PROIEZIONI DI MATRICI STOCASTICHE SU ALGEBRE DI MATRICI

Data $\mu \in \{0,1\}^{n\times n}$ ed U unitaria, si considera lo spazio vettoriale $\mathcal{L} = \{U(\mu \circ Z)U^* \mid Z \in \mathbb{C}^{n\times n}\}$ e la migliore approssimazione in $\mathcal{L}$ di $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathcal{L}_A = \arg\min_{X\in\mathcal{L}} \|A - X\|_F$. Nell'ipotesi che la colonna i-sima di U sia costante e $\mu_{ii} = 1$, si mostra che

$$A^T e = e \implies (\mathcal{L}_A)^T e = e, \qquad e = (1,\ldots,1)^T \tag{1}$$

ovvero proiezioni in $\mathcal{L}$ di matrici stocastiche rimangono stocastiche. Esempi di spazi $\mathcal{L}$ con $\mu = I$ per cui vale (1) sono $\mathcal{C}, \eta, Haar, Householder$, algebre di particolare interesse perché generate da basi ortogonali $\{J_1,\ldots,J_n\}$, con $J_i \in \{-1,0,1\}^{n\times n}$, e simultaneamente diagonalizzate da trasformate discrete veloci. Si osserva che $\mathcal{L}$ è un'algebra di matrici se $\mu^2 \leq \alpha\mu$, $\alpha \geq 0$, e dunque non solo per $\mu = I$. Diventa quindi interessante lo studio di $\mathcal{L}_A$ e di sue possibili applicazioni $-$ ad esempio nell'analisi dello spettro di A $-$ anche nel caso più generale in cui $\mu \neq I$.