Metodi matematici per la chimica

Corsi di Laurea in Chimica e Chimica Industriale

A.A.2003-2004

Esercizi

1. Trovare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{1}^{\infty} \log(1-\frac{1}{n})\Big(5-\frac{x^2}{3}\Big)^n.$$

2. Trovare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\Big(x^2-2x\Big)^{n+1}.$$

e determinarne la somma.

3. È data la serie

$$\sum_{1}^{\infty} (2x)^n \ \log\Big(1+\frac{|2x|}{n}\Big).$$

a) Per quali x converge assolutamente?

b) Per quali x converge ?

4. Si consideri la curva piana $\mathcal{C}$ di equazioni parametriche $\Phi(t) = (x(t), y(t))$ dove

$$x(t) = \cos^3 t, \qquad\qquad y(t) = \sin^3 t$$

$0 \leq t \leq 2\pi$.

a) Scrivere l'equazione di $\mathcal{C}$ in coordinate cartesiane.

b) Calcolare la lunghezza di C.

5. È data la curva $\Gamma = \Gamma(t)$ di equazioni parametriche

$$x(t) = 3\cos(t), \quad y(t) = 3\sin(t), \quad z(t) = 6t \qquad\qquad t \in [0, 2\pi].$$

i) Trovarne la lunghezza.

ii) Scrivere l'equazione della retta tangente al punto di coordinate $P = (0, 3, 3\pi)$.

iii) Usando la regola di derivazione delle funzioni composte, calcolare la derivata della funzione

$$\varphi(t) = g(\Gamma(t))$$

dove $g(x, y, z) = 1 - e^{xyz}$.

6. È data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(e^{|xy|} - 1) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

i) stabilire dove è continua.
ii) dire se esiste la derivata direzionale in $(0,0)$ nella direzione $(1,1)$.
iii) dire se è differenziabile nell'origine, e in caso affermativo scrivere l'equazione del piano tangente in $(0,0)$.

7. Dire se la funzione

$$f(x,y) = x + |x|y.$$

è differenziabile nei punti $O = (0,0)$ e $P = (1,1)$ e, in caso affermativo, scrivere l'equazione del piano tabgente al grafico diella funzione.

8. È data la funzione

$$f(x,y) = \log(\frac{y}{y+x^2}).$$

Trovare l'insieme di definizione D e stabilire in quali punti di D è continua e in quali è differenziabile.

9. È data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \log|y| & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

i) stabilire se è differenziabile in $(0,0)$.
ii) dire se sono continue le derivate parziali in $(0,0)$.
iii) dire in quali punti di R^2 esistono le derivate parziali.

10. È data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x^2+y^2}) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

i) Mostrare che è differenziabile nell'origine, ma $f_x)$ non è continua nell'origine.

11. È data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

i) Dire se è differenziabile nell'origine, e se le derivate prime sono continue nell'origine.

12. È data la funzione

$$f(x,y) = x + \sqrt{x^2+y^2}.$$

1. Stabilire se nell'origine:
i) è continua
ii) esistono le derivate parziali
iii) se esiste il piano tangente, e se esiste, scriverne l'equazione.
2. Rispondere alle stesse domande nel punto $P(1,1)$.

13. È data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \; + \; \sqrt{4x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

a. Trovare il suo insieme di definizione e di continuità.
b. Stabilire se nell'origine esistono le derivate parziali, se esiste il piano tangente e, se esiste, scriverne l'equazione.

14. È data la funzione

$$f(x,y) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2y^2+3}}.$$

a) Calcolare le derivate parziali.
b) Stabilire dove è differenziabile e scrivere l'equazione del piano tangente in $P_o = (2,1)$, se questo esiste.
c) Calcolare la derivata direzionale in P_o nella direzione $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
d) Determinare e disegnare la curva di livello $\mathcal{C}$ corrispondente alla quota $k=1$; scelto un verso di percorrenza della curva, calcolare il versore tangente a $\mathcal{C}$ in P_o.

15. È data la funzione

$$f(x,y)=\log(\frac{y}{y+x^2}).$$

Trovare l'insieme di definizione D e stabilire in quali punti di D è continua e in quali è differenziabile.

16. È data la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{yx^2+xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{se } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

i) Trovare il suo insieme di definizione e di continuità.

ii) Stabilire se nell'origine esistono le derivate nella direzione dei vettori

$$\underline{e}_1=(0,1) \qquad \underline{e}_2=(1,0), \qquad \underline{v}=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}).$$

Si può dire che non è verificata la relazione $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot\underline{v}$ fornita dal teorema del differenziale?

iii) Calcolare le derivate parziali di f e trovare il loro insieme di continuità.

iv) Trovare l'insieme dei punti di $\mathbf{R}^2$ in cui f è differenziabile.

v) Calcolare $\frac{\partial f}{\partial \underline{w}}(1,5)$, $\underline{w}=(1,-1)$.

17. È data la funzione

$$f(x,y)=x^2+\log(y-x^2).$$

i) dopo aver trovato l'insieme di definizione D, stabilire in quali punti di D è continua e in quali è differenziabile,

ii) studiare le curve di livello,

iii) calcolare la derivata direzionale nel punto $P_0=(1,2)$ nella direzione dell'asse delle ordinate,

iv) deternimare gli eventuali punti critici e i massimi e minimi relativi.

18. È data la funzione

$$f(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$$

i) determinare il suo insieme di definizione D e l'insieme di continuità.

ii) mostrare che è prolungabile per continuità in tutto $\mathbf{R}^2$. Detta f^* la sua prolungata, stabilire se è differenziabile nell'origine, e in caso affermativo scrivere l'equazione del piano tangente in $(0,0)$ e della derivata direzionale in $(0,0)$ nella direzione $(1,2)$.

iii) dire se l'origine è un punto si massimo o minimo relativo o un punto sella.

19. È data la funzione

$$f(x, y) = x + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

a) Trovarne l'insieme di definizione Ω, discutere continuità e differenziabilità.

b) Determinare massimi e minimi relativi ed assoluti in Ω.

20. Trovare e classificare i punti estremali della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^4 + z^3 + y^2 - 2zx.$$

21. Calcolare l'area della parte di piano E descritta dalle seguenti disequazioni.

$$y > 0 \qquad\qquad x < y \qquad\qquad x^2 + y^2 < 3\sqrt{x^2 + y^2} - 3x$$

Suggerimento: trasformare l'insieme E mediante le coordinate polari.

22. Su una lamina piana D è distribuita una massa di densità

$$\rho(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$

Trovarne il baricentro sapendo che la lamina è descritta dalle disuguaglianze

$$r \leq x^2 + y^2 \leq R, \qquad x \geq 0,$$

e r e R sono due parametri reali positivi.