parziale $n-$esima della serie; per il criterio di Leibnitz si ha

$$\left|f(\frac{1}{4}) - S_n\right| \leq \frac{1}{4^{2n+3}} \frac{1}{(2n+3)}.$$

Si verifica che per $n = 1$ si ha

$$\frac{1}{4^{2n+3}} \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{5120} < 10^{-4};$$

quindi l'approssimazione richiesta è $S_1 = 1/4 - 1/(3 * 4^3) = 1/4 - 1/192 = 0.2447916..$

iii) La serie è la serie di Mac Laurin della sua somma quindi basta guardare i primi tre termini della serie per dedurne i valori di $f^{(j)}(0)$ per $j = 0, 1, 2$. Si ottiene

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f^{(3)}(0)/(3!) = -1/3$$

quindi $f^{(3)}(0) = -2$. Quindi nell'origine la funzione ha per tangente la retta $y = x$. Questo ci può bastare per disegnare approssimativamente la funzione in un intorno di zero.
L'informazione sulla derivata terza può essere utile per precisare ulteriormente il grafico: in un intorno di zero si ha

$$f(x) - x = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots\ldots$$

dunque la funzione è sotto la bisettrice a destra di zero e sopra di essa a sinistra di zero. Il grafico di f attorno all'origine è in Figura 1.

In realtà nella serie assegnata si può riconoscere lo sviluppo dell'arcotangente. Riconoscendo immediatamente questa serie, la risposta ai punti 1 e 4 è immediata.

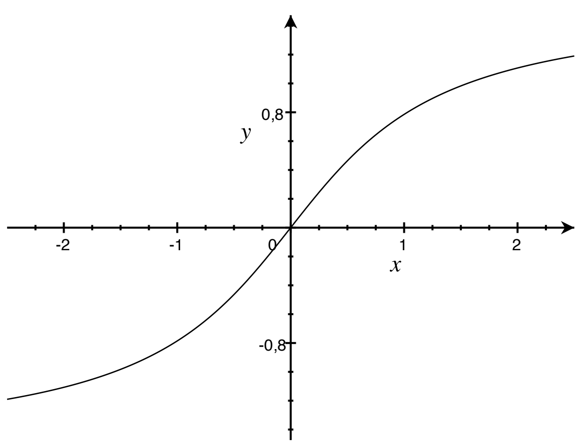

Figura 1 Grafico di f in un intorno dell'origine.