GEOMETRIA (per Informatici)

Maria Grazia Marinari[1]

February 4, 2006

[1]Questi appunti sono in larga parte ispirati alle dispense di Geometria (per Informatici) di G. Niesi.

Chapter 1

Indice

Chapter 2

Introduzione

Con i termini *Computer Graphics* e *Visualization* si intende perloppiú l'uso del computer per ottenere *informazione grafica* (ossia produrre carte, mappe, grafici, immagini, disegni, forme ecc) è quindi immediato il collegamento con la *Geometria*, letteralmente misurazione della terra. Questa è una branca tra le piú antiche della matematica: già sviluppata eminentemente *per questioni pratiche,* quali la misurazione di campi o pezzi di terreno da Egiziani e Babilonesi e organizzata in modo sistematico *a livello di teoresi* dai Greci[1].

Nei suoi *Elementi* Euclide adotta il seguente metodo:

- *definizione* degli oggetti da studiare (punti, rette,...),
- *individuazione* di un numero finito di *Assiomi* o *Postulati*[2] su tali oggetti,
- *deduzione* dei *Teoremi* e *Proposizioni*[3].

Da allora, per oltre 2000 anni la geometria si è sviluppata attraverso tentativi di ampliamento e miglioramento dell'impianto euclideo. In particolare, siccome Euclide aveva dimostrato le prime 28 proposizioni senza usare il quinto postulato:

se una retta, incontrando altre due rette, forma da una parte due angoli coniugati interni, tali che la loro somma sia minore di due angoli retti, le due rette si incontrano da quella parte

grandi sforzi furono dedicati a tentare di dedurlo dai primi 4 postulati e 28 proposizioni e solo nel XIX sec. si pervenne alla conclusione che esso non è dimostrabile e che anzi è possibile costruire "geometrie" senza usarlo.

[1] Da Talete (VII sec. a.C.), a Euclide (IV sec a.C.), alla scuola alessandrina (fino ai primi sec. d.C.)

[2] Ritenuti verità evidenti che non richiedono dimostrazione.

[3] Affermazioni desunte con regole logiche dagli assiomi e dai risultati già dimostrati.

In seguito alla scoperta delle cosiddette *Geometrie non Euclidee*[4]

da una parte F. Klein, nel celebre *programma di Erlangen (1872),* pervenne a formulare una *definizione corretta* del concetto di geometria:

una geometria di un insieme S è lo studio delle proprietà di S (e dei suoi sottinsiemi) che sono invarianti *quando gli elementi di S sono sottoposti alle trasformazioni di un gruppo fissato;*

dall'altra D. Hilbert, alla fine del XIX sec., attraverso uno *studio critico* dei

- fondamenti della geometria euclidea
- natura dei sistemi di assiomi (in generale),

dette una *definizione assiomatica corretta* della geometria euclidea del piano[5].

n.b. In una *teoria deduttiva astratta* il sistema di assiomi come tale è 'senza significato' e la questione della verità degli assiomi è irrilevante. Se, però, si può assegnare un *significato* ai termini indefiniti e alle relazioni, in modo che gli assiomi siano giudicati veri, allora i teoremi sono veri nel senso comunemente accettato. Più precisamente:
un sistema di assiomi per essere significativo *deve essere* consistente, *ossia non deve essere possibile dedurre dagli assiomi un teorema che contraddice gli assiomi o un teorema già dimostrato.*

2.1 Sistemi di coordinate

Per comunicare con un computer, per fissare la posizione di un punto nello spazio dobbiamo:

trattare con un *sistema di riferimento*

misurare distanze e direzioni in una forma puramente numerica.

2.1.1 Coordinate ascisse sulla retta

Dare un *sistema di coordinate ascisse* su una retta r significa assegnare $r \ni O \neq U$:

il punto O è detto *origine delle coordinate*,

il punto U è detto *punto unità delle coordinate*,

se $r \ni P$ sta sulla semiretta contenente U diremo che $P > O$, altrimenti diremo che $P < O$. In tal modo sono fissati su r :

un *verso positivo* (ossia r è una *retta orientata)* e

un segmento OU *unità di misura* per i segmenti di r.

Dati due punti $P, Q \in r$, il segmento di estremi P e Q (senza ordine e non necessariamente distinti) è indicato $\overline{PQ}$

[4]Soprattutto a opera di Lobachevsky(1793-1856), Gauss(1777-1855), Bolyai(1802-1860) e Riemann(1826-1866).

[5]Attraverso *termini indefiniti* (punto, retta, piano) e *relazioni tra i termini* (incidenza, stare tra, congruenza, separazione) definite da un numero finito di *assiomi* (di incidenza, di ordinamento, di congruenza, delle parallele, di continuità) .

Definizione 2.1.1 L' *ascissa* $P \in r$ rispetto al riferimento $\{O, U\}$ è il numero reale $x(P)$ definito da:

$$x(P) := \begin{cases} \frac{\overline{OP}}{\overline{OU}} & se\ P > O \\ -\frac{\overline{OP}}{\overline{OU}} & se\ P < O \end{cases}$$

Una *retta affine* è una retta r dotata di ascisse.

La *distanza* tra due punti P e Q di una retta affine è

$$d(P, Q) := |\ x(P) - x(Q)\ |\ .$$

Il *segmento orientato* di estremi P e Q è la coppia ordinata (P, Q), *indicato anche* OP.

La *misura algebrica* del segmento orientato (P, Q) è il numero reale

$$PQ := x(Q) - x(P).$$

Si ha $x(O) = 0, x(U) = 1$ e $x(P) = \frac{OP}{OU},\ \forall\ P \in r$.
Fissato un riferimento $\{O, U\}$ su una retta r, ogni $P \in r$ individua un numero reale $x(P)$ e viceversa, ossia l'insieme dei numeri reali è un *modello* per la retta affine (o euclidea).

Proposizione 2.1.2 *Se $\{O', U'\}$ è un altro riferimento su r e $x'(P)$ è l'ascissa di $P \in r$ rispetto a $\{O', U'\}$, vale*

$$x'(P) = \alpha x(P) + \beta, \tag{2.1}$$

dove $\alpha = \frac{OU}{O'U'}$ *e* $\beta = \frac{OO'}{O'U'}$.

Dim. Si ha:

$$\begin{aligned} x'(P) &= \frac{O'P}{O'U'} = \frac{O'O + OP}{O'U'} = \frac{O'O}{O'U'} + \frac{OP}{O'U'} = \\ &= \frac{O'O}{O'U'} + \frac{OU}{O'U'} \cdot \frac{OP}{OU} = \alpha x(P) + \beta \end{aligned}$$

Definizione 2.1.3 *La (2.1) è detta* formula di cambiamento delle ascisse.

Osservazione 2.1.4 Se r, r' sono due rette, con ascisse rispettive x, x', un'*affinità* (o *trasformazione affine)* tra r e r' è un'applicazione bigettiva

$$T : r \longrightarrow r' \quad \text{definita da} \quad T(x) := ax + b \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

n.b anche se la formula del cambiamento delle ascisse su una stessa retta e quella della trasformazione affine tra due rette distinte sono simili, esse hanno un significato totalmente diverso.

2.1.2 Coordinate cartesiane nel piano

Dare un *sistema di coordinate cartesiane* su un piano π significa assegnare due rette non parallele (ossia incidenti in un punto $O \in \pi$!), entrambe dotate di un sistema di ascisse con origine il punto O, detto *origine delle coordinate cartesiane del piano*, mentre le due rette sono dette *assi coordinati*, rispettivamente delle *ascisse* x e delle *ordinate* y.
Per ogni punto $P \in \pi$, siano:

P_x il punto intersezione dell'asse x con la $\parallel$ per P all'asse y[6] e

P_y il punto intersezione dell'asse y con la $\parallel$ per P all'asse x,

le ascisse $x := x(P_x)$, $y := x(P_y)$ (rispettivamente sugli assi x e y) sono dette *coordinate cartesiane* di P nel riferimento $\sigma(O; x, y)$ e si scrive $P(x, y)$.
Si ha: $O(0, 0)$, inoltre ogni punto dell'asse x ha coordinate $(x, 0)$ mentre ogni punto dell'asse y ha coordinate $(0, y)$ (cioè: $Y = 0$ e $X = 0$ sono rispettivamente 'equazioni' dell'asse x e dell'asse y).

Definizione 2.1.5 Un *piano affine* è un piano π dotato di un riferimento cartesiano $\sigma(O; x, y)$.

n.b. Fissato $\sigma(O; x, y)$ su π, $\forall\, P \in \pi$ determina le sue coordinate cartesiane e viceversa $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2\, \exists!\, P \in \pi$, tale che $P(x, y)$. Ossia, via la c.b.u. di cui sopra, l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali può essere considerato come modello del piano affine (o euclideo).

Se gli assi coordinati sono $\perp$ tra loro, il sistema è detto di *coordinate cartesiane ortogonali*[7].

Se l'unità di misura è la stessa per entrambi gli assi coordinati, il sistema è detto *monometrico*.

Esempio 2.1.6 Siano $\sigma(O; x, y)$ un sistema di coordinate su un piano π, $O'(a, b)$ un punto di π, e $\sigma'(O'; x', y')$, un altro sistema di coordinate su π, con $x \parallel x'$ e $y \parallel y'$. Sia inoltre $P \in \pi$ con $P(x, y)$ in σ e $P(x', y')$ in σ'. Si ha:

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}$$

2.1.3 Coordinate cartesiane nello spazio

Dare un *sistema di coordinate cartesiane* nello spazio Σ significa assegnare tre rette incidenti in un punto O (detto *origine delle coordinate cartesiane dello spazio*) tutte dotate di un sistema di ascisse con origine il punto O e dette *assi coordinati*, rispettivamente asse x, asse y, asse z. Sono detti *piani coordinati* i tre piani individuati dalle tre coppie di assi, precisamente:

il *piano xy* è il piano individuato dagli assi x e y,

il *piano xz* è il piano individuato dagli assi x e z,

[6] Ovviamente ciò ha senso nella geometria euclidea!

[7] Di solito assumeremo che sia cosí!

il *piano xy* è il piano individuato dagli assi x e y.
Per ogni punto $P \in \pi$, siano:
P_x il punto intersezione dell'asse x con il piano per $P \parallel$ al piano yz,
P_y il punto intersezione dell'asse y con il piano per $P \parallel$ al piano xz,
P_z il punto intersezione dell'asse z con il piano per $P \parallel$ al piano xy,
le ascisse $x := x(P_x)$, $y := x'(P_y)$, $z := x"(P_z)$ (rispettivamente sugli assi x, y e z) sono dette *coordinate cartesiane* di P nel riferimento cartesiano $\sigma(O; x, y, z)$ e si scrive $P(x, y, z)$.
Si ha: $O(0, 0, 0)$, inoltre ogni punto dell'asse x ha coordinate $(x, 0, 0)$, ogni punto dell'asse y ha coordinate $(0, y, 0)$ e ogni punto dell'asse z ha coordinate $(0, 0, z)$.

Definizione 2.1.7 Lo spazio dotato di un riferimento cartesiano $\sigma(O; x, y, z)$ è detto *spazio affine.*

n.b. Fissato $\sigma(O; x, y, z)$ (su Σ) $\forall\, P \in \Sigma$ determina le sue coordinate cartesiane e viceversa $\forall\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\, \exists!\, P \in \Sigma$, tale che $P(x, y, z)$. Ossia, via la c.b.u. di cui sopra, l'insieme $\mathbb{R}^3$ delle terne ordinate di numeri reali può essere considerato come modello dello spazio affine (o euclideo[8]).

Se gli assi coordinati sono a due a due $\perp$ tra loro, il sistema è detto di *coordinate cartesiane ortogonali*.

Se l'unità di misura è la stessa per tutti gli assi coordinati, il sistema è detto *monometrico.*

2.1.4 Orientazione dei sistemi di coordinate cartesiane

L'orientazione dei sistemi di coordinate cartesiane dello spazio (a tre dimensioni) è definibile in modo abbastanza naturale e intuitivo, per quanto riguarda invece l'orientazione dei sistemi di coordinate cartesiane del piano 'occorre uscire dal piano stesso scegliendo quale *faccia* considerarne'.

Definizione 2.1.8 Un sistema di coordinate cartesiane $\sigma(O; x, y, z)$ è *orientato positivamente* se un osservatore, collocato con i piedi in O e con la testa nella direzione positiva dell'asse z, vede percorrere l'angolo $0 < \theta < \pi$ (che porta il semiasse positivo dell'asse x a sovrapporsi sul semiasse positivo dell'asse y) in senso antiorario.

Definizione 2.1.9 Un sistema di coordinate cartesiane $\sigma(O; x, y)$ di un piano π è *orientato positivamente rispetto a una retta r (orientata, passante per O e non giacente su π)* se $\sigma(O; x, y, r)$ è orientato positivamente.

[8]La differenza tra spazio (risp. piano, retta) affine ed euclideo sarà chiarita in seguito, a questo punto segnaliamo solo che lo spazio affine è indicato $\mathbb{A}^3$ (risp. $\mathbb{A}^2, \mathbb{A}^1$) mentre quello euclideo è indicato E^3 (risp. E^2, E^1) e che talvolta vengono confusi scrivendo semplicemente $\mathbb{R}^i, i = 1, 2, 3$.

2.2 Spazio n-dimensionale

Sinora abbiamo complessivamente visto che:

- $r \longleftrightarrow \mathbb{R}$;
- $\pi \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$;
- $\Sigma \longleftrightarrow \mathbb{R}^3$.

Astraendo dal senso geometrico:

- $\mathbb{R}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \, : \, x_i \in \mathbb{R}, \, 1 \leq i \leq n\}$ è detto *spazio* n*-dimensionale*,
- gli elementi di $\mathbb{R}^n$ sono detti *vettori a* n *componenti*[9],
- il numero reale x_i è detto i*-esima coordinata* o *componente del vettore* $\underline{x} := (x_1, \ldots, x_n)$,
- $\mathbb{R}^n \ni \underline{x}, \underline{y}$ soddisfano $\underline{x} = \underline{y}$ se $x_i = y_i, \forall \; 1 \leq i \leq n$.

Consideriamo su $\mathbb{R}^n$ le operazioni di *addizione* e *moltiplicazione per scalari:*.
Siano $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n), \underline{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

- la *somma dei vettori* $\underline{x}$ *e* $\underline{y}$ è

  $\underline{x} + \underline{y} := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$

- il *prodotto del vettore* $\underline{x}$ *con lo scalare* $\lambda \in \mathbb{R}$ è

  $\lambda\underline{x} := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.

  Posto:
  $\underline{0} := (0, \ldots, 0)$ e
  $-\underline{x} := (-x_1, \ldots, -x_n)$

le operazioni di addizione e moltiplicazione per scalari soddisfano, per ogni $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, le seguenti proprietà:

- della sola addizione

SV 1 $(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z})$ *associatività,*

SV 2 $\underline{0} + \underline{x} = \underline{x} + \underline{0} = \underline{x}$ *esistenza dell'elemento neutro,*

SV 3 $\underline{x} + (-\underline{x}) = -\underline{x} + \underline{x} = \underline{0}$ *esistenza dell'opposto,*

SV 4 $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$ *commutatività,*

- della sola moltiplicazione per scalari

SV 5 $(\lambda\mu)\underline{x} = \lambda(\mu\underline{x})$ *associatività,*

[9]Un vettore a 1 componente è detto anche *scalare*

SV 6 $1\underline{x} = \underline{x}$ *unitarietà,*

- che legano l'addizione e la moltiplicazione per scalari

SV 7 $(\lambda + \mu)\underline{x} = \lambda\underline{x} + \mu\underline{x}$ *distributatività dell'addizione di scalari,*

SV 8 $\lambda(\underline{x} + \underline{y}) = \lambda\underline{x} + \lambda\underline{y}$ *distributatività dell'addizione di vettori,*

- L'intero blocco di proprietà SV (ossia da $SV1$ a $SV8$) dice che $\mathbb{R}^n$ con l'addizione e la moltiplicazione per scalari è uno *spazio vettoriale* (reale).

  n.b. Le proprietà da $SV1$ a $SV3$ dicono che $\mathbb{R}^n$ con l'addizione è un *gruppo*, la $SV4$ che si tratta di un gruppo *commutativo*[10].

Esempio 2.2.1 *1.* Provare che se X è un insieme non vuoto qualsiasi, l'insieme $G := \{f : X \longrightarrow X : f \text{ è bigettiva }\}$ costituisce un gruppo non commutativo, rispetto alla composizione di applicazioni.

(Di solito un gruppo commutativo additivo è chiamato abeliano *dal nome del matematico norvegese N. Abel (1802-1829)).*

2. I vettori

$$\underline{e_1} := (1, 0, \dots, 0),\ \underline{e_2} := (0, 1, \dots, 0),\ \dots \underline{e_n} := (0, 0, \dots, 1)$$

rivestono un'importanza notevole in quanto

$$\forall\ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \text{ si } \quad \text{ha } \underline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \underline{e_i}$$

.

[10]Non tutti i gruppi sono commutativi!

Chapter 3

Numeri Complessi

3.1 Definizione e prime proprietà

Sull'insieme:

$$\mathbb{C} := \{z = a + ib : \ a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

si definiscono le operazioni di *addizione* e *moltiplicazione* nel modo seguente: se $z = a + ib, z' = a' + ib'$, poniamo

$$z + z' := a + a' + i(b + b'),$$

$$zz' := aa' - bb' + i(ab' + a'b),$$

n.b. la scrittura $a+ib$ è pensata in modo formale, la somma e il prodotto di due numeri complessi sono ottenuti via 'calcolo algebrico formale', tenendo conto che $i^2 = -1$;
valgono le seguenti proprietà $\forall\, z, z', z" \in \mathbb{C}$:

- dell'addizione

CC 1 $(z + z') + z" = z + (z' + z")$ *associatività,*

CC 2 $\exists\, 0 := 0 + i0 \in \mathbb{C} : \ 0 + z = z + 0 = z$ *esistenza dell'elemento neutro,*

CC 3 $\exists -z := -a - ib \in \mathbb{C} : \ z + (-z) = -z + z = 0$ *esistenza dell'opposto,*

CC 4 $z + z' = z' + z$ *commutatività,*

- della moltiplicazione

CC 5 $(zz')z" = z(z'z")$ *associatività,*

CC 6 $\exists\, 1 := 1 + i0 \in \mathbb{C} : \ 1z = z1 = z$ *esistenza dell'unità,* CC 7 $\forall\, 0 \neq z,\ \exists\, z^{-1} := \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} \in \mathbb{C} :\ zz^{-1} = z^{-1}z = 1$ *esistenza dell'inverso,*

CC 8 $zz' = z'z$ *commutatività,*

- dell'addizione rispetto alla moltiplicazione

CC 9 $(z + z')z" = zz' + zz"$ *distributività*[1].

- Inoltre,

CC 10 se $zz' = 0$, con $z' \neq 0$, allora $z = 0$ *non esistenza di zero-divisori*[2],

CC 11 $z = a + ib = (\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}})^2$ *ogni elemento di* $\mathbb{C}$ *è un quadrato.*

Definizione 3.1.1 *L'insieme* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *è un corpo commutativo*[3]*, detto* corpo dei numeri complessi*,* i *è detta* unità immaginaria.

Se $z = a + ib$

la sua *parte reale* è $Re(z) := a$,

la sua *parte immaginaria* è $Im(z) := b$,

il suo *modulo* è $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$,

la sua *norma* è $N(z) := |z|^2 = a^2 + b^2$,

il suo *coniugato* è $\bar{z} := a - ib$,

l'applicazione $\sigma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $\sigma(z) := \bar{z}$ è detta *coniugio*;

le seguenti proprietà valgono in modo evidente:

i $\overline{(\bar{z})} = z$,

ii $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$,

iii $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$,

iv $|\bar{z}| = |z|$,

---

[1]Un insieme $\emptyset \neq X$ sul quale siano definite due leggi di composizione:

1. $+ : X \times X \longrightarrow X$, definita da $(x, x') \mapsto +(x, x') =: x + x'$,
2. $\cdot : X \times X \longrightarrow X$, definita da $(x, x') \mapsto \cdot(x, x') =: x \cdot x'$,

soddisfacenti le proprietà $CC1 \div CC9$ è detto detto *corpo commutativo,* se valgono tutte le proprietà $CC1 \div CC9$, esclusa $CC7$, l'insieme X è detto *anello.*

[2]In realtà, questa proprietà è conseguenza di $CC7$ infatti $z' \neq 0 \Longrightarrow \exists\, z'^{-1}$ con $z'^{-1}z' = 1$ da $0 = zz'$, moltiplicando ambo i membri per z'^{-1} si ottiene proprio $0 = z$. Un anello in cui vale $CC10$ è detto *integro* (o *dominio di integrità.*

[3]Essendo verificate le proprietà da $CC1$ a $CC9$.

v $N(z) = z\bar{z}$,

vi $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$,

vii $|z| = 0 \iff z = 0$,

viii $z + \bar{z} = 2Re(z) \in \mathbb{R}$,

ix $z - \bar{z} = 2Im(z)$,

x $z\bar{z} = N(z) \in \mathbb{R}$.

Proposizione 3.1.2 *Per ogni $z, z' \in \mathbb{C}$ si ha:*

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Dim. Si ha

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')(\overline{z + z'}) = (z + z')(\bar{z} + \bar{z'}) = \\ &= z\bar{z} + z\bar{z}' + z\bar{z} + z'\bar{z}' = |z|^2 + |z'|^2 + 2Re(z\bar{z'}), \end{aligned}$$

infatti $z\bar{z'} = \overline{z'\bar{z}} \implies z\bar{z'} + z'\bar{z} = 2Re(z\bar{z'})$ e inoltre, poiché la parte reale di un numero complesso è $\leq$ del suo modulo, si ha $2Re(z\bar{z'}) \leq 2|z\bar{z'}| = 2|z||\bar{z'}| = 2|z||z'|$ e quindi la tesi.

3.2 Forma trigonometrica e formula di Eulero

Riportando, in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali del piano, in ascissa la parte reale a di un numero complesso z e in ordinata la sua parte immaginaria b, si ottiene una c.b.u. tra $\mathbb{C}$ e i punti del piano, detto *piano di Argand-Gauss*[4], nella quale al numero complesso 0 corrisponde l'origine O delle coordinate e a $0 \neq z = a + ib \in \mathbb{C}$ corrisponde il punto $P(a, b)$.
Se $0 \neq z \in \mathbb{C}$, detto θ l'angolo formato dall'asse $Re(z)$ col segmento OP, si pone

$$\rho := |z| \quad \text{e} \quad Arg(z)^5 := \theta,$$

si ha:

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

inoltre

$$a + ib = z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

è detta *forma trigonometrica del numero complesso z*.

[4]L'idea della rappresentazione geometrica dei numeri complessi è in realtà dovuta all'opera di due matematici 'dilettanti' C. Wessel (1798) e J. Argand (1813), esposta poi in modo del tutto chiaro da F. Gauss nel 1831.

[5]n.b. $Arg(z)$ è definito a meno di multipli di 2π.

Proposizione 3.2.1 *Per ogni* $z, z' \in \mathbb{C}$ *si ha:*

$$Arg(zz') = Arg(z) + Arg(z').$$

Dim. Siano $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta), z' = \rho'(\cos\theta' + i\sin\theta')$, si ha:

$$\begin{aligned} zz' &= \rho\rho'[\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta') = \\ &= \rho\rho'[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')]. \end{aligned}$$

Corollario 3.2.2 *Per ogni* $z \in \mathbb{C}$ *si ha:*

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad \textit{formula di De Moivre.}$$

Dim. Dalla dimostrazione di Prop. 3.2.1 ricaviamo
$$z^2 = \rho^2[\cos(\theta+\theta) + i\sin(\theta+\theta)] = \rho^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$
inoltre, poiché $z^n = zz^{n-1}$, la tesi discende per induzione.

Oltre alla formula di De Moivre è di grande utilità (specialmente in fisica) la cosiddetta *formula di Eulero*[6] definita, per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, da:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

mediante la quale è possibile definire[7] la funzione esponenziale complessa:

$$e^z = e^{a+ib} := e^a \cdot e^{ib} = e^a \cdot (\cos b + i\sin b), \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Se $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, da $z = \rho e^{i\theta}$, la formula di De Moivre diventa:

$$z^n = \rho^n e^{in\theta}.$$

Esempio 3.2.3 *Calcolare* $(1+i)^{100}$.
Essendo $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, si ha $(1+i)^{100} = (\sqrt{2})^{100}e^{i100\frac{\pi}{4}} = 2^{50}e^{i25\pi} = -2^{50}$.

3.3 Radici n-esime

Definizione 3.3.1 *Per ogni* $n \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{C}$, *una* radice n-esima *di* α *è uno* $z \in \mathbb{C}$ *tale che* $z^n = \alpha$.

Proposizione 3.3.2 *Ogni* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *ha* n *radici* n*-esime distinte.*

Dim. Siano $r = |\alpha| \in \mathbb{R}$ e $\theta = Arg(\alpha) \in \mathbb{R}$, il modulo ρ e l'argomento ϕ di una radice n-esima di α devono essere tali che $\rho^n = r$ e $n\phi = \theta \pmod{2\pi}$, pertanto $\rho = \sqrt[n]{r}$ e $\phi = \frac{\theta+2k\pi}{n}$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$, cioè per ogni $k \in \mathbb{Z}$ il numero

[6] Che noi non dimostriamo.
[7] Anche di questo non diamo la dimostrazione.

$$\phi_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n})$$

soddisfa $\phi_k^n = \alpha$ e quindi è una radice n-esima di α (n.b. i numeri ϕ_k, al variare di $k \in \mathbb{Z}$, non sono tutti distinti e piú precisamente due interi $k_1 \neq k_2$ forniscono lo stesso numero complesso se e solo se

$$\frac{\theta + 2k_1\pi}{n} \equiv \frac{\theta + 2k_2\pi}{n} \qquad (mod 2\pi),$$

ossia $k_1 - k_2 \equiv 0 \pmod n$; pertanto, per avere tutte le radici n-esime distinte di α (*ciascuna una volta sola!)* basta attribuire a k ordinatamente i valori $0, 1, \ldots, n-1$.

Osservazione 3.3.3 In particolare, per $\alpha = 1$, otteniamo le n *radici n-esime dell'unità.*

$$\varepsilon_k := \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

a) $\varepsilon_1 := \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ è detta *radice n-esima primitiva dell'unità* e vale $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$[8];

b) vale inoltre: $\phi_k = \phi_0\varepsilon_1^k$.

c) Rappresentando i numeri complessi nel piano di Argand-Gauss, si vede subito che le radici n-esime dell'unità sono i vertici del poligono regolare di n lati (inscritto nel cerchio di centro O e raggio 1) che ha un vertice nel punto $P(1, 0)$.

3.4 Polinomi a coefficienti complessi

Definizione 3.4.1 *Un* polinomio in una variabile *(o* indeterminata) a coefficienti complessi[9] *è una scrittura*

$$f(X) := a_0 + a_1X + \cdots a_nX^n, a_i \in \mathbb{C},$$

il massimo indice dei coefficienti nonnulli di $f(X)$ è detto grado di $f(X)$ *e denotato* deg $f(X)$*, gli elementi nonnulli di $\mathbb{C}$ sono cosí polinomi di grado* 0 *(detti anche* costanti*), al polinomio nullo*[10] *si associa convenzionalmente il grado -1 o $-\infty$, l'insieme dei polinomi a coefficienti complessi è denotato* $\mathbb{C}[X]$.

[8] Le radici n-esime dell'unità formano un gruppo ciclico moltiplicativo di cui ε_1 è un generatore, cosí come qualsiasi ε_k, con k primo con n

[9] E piú in generale a coefficienti in un qualsiasi corpo commutativo o anello.

[10] Ossia il poninomio che ha nulli tutti i coefficienti.

Osservazione 3.4.2 $\mathbb{C}[X]$ è un anello rispetto alle usuali addizione e moltiplicazione di polinomi, ossia se

$$f(X) = a_0 + a_1X + \cdots a_nX^n, g(X) = b_0 + b_1X + \cdots b_mX^m \in \mathbb{C}[X],$$

indicati rispettivamente $N := \max(n, m)$ e $M := m + n$,

- $(f + g)(X)$ è il polinomio di grado N il cui coefficiente di grado i è $a_i + b_i$, $\forall\, 0 \leq i \leq N$ (dove si sono posti uguali a 0 i coefficienti del polinomio di grado minimo dal suo grado a N), mentre
- $(fg)(X)$ è il polinomio di grado M il cui coefficiente di grado i è $\sum\limits_{j+h=i} a_jb_h$, $\forall\, 0 \leq i \leq M$[11].

Teorema 3.4.3 (Teorema fondamentale dell'algebra) [12] *Ciascun polinomio di grado positivo a coefficienti complessi possiede in $\mathbb{C}$ almeno una radice*[13].

Teorema 3.4.4 *Un polinomio $f(X) \in \mathbb{C}[X]$ ammette una radice $z \in \mathbb{C}$ se e solo se $f(X)$ è divisibile per $X - z$*[14] *(cioè $\exists q(X) \in \mathbb{C}[X]$ tale che $f(X) = (X - z)q(X)$).*

Corollario 3.4.5 *I polinomi (non costanti) irriducibili di $\mathbb{C}[X]$ sono tutti e soli quelli di grado* 1.

Esempio 3.4.6 *a*) $f(X) = X^2-2$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[X]$, mentre è riducibile in $\mathbb{R}[X]$ e, ovviamente, in $\mathbb{C}[X]$;
b) $f(X) = X^2 - X + 1$ è irriducibile in $\mathbb{R}[X]$.

Osservazione 3.4.7 Il teorema fondamentale dell'algebra può essere riformulato come segue:

Un'equazione algebrica di grado n a coefficienti complessi

$$f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 = 0$$

possiede in $\mathbb{C}$ esattamente n radici (purché ogni radice venga contata tante volte quanto è la sua molteplicità[15].

[11] $\mathbb{C}[X]$ è detto *anello dei polinomi in una indeterminata a coefficienti in* $\mathbb{C}$, piú in generale si definisce l'anello $A[X]$ dei polinomi in una indeterminata a coefficienti in un anello A qualsiasi.

[12] Il teorema è noto anche come teorema di Gauss-D'Alembert, D'Alembert (1717-1783), nel 1746 ne diede una dimostrazione non algebrica non del tutto soddisfacente; Gauss nel 1797, dopo un esame critico particolareggiato delle dimostrazioni esistenti, ne forní addirittura quattro.

[13] Noi non ne diamo la dimostrazione.

[14] Dividendo $f(X)$ per $X - z$, scriviamo $f(X) = (X - z)q(X) + R(X)$ (con deg $R(X) \leq$ deg $(X - z)$), si ha pertanto $f(z) = (z - z)q(z) + R(z)$ da cui $f(z) = 0 \iff R(z) = 0$.

[15] La molteplicità di una radice $z \in \mathbb{C}$ di $f(X)$ è l'intero μ tale che $(X - z)^\lambda \mid f(X)\ \forall\, \lambda \leq \mu$ e $(X - z)^{\lambda+1} \nmid f(X)$. Se μ è la molteplicità di $z \in \mathbb{C}$ per $f(X)$ e $f^{(r)}(X)$ indica la derivata r-ima di $f(X)$, si ha $f^{(r)}(z) = 0$ per $r < \mu$ e $f^{(\mu)}(z) \neq 0$. Basta applicare la regola di derivazione del prodotto.

Esempio 3.4.8 *a*) $f(X) = X^n - \alpha$ ha in $\mathbb{C}$ n radici (tutte semplici);
b) Calcolare le radici complesse di $f(X) = X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 4X + 1$.

Proposizione 3.4.9 *Se $f(X) \in \mathbb{R}[X]$, uno $z \in \mathbb{C}$ è radice $\iff$ $\bar{z}$ lo è; inoltre z e $\bar{z}$ hanno la stessa molteplicità.*

Dim. Sia $f(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$ e sia $f(z) = 0 \implies$

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{f(z)} = \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \\ &= \overline{a_n z^n} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = \overline{a_n}\,\overline{z^n} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = \\ &= a_n \overline{z^n} + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 = f(\bar{z}). \end{aligned}$$

Corollario 3.4.10 *Ogni $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ si decompone nel prodotto di polinomi reali irriducibili di grado ≤ 2.*

Esempio 3.4.11 Decomporre

$$f(X) = X^7 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - 2X + 1$$

nel prodotto di fattori irriducibili reali e nel prodotto di fattori lineari complessi.

Chapter 4

Matrici e sistemi

4.1 Definizione e prime proprietà

Sia $\mathbf{k} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ o, piú in generale, un *corpo commutativo.*

Definizione 4.1.1 Una *matrice di tipo* $m \times n$[1] a elementi in $\mathbf{k}$ è una tabella

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

–
$$R_i^A := \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$
è detta $i - esima\ riga\, di\, A,\ 1 \leq i \leq m,$

–
$$C_A^j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \cdots \\ a_{ij} \\ \cdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$
è detta $j - esima\ colonna\, di\, A,\ 1 \leq j \leq n,$

– se $a_{ij} = 0, \forall\ i, j \implies A := 0$ è detta *matrice nulla,*

– se $m = n \implies A$ è detta *matrice quadrata di ordine* $n,$

– l'insieme delle matrici $m \times n$ a elementi in $\mathbf{k}$ è denotato $M_{m,n}(\mathbf{k})$, e se $m = n$ si scrive $M_n(\mathbf{k})$,

[1] Detta anche di tipo (m, n).

– una matrice $1 \times n$ è detta *matrice* o *vettore riga,*

– una matrice $n \times 1$ è detta *matrice* o *vettore colonna,*

n.b. identificheremo gli elementi di $\mathbf{k}^n$ con i vettori colonna,

– data $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbf{k})$, la sua *trasposta* è la matrice

$$^tA = (\alpha_{ij}) \in M_{n,m}(\mathbf{k}) \text{ con } \alpha_{ij} := a_{ji}{}^2 \in \mathbf{k}$$

,

– $A =^t A \Longrightarrow n = m$, $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall\, i \neq j$ e A è detta *matrice simmetrica,*

– gli elementi $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ di una matrice $A \in M_n(\mathbf{k})$ ne costituiscono la *diagonale principale,*

– se $a_{ij} = 0\,\forall\ i > j$, la matrice A è detta *matrice triangolare superiore,*

– se $a_{ij} = 0\,\forall\ i < j$, la matrice A è detta *matrice triangolare inferiore,*

– una matrice sia triangolare superiore che inferiore è detta *matrice diagonale*[3]*,*

– se $a_{ij} = \delta_{ij}$ (dove $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$ è il *simbolo di Kronecker (1823-1891))* A è detta *matrice identica (di ordine n),* e indicata con I_n,

– se in $A, \forall\, i \in \{2, \ldots, n\}$ il primo elemento nonnullo di R_i^A sta su una colonna di indice maggiore di quello del primo elemento nonnullo di R_{i-1}^A, la matrice A è detta *matrice a scalini,* il primo elemento nonnullo di R_i^A è detto *i-esimo pivot,*

– su $M_{m,n}(\mathbf{k})$ sono definite le operazioni di *addizione* e *moltiplicazione per scalari,* che lo rendono *spazio vettoriale su* $\mathbf{k}$, piú precisamente:

dati $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbf{k})$, $\lambda \in \mathbf{k}$,

$A + B := (a_{ij} + b_{ij})$,

$\lambda A := (\lambda a_{ij})$ e in particolare $-A := (-a_{ij})$,

che soddisfano:

SV 1 $(A + B) + C = A + (B + C)$,

SV 2 $A + 0 = A = 0 + A$,

SV 3 $A + (-A) = 0 = -A + A$,

---

[2]n.b. a_{ji} in A ha posto $(j,i), \Longrightarrow^t A$ è ottenuta da A scambiandone tra loro le righe e le colonne.

[3]n.b. in una matrice diagonale $a_{ij} = 0\,\forall\ i \neq j$ e non si richiede che $a_{ii} \neq 0\,\forall\ 1 \leq i \leq n$, in particolare 0 è matrice diagonale.

SV 4 $A + B = B + A$,
SV 5 $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$,
SV 6 $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,
SV 7 $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,
SV 8 $1_{\mathbf{k}}A = A$

– Se $A = (a_{ih}) \in M_{m,n}(\mathbf{k})$ e $B = (b_{hj}) \in M_{n,p}(\mathbf{k})$, il *prodotto righe per colonne* AB *di* A *e* B è la matrice

$$C = (c_{ij}) \in M_{m,p}(\mathbf{k}) \qquad \text{con} \quad c_{ij} := \sum_{h=1}^{n} a_{ih}b_{hj}.$$

Se $A =\in M_{m,n}(\mathbf{k})$ e $B =\in M_{n,m}(\mathbf{k})$, sono definite sia $AB \in M_m(\mathbf{k})$ che $BA \in M_n(\mathbf{k})$, n.b. non vale in genere $AB = BA$ neppure se $m = m$, per esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

– Proprietà della moltiplicazione righe per colonne di matrici, siano: $A, B \in M_{m,n}(\mathbf{k}), C, D \in M_{n,p}(\mathbf{k}), E \in M_{p,q}(\mathbf{k}), I_n \in M_n(\mathbf{k}), \lambda \in \mathbf{k}$

a) $(AC)E = A(CE)$ *associatività di* $\cdot$,
b) $(A + B)C = AC + BC$ *distributatività di* $+$ *rispetto a* $\cdot$,
c) $A(C + D) = AC + AD$ *distributatività di* $\cdot$ *rispetto a* $+$,
d) $A(\lambda C) = \lambda(AC) = (\lambda A)C$ *omogeneità degli scalari*,
e) $AI_n = A$, $I_nC = C$,
f) ${}^t(A + B) =^t A +^t B$,
g) ${}^t(AC) =^t C^tA$,

proviamo, per esempio, l'associatività:
ponendo $W = AC, Z = CE, X = WE, Y = AZ$, si ha:

$x_{ij} := \sum\limits_{h=1}^{p} w_{ih}e_{hj}$,

$y_{ij} := \sum\limits_{l=1}^{n} a_{il}z_{lj}$,

$w_{ij} := \sum\limits_{l=1}^{n} a_{il}c_{lh}$,

$z_{lj} := \sum\limits_{h=1}^{p} c_{lh}e_{hj}$,

da cui $x_{ij} = \sum\limits_{h=1}^{p} (\sum\limits_{l=1}^{n} a_{il}c_{lh})e_{hj} = \sum\limits_{l=1}^{n} a_{il} \sum\limits_{h=1}^{p} c_{lh}e_{hj} = y_{ij}$,

– una matrice $A \in M_n(\mathbf{k})$ e A è detta *matrice invertibile* se $\exists\, B \in M_n(\mathbf{k})$ tale che $AB = I = BA$, tale B è detta *inversa di* A ed è denotata A^{-1}. In tal caso A è l'inversa di A^{-1}.

L'insieme delle $A \in M_n(\mathbf{k})$ invertibili è un gruppo (non commutativo!), rispetto alla moltiplicazione righe per colonne di matrici[4], detto *gruppo lineare di ordine* n e denotato $Gl_n(\mathbf{k})$.

Ovviamente non tutte le matrici quadrate sono invertibili, per esempio

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non sono invertibili.

Osservazione 4.1.2 Possiamo scrivere:

$$M_3(\mathbb{R}) = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \quad a, b, c, d, \in \mathbb{R}\}.$$

L'insieme

$$\{v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

è tale che per ogni $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ vale:

$$A = av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4.$$

Esempio 4.1.3 Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, provare che $\nexists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tali che $A = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$.

4.2 Spazi vettoriali

Sin qui abbiamo osservato che, dato un corpo commutativo $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}^n$ e $M_n(\mathbf{k})$ sono $\mathbf{k}$-spazi vettoriali.
Diamo ora la definizione 'astratta' di $\mathbf{k}$-spazio vettoriale.

Definizione 4.2.1 Siano $\emptyset \neq V$ un insieme e $\mathbf{k}$ un corpo commutativo, V è detto $\mathbf{k}$-*spazio vettoriale* e i suoi elementi sono detti *vettori,* mentre gli elementi di $\mathbf{k}$ sono detti *scalari,* se su V sono definite due operazioni:

1. $V \times V \longrightarrow V$ definita da $(u, v) \mapsto w := u + v$ e detta *addizione,*

[4]Infatti, la moltiplicazione righe per colonne di matrici è associativa per a), se A, B sono invertibili anche AB è tale e come inversa ha $B^{-1}A^{-1}$ dal momento che $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$, la matrice identica I_n è l'elemento neutro per e), e abbiamo già osservato che l'inversa dell'inversa A^{-1} di una matrice invertibile A è A stessa.

2. $V \times \mathbf{k} \longrightarrow V$ definita da $(u, \lambda) \mapsto w := \lambda u$ e detta *moltiplicazione per scalari* o *moltiplicazione esterna,*

soddisfacenti per ogni $u, v, w \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbf{k}$:

SV 1 $(u + v) + w = u + (v + w)$, *associatività dell'addizione,*

SV 2 $u+0_V = u = 0_V+u$, *esistenza dell'elemento neutro per l'addizione,*

SV 3 $u + (-u) = 0V = -u + i$, *esistenza dell'opposto per l'addizione,*

SV 4 $u + v = v + u$, *commutatività per l'addizione,*

SV 5 $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$, *associatività della moltiplicazione esterna,*

SV 6 $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$, *distributatività della m. e. rispetto all'a. di scalari,*

SV 7 $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$, *distributatività della m. e. rispetto all'a. di vettori,*

SV 8 $1_{\mathbf{k}}u = u$ *unitarietà.*

Definizione 4.2.2 Sia V un $\mathbf{k}$-spazio vettoriale*, dati* $v_1, \ldots, v_r \in V$*, e* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbf{k}$:

1. una scrittura $v := \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i$ è detta *combinazione lineare* di $v_1, \ldots, v_r$ a coefficienti in $\mathbf{k}$,

2. se $\forall\, v \in V$ e esprimibile come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_r \in V \Longrightarrow \{v_1, \ldots, v_r\}$ è detto *sistema di generatori di V.*

Esempio 4.2.3 1. $\{\underline{e_1}, \ldots, \underline{e_n}\}$ è un sistema di generatori di $\mathbf{k}^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$;

2. $\{v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ è un sistema di generatori di $M_2(\mathbb{R})$;

3. scrivere un sistema di generatori di $M_{m,n}(\mathbf{k}), \forall\, m, n$.

Definizione 4.2.4 Un insieme $F = \{v_1, \ldots, v_s\}$ di vettori di uno spazio vettoriale V è detto *linearmente dipendente* se $\exists\ \lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbf{k}$, non tutti nulli, tali che

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s = 0_V,$$

altrimenti F è detto *linearmente indipendente*[5].

Esempio 4.2.5 1. Provare che se $F \subset V$ è l. d. e $G \supset F, \Longrightarrow G$ è l.d.;

[5]Per brevità scriveremo rispettivamente l.d. e l.i..

2. In $\mathbb{R}^4$ l'insieme $\{\underline{v_1} = (1,2,1,0), \underline{v_2} = (1,0,0,1), \underline{v_3} = (0,1,1,1)\}$ è l.i.

   infatti si ha $a\underline{v_1}+b\underline{v_2}+c\underline{v_3} = 0_{\mathbb{R}^4} \iff \begin{cases} a+b=0 \\ 2a+c=0 \\ a+c=0 \\ b+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-b \\ 2a=-c \\ a=-c \\ b=-c \end{cases}$

   da cui $2a = a \Longrightarrow a = 0, b = 0, c = 0$;

3. In $\mathbb{R}^4$ l'insieme $\{\underline{w_1} = (1,2,1,0), \underline{w_2} = (1,0,0,1), \underline{w_3} = (2,2,1,1)\}$ è l.d.

   si ha infatti $\underline{w_1} + \underline{w_2} - \underline{w_3} = 0_{\mathbb{R}^4}$[6].

Lemma 4.2.6 *[Lemma di Steinitz (1871-1928)] Dati V uno spazio vettoriale, $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ un sistema di generatori e $G = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset V$ un sottinsieme. Se $m > n \Longrightarrow G$ è linearmante dipendente.*

Dim. Se G contiene $G' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ linearmante dipendente, è tale, possiamo quindi supporre G' linearmante indipendente. Proviamo che G' è sistema di generatori. Essendo F tale per ipotesi si ha in particolare $v_1 = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n$ per qualche $\lambda_i \in \mathbf{k}, 1 \leq i \leq n$, essendo G' linearmante indipendente necessariamente $v_1 \neq 0_V \Longrightarrow \exists\, i \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $\lambda_i \neq 0_{\mathbf{k}}$ e possiamo chiaramente supporre $\lambda_1 \neq 0_{\mathbf{k}}$ (a meno di riordinare gli elementi di F). Si ha:

$$\lambda_1 f_1 = v_1 - \sum_{i=2}^{n} \lambda_i f_i \Longrightarrow f_1 = \frac{v_1}{\lambda_1} - \sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} f_i$$

cioè $\{v_1, f_2, \ldots, f_n\}$ è un sistema di generatori di V. Supponiamo, induttivamente, di aver provato che $\{v_1, \ldots v_s, f_{s+1}, \ldots, f_n\}$ è un sistema di generatori di V e proviamo che $\{v_1, \ldots v_s, , v_{s+1}, f_{s+2}, \ldots, f_n\}$ è un sistema di generatori di V. Per l'ipotesi induttiva $v_{s+1} = \sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i v_i + \sum\limits_{j=s+1}^{n} \beta_j f_j$. Essendo G' linearmente indipendente, almeno un $\beta_j \neq 0$, supponiamo che sia $\beta_{s+1} \neq 0$, come prima

$$f_{s+1} = \frac{v_{s+1}}{\beta_{s+1}} - \sum_{i=1}^{s} \frac{\alpha_i}{\beta_{s+1}} v_i - \sum_{i=s+2}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_{s+1}} f_j.$$

Notazione 4.2.7 Se $v \in V$ è combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_r \in V$, scriveremo

$$v \in < v_1, \ldots, v_r >\,^{7}.$$

[6] D'ora in avanti eviteremo di sottolineare i vettori di $\mathbf{k}^n$.

[7] Si usano anche le scritture $v \in \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_r), v \in Span_{\mathbf{k}}\{v_1, \ldots, v_r\}$.

4.3 Sistemi di equazioni lineari

Definizione 4.3.1 *1.* Un' *equazione lineare nelle incognite* $X_1, \dots, X_m$ *a coefficienti in un corpo commutativo* $\mathbf{k}$ è un'espressione del tipo:

$$a_1 X_1 + \cdots + a_m X_m = b \tag{4.1}$$

con $a_1, \dots, a_m \in \mathbf{k}$ *coefficienti* e $b \in \mathbf{k}$ *termine noto.*

Se $b = 0$, (4.1) è detta *equazione lineare omogenea.*

Una *soluzione* di (4.1) è un elemento $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbf{k}^m$, tale che

$$a_1 \alpha_1 + \cdots + a_m \alpha_m = b.$$

2. Un *sistema lineare di* p *equazioni (a coefficienti in un corpo commutativo* $\mathbf{k}$*) nelle incognite* $X_1, \dots, X_m$ è un insieme di p equazioni lineari:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + \cdots + a_{1m}X_m = b_1 \\ a_{21}X_1 + \cdots + a_{2m}X_m = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{p1}X_1 + \cdots + a_{pm}X_m = b_p \end{cases}. \tag{4.2}$$

Ponendo*:*

$A := (a_{ij}) \in M_{p,m}(\mathbf{k})$ *matrice dei coefficienti di (4.2),*

$\mathbf{X} :=^t (X_1, \dots, X_m) \in M_{m,1}(\mathbf{k})$ *vettore*[8] *delle indeterminate,*

$\mathbf{b} :=^t (b_1, \dots, b_p) \in M_{p,1}(\mathbf{k})$ *vettore*[9] *dei termini noti,*

abbiamo la scrittura matriciale di (4.2):

$$A\mathbf{X} = \mathbf{b}. \tag{4.3}$$

Una *soluzione di (4.3)* è un elemento $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbf{k}^m$, soluzione di tutte le equazioni di (4.3).

Un sistema lineare è detto *omogeneo* se tutte le sue equazioni sono omogenee.

Un sistema lineare è detto *compatibile* se possiede almeno una soluzione.

Un sistema lineare è detto *a scalini* se la sua matrice dei coefficienti è tale.

[8] Colonna.
[9] Colonna.

3. Il sistema omogeneo, con la stessa matrice dei coefficienti di (4.2),

$$A\mathbf{X} = \mathbf{0} \tag{4.4}$$

è detto *sistema omogeneo associato.*

Esercizio 4.3.2 1. Provare che ogni sistema omogeneo è compatibile.

2. Provare che ogni sistema lineare che ammette la soluzione banale $0_{\mathbf{k}^n}$ è omogeneo.

3. Provare che se (4.2) è compatibile[10], le sue soluzioni sono tutte e sole quelle ottenute sommando a una sua soluzione particolare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato,

Definizione 4.3.3 Due sistemi lineari sono detti *equivalenti* se hanno le stesse soluzioni[11].

Esercizio 4.3.4 Si provi che se nella matrice A dei coefficienti di (4.2) c'è una riga nulla, e.g. $R_i^A =^t 0_{\mathbf{k}^m} =: \mathbf{0}$ per qualche $1 \leq i \leq p$[12], se $0 = b_i$ è possibile cancellare da (4.2) l'i-esima equazione, ottenendo un sistema (4.2') equivalente a quello dato, altrimenti il sistema (4.2) dato è incompatibile.

Osservazione 4.3.5 *1.* Siano V, V_0, rispettivamente gli insiemi delle soluzioni di (4.3) e di (4.4), $\forall\, \alpha, \beta \in V, \alpha - \beta \in V_0$. Infatti, $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\alpha_j = b_i, \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\beta_j = b_i, \forall\, i \in \{1, \dots, p\} \implies \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(\alpha_j - \beta_j) = 0$. Se invece $\alpha \in V$ e $\gamma \in V_0 \implies \alpha + \gamma \in V$. Infatti $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(\alpha_j + \gamma_j) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\alpha_j + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\gamma_j = b_i + 0_{\mathbf{k}} = b_i$; infine, poiché data $\alpha \in V$, $\forall \beta \in V$ si ha $\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$ si conclude essendo $\alpha \in V, \beta - \alpha \in V_0$.

2. Accanto alla matrice A dei coefficienti di (4.2), si considera la *matrice completa dei coefficienti di* (4.2)

$$B := (A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pm} & b_p \end{array}\right).$$

[10] n.b. I sistemi lineari possono avere:
nessuna soluzione,
un'unica soluzione,
infinite soluzioni.

[11] n.b. ciò implica che i due sistemi hanno lo stesso numero di incognite, ma non necessariamente di equazioni!

[12] Ossia in (4.2) c'è un'equazione della forma $0 = b_i$, questa è identicamente soddisfatta se $b_i = 0$ altrimenti è incompatibile.

Dire che (4.2) è compatibile equivale a dire che $\exists\,(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\in\mathbf{k}^m$ tale che $\alpha_1 C_A^1+\cdots+\alpha_m C_A^m=\mathbf{b}$, ossia $\mathbf{b}\in< C_A^1,\dots,C_A^m >$.

In particolare, un sistema omogeneo ha soluzione non banale se e solo se le colonne della sua matrice dei coefficienti sono l.d..

3. Dati due sistemi

$$A'\mathbf{X}=\mathbf{b}', A"\mathbf{X}=\mathbf{b}" \text{ con } A'\in M_{t,n}(\mathbf{k}), A"\in M_{s,n}(\mathbf{k}),$$

l'insieme delle soluzioni comuni ai due sistemi coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema $A\mathbf{X}=\mathbf{b}$ con $A=\left(\frac{A'}{A"}\right)\in M_{t+s,n}(\mathbf{k})$ e $\mathbf{b}=\left(\frac{\mathbf{b}'}{\mathbf{b}"}\right)\in M_{t+s,1}(\mathbf{k})$.

Proposizione 4.3.6 *Sia $p=m$, se la matrice dei coefficienti A è triangolare superiore con $a_{11}a_{22}\cdots a_{mm}\neq 0$ il sistema (4.2) ha un'unica soluzione.*

Dim. Dall'ultima equazione: $a_{mm}X_m=b_m$ si ricava $X_m=\frac{b_m}{a_{mm}}$, se si sostituisce questo valore nella penultima equazione $a_{m-1m-1}X_{m-1}+a_{m-1m}X_m=b_{m-1}$, si ottiene $X_{m-1}=\frac{1}{a_{m-1m-1}}(b_{m-1}-a_{m-1m}\frac{b_m}{a_{mm}})$, se questo valore e il precedente sono sostituiti nella terz'ultima equazione, si ricava un unico valore per X_{m-2} e cosí via..

Osservazione 4.3.7 Se A è una matrice a scalini, con p righe nonnulle, ci si riconduce al caso esaminato in Prop. 4.3.6 producendo una matrice A triangolare superiore, di ordine p, con le colonne contenenti i pivot e portando al secondo membro di ogni equazione le rimanenti incognite con i rispettivi coefficienti. A differenza di Prop. 4.3.6 la soluzione non è piú unica, dipendendo dalle $m-p$[13] 'variabili libere'.

Esempio 4.3.8 Dato il sistema a scalini

$$\begin{cases} X_1+X_2+X_3+X_4-X_5=2 \\ X_2-X_3+X_5=1 \\ X_4-X_5=0 \end{cases},$$

si costruisce il sistema ausiliario

$$\begin{cases} X_1+X_2+X_4=2-X_3+X_5 \\ X_2=1+X_3-X_5 \\ X_4=X_5 \end{cases},$$

le cui ∞^2 soluzioni, dipendenti da 2 parametri $s,t\in\mathbb{R}$ sono

$$(1,1,0,0)+(-2s+t,s-t,s,t,t).$$

[13]Si dice che un sistema lineare (di equazioni in m indeterminate) a scalini con p equazioni nonnulle ha ∞^{m-p} soluzioni.

4.4 Eliminazione Gaussiana

Il *metodo di eliminazione Gaussiana*[14] consiste precisamente nel risolvere il sistema lineare dato risolvendone uno equivalente piú facile.

4.4.1 Operazioni e matrici elementari

Sull'insieme delle equazioni di un sistema lineare (o, equivalentemente, sulle righe della matrice dei coefficienti) è possibile operare come segue:

$E_{i,j}$: scambiare tra loro la i-sima e la j-sima equazione (riga),

$E_i(c)$: moltiplicare per lo scalare nonnullo c la i-sima equazione (riga),

$E_{i,j}(c)$: sostituire alla i-sima equazione (riga) la sua somma con la j-sima moltiplicata per lo scalare nonnullo c.

Proposizione 4.4.1 *Ciascuna operazione elementare sulle equazioni di un sistema lo muta in uno equivalente.*

Dim. Verifichiamo (come esempio) che $\forall\ \alpha :=^t (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbf{k}^m$ soluzione di (4.2) $\Longrightarrow \alpha$ è soluzione di (4.2') ottenuto da (4.2) sostituendo alla i-esima equazione la somma tra la i-esima equazione stessa e un multiplo nonnullo della j-esima equazione ($i \neq j$), infatti da

$$a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{im}\alpha_m = b_i,\ a_{j1}\alpha_1 + \cdots + a_{jm}\alpha_m = b_j$$

si ottiene

$$(a_{i1} + ca_{j1})\alpha_1 + \cdots + (a_{im} + ca_{jm})\alpha_m = b_i + cb_j;$$

viceversa, se $\beta := (\beta_1, \ldots, \beta_m) \in \mathbf{k}^m$ è soluzione di (4.2') allora β è soluzione di (4.2), infatti: $(a_{i1} + ca_{j1})\beta_1 + \cdots + (a_{im} + ca_{jm})\beta_m = b_i + cb_j \Longrightarrow a_{i1}\beta_1 + \cdots a_{im}\beta_m + c(a_{j1}\beta_1 \cdots + a_{jm}\beta_m) = b_i + cb_j$, ossia β è soluzione di (4.2) come asserito.

Proposizione 4.4.2 *Se $A \in Gl_n(\mathbf{k})$, il sistema omogeneo associato (4.4) ha solo la soluzione nulla.*

Dim. Se $x \in \mathbf{k}^n$ è una soluzione di (4.4), ossia $Ax = 0_{\mathbf{k}^n}$, si ha:
$$x = I_n x = A^{-1}Ax = A^{-1}0_{\mathbf{k}^n} = 0_{\mathbf{k}^n}.$$

Definizione 4.4.3 Dicesi *matrice elementare di ordine n* ogni matrice di $M_n(\mathbf{k})$ ottenibile da I_n mediante un'operazione elementare sulle righe.

$E_{i,j}$: scambio di $R_i^{I_n}$ con $R_j^{I_n}$, $\qquad E_{ij}^{-1} = E_{ji}$,

[14]Che richiameremo nel prossimo paragrafo.

$$E_i(c)\ :\ \text{moltiplicazione di } R_i^{I_n} \text{ per } c\in\mathbf{k}^*, \qquad E_i(c)^{-1}=E_i(c^{-1}),$$

$$E_{ij}(c) : \text{addizione di } R_i^{I_n} \text{ con } R_j^{I_n} \text{ per } c\in\mathbf{k}^*, \quad E_{ij}(c)^{-1}=E_{ij}(-c).$$

n.b. Ogni operazione elementare sulle righe di una $A \in M_{m,n}(\mathbf{k})$ si ottiene moltiplicando a sinistra A per la corrispondente matrice elementare.

Proposizione 4.4.4 $A \in Gl_n(\mathbf{k})$ *se e solo se è esprimibile come prodotto di matrici elementari.*

Dim. Chiaramente il prodotto di matrici elementari è invertibile. Se $A \in Gl_n(\mathbf{k})$, per Prop. 4.4.2, il sistema (4.4) ha solo la soluzione nulla, ossia, mediante operazioni elementari sulle righe può essere trasformato nel sistema

$$\begin{array}{llllll} X_1 & & & & & =0\\ & X_2 & & & & =0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ & & & X_{n-1} & & =0\\ & & & & X_n & =0 \end{array}$$

ossia, per qualche $s \in \mathbb{N}^*$, $E^{\alpha_1}\cdots E^{\alpha_s}AX = I_nX$ cioè $E^{\alpha_1}\cdots E^{\alpha_s}AX = I_nX$ i.e. $E^{\alpha_1}\cdots E^{\alpha_s} = A^{-1}$ e quindi

$$A=(A^{-1})^{-1}=(E^{\alpha_1}\cdots E^{\alpha_s})^{-1}=(E^{\alpha_s})^{-1}\cdots(E^{\alpha_1})^{-1}.$$

Osservazione 4.4.5 Nel corso della dimostrazione di Prop. 4.4.4 si è anche dimostrato che:

l'inversa di un'$A \in Gl_n(\mathbf{k})$ può essere calcolata mediante operazioni elementari sulle righe

e diamo subito un metodo pratico per determinare A^{-1}.

Notazione 4.4.6 *Date* $A, B, \in M_n(\mathbf{k})$, *scriviamo* $(A \mid B)$ *per indicare la matrice di tipo* $n\times 2n$ *con* $R_i^{(A|B)} = (a_{i1},\dots,a_{in},b_{i1},\dots,b_{in})$.

Osservazione 4.4.7

1. Date $A, B, M \in M_n(\mathbf{k})$, risulta chiaramente $M(A \mid B) = (MA \mid MB)$.
2. Sia $A \in Gl_n(\mathbf{k}) \Longrightarrow A^{-1}(A \mid I_n) = (A^{-1}A \mid A^{-1}I_n) = (I_n \mid A^{-1})$, ossia, mediante operazioni elementari sulle righe, da $(A \mid I_n)$ si ottiene $(I_n \mid A^{-1})$ e quindi, mediante operazioni elementari sulle righe, da A si ottiene A^{-1}.

Esercizio 4.4.8 Provare che $A = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ è invertibile calcolandone l'inversa.

Si ha $(A \mid I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1\end{array}\right) \longrightarrow$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

ossia l'inversa di A è $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4.4.2 Algoritmo di eliminazione Gaussiana

L'algoritmo di eliminazione Gaussiana, che permette di stabilire quando un sistema è compatibile e, in caso affermativo, di trovarne tutte le soluzioni, consiste nel sostituire (mediante un numero finito di successive operazioni elementari sulle equazioni del sistema) al sistema assegnato un sistema a scalini[15] a esso equivalente .

Descrizione informale dell'algoritmo di eliminazione Gaussiana

Dato $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$, sia $A'\mathbf{X} = \mathbf{b}'$ ottenuto da $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ mediante le operazioni di riduzione a scalini. Possiamo supporre che
le eventuali righe nulle di A' compaiano al fondo di A',
il pivot di ogni riga nonnulla di A' sia 1 e
ogni elemento al di sopra e al di sotto di un pivot sia 0 (in questo caso si parla di *matrice a scalini ridotta*),
si pone inoltre $B := (A \mid \mathbf{b})$ (matrice completa dei coefficienti di (4.3)).

Esempio 4.4.9 Dato $\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1 \\ 2X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 = 2 \\ X_1 + X_2 + 2X_3 + 2X_4 = 2 \\ 3X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 3X_4 = 1 \end{cases}$ si ha

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = B'$$

Poiché il sistema lineare associato a B' è contraddittorio, lo è anche quello associato a B.

Osservazione 4.4.10 Complessivamente: un sistema lineare associato a una matrice a scalini (ridotta) B', è compatibile se B' non ha righe della

[15] Producendo eventualmente righe nulle, che evidenziano la compatibilità o meno. Se il sistema è compatibile, per Es. 4.3.2.4. possiamo quindi supporre che nella matrice dei coefficienti di (4.3) nessuna riga sia nulla.

forma

$$(0, \dots, 0, *)$$

(ossia, A' e B' hanno lo stesso numero r di righe nonnulle) nel qual caso le soluzioni di (4.3)) dipendono da $n - r$ parametri.

4.5 Caratteristica di una matrice

Definizione 4.5.1 La *caratteristica* di una matrice $A \in M_{n,m}(\mathbf{k})$ è il massimo numero $\rho(A)$ di righe o colonne[16] l.i. di A.

Esercizio 4.5.2 1. Provare che $\rho(A) \leq min(m, n)$.

2. Provare che $\rho(A) = \rho({}^tA)$.

Proposizione 4.5.3 *Data $A \in M_{n,m}(\mathbf{k})$, se $B \in M_{n,m}(\mathbf{k})$ è ottenuta mediante una successione di operazioni elementari sulle righe di A si ha*

$$\rho(A) = \rho(B).$$

Dim. Basta provarlo per una sola operazione elementare. Chiaramente sia $E_{i,j}$ che $E_i(c)$ non alterano ρ; per quanto riguarda di $E_{ij}(c)$, sia A' la matrice ottenuta da A mediante $E_{ij}(c)$, si ha $R_j^{A'} = R_j^A, \forall\, j \neq i$ e $R_i^{A'} = R_i^A + cR_j^A$ pertanto:

$$0_{\mathbf{k}^m} = \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell R_\ell^{A'} = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^{n} a_\ell R_\ell^A + a_i(R_i^A + cR_j^A) = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^{n} a_\ell R_\ell^A + (a_i c + a_j)R_j^A.$$

Proposizione 4.5.4 *1. Date $A \in M_{m,n}(\mathbf{k})$, $B \in M_{n,p}(\mathbf{k})$, si ha:*

$$\rho(AB) \leq min(\rho(A), \rho(B)).$$

2. Date $A \in Gl_m(\mathbf{k}), B \in M_{m,n}(\mathbf{k}), C \in Gl_n(\mathbf{k})$, si ha:

$$\rho(AB) = \rho(B) = \rho(BC).$$

Dim. Per quanto riguarda 1., siano $A = (a_{ij}), B = (b_{jh})$ e siano R_i^B, R_i^{AB} rispettivamente le righe i-esime di B e AB si ha $R_i^{AB} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} R_j^B$, ossia ogni riga di AB è combinazione lineare delle righe di $B \Longrightarrow \rho(AB) \leq \rho(B)$, inoltre, $\rho(AB) = \rho({}^t(AB)) = \rho({}^tB\,{}^tA) \leq \rho({}^tA) = \rho(A)$.
Per quanto riguarda 2., si ha $\rho(AB) \leq \rho(B) = \rho(A^{-1}AB) \leq \rho(AB)$ ossia $\rho(AB) = \rho(B)$ e analogamente $\rho(BC) \leq \rho(B) = \rho(BCC^{-1}) \leq \rho(BC)$.

Teorema 4.5.5 *Data $A \in M_n(\mathbf{k})$, si ha $A \in Gl_n(\mathbf{k}) \iff \rho(A) = n$.*

[16] Si dimostra che i due numeri coincidono.

Dim. Se $A \in Gl_n(\mathbf{k}) \Longrightarrow \rho(I_n) = \rho(AA^{-1}) = \rho(A)$ e chiaramente $\rho(I_n) = n$. Viceversa, se $\rho(A) = n \Longrightarrow R_i^A$, al variare di $1 \leq i \leq n$, sono un sistema di generatori di $\mathbf{k}^n$, per Prop. 4.2.6. In particolare,
posto $E_{(i)} := R_i^{I_n}, \exists\, b_{i1}, \ldots, b_{in} \in \mathbf{k}$ tali che $E_{(i)} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} R_j^A$, posto quindi $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbf{k})$, la matrice di tutti i coefficienti che esprimono tutte le righe di I_n come combinazione lineare di quelle di A, si ottiene

$$I_n = BA, \text{ i.e. } A \in Gl_n(\mathbf{k}).$$

Definizione 4.5.6 Una *sottomatrice* $p \times q$ di una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbf{k})$ è una matrice costituita dagli elementi di A comuni a p righe e q colonne fissate di A. Se $1 \leq i_1 < i_2 \ldots < i_p \leq m$ e $1 \leq j_1 < j_2 \ldots < j_q \leq n \Longrightarrow$ la sottomatrice corrispondente è denotata

$$A(i_1, \ldots, i_p \mid j_1, \ldots, j_q)$$

.

Osservazione 4.5.7 Se B è sottomatrice di una data matrice A, si ha $\rho(B) \leq \rho(A)$.

Teorema 4.5.8 *Data $A \in M_{m,n}(\mathbf{k})$, $\rho(A)$ è il massimo degli ordini delle sottomatrici quadrate invertibili di A.*

Dim. Sia r il massimo degli ordini delle sottomatrici quadrate invertibili di $A \Longrightarrow r \leq \rho(A)$. Se $\rho = \rho(A)$ e $R_{i_1}^A, \ldots, R_{i_\rho}^A$ sono l.i., posto $B := A(i_1, \ldots, i_\rho \mid 1, \ldots, n)$ si ha $\rho = \rho(B) \Longrightarrow$ in particolare $\exists\, C_B^{j_1}, \ldots, C_B^{j_\rho}$ colonne di B che sono l.i.. Posto $C := B(1, \ldots, \rho \mid j_1, \ldots, j_\rho)$ si ha $C \in Gl_n(\mathbf{k})$. Ma, $C := A(i_1, \ldots, i_\rho \mid j_1, \ldots, j_\rho)$ è una sottomatrice quadrata invertibile di A, pertanto $r \geq \rho$.

4.6 Il teorema di Rouché-Capelli

Teorema 4.6.1 *Il sistema (4.3) è compatibile se e solo se*

$$\rho(A) = \rho((A \mid \mathbf{b})),$$

in tal caso (4.3) ha $\infty^{m-\rho}$ soluzioni, dove $\rho = \rho(A)$.

Dim. Un vettore $\alpha :=^t (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbf{k}^m$ è soluzione di (4.3) se e solo se $A\alpha = \mathbf{b}$, i.e. $\alpha_1 C_A^1 + \cdots + \alpha_n C_A^m = \mathbf{b}$ i.e. $\mathbf{b} \in < C_A^1, \ldots, C_A^m >$, questo accade se e solo se $\rho(A) = \rho((A \mid \mathbf{b}))$.

Se (4.3) è compatibile e $\rho = \rho(A)$, possiamo supporre che le prime ρ equazioni siano l.i. e sostituire (4.2) con il sistema equivalente:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + \cdots + a_{1m}X_m = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{\rho 1}X_1 + \cdots + a_{\rho m}X_m = b_\rho \end{cases} \tag{4.5}$$

Applicando l'eliminazione Gaussiana a (4.5), nessuna equazione si riduce a $0 = 0$ (altrimenti sarebbe l.d. dalle precedenti), pertanto (4.5) si riduce a un sistema a scalini di ρ equazioni che possiede $\infty^{m-\rho}$ soluzioni, quindi anche (4.3) ha $\infty^{m-\rho}$ soluzioni.

4.7 Determinante di matrici quadrate

Notazione 4.7.1 D'ora in avanti[17], data una matrice A, anziché R_i^A, C_A^j (per semplificare le notazioni) scriveremo rispettivamente A_i, A^j.

Data $A \in M_n(\mathbf{k})$, vogliamo definire un'applicazione

$$d : M_n(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathbf{k} \text{ tale che } A_1, \dots, A_n \text{ l.d.} \iff d(A) = d(A_1, \dots, A_n) = 0.$$

Se $n = 1$, $A = (a_{11}) \in M_1(\mathbf{k})$, A_1 l.d. $\iff a_{11} = 0 \Longrightarrow d(A) := a_{11}$.
Se $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{k})$ sono condizioni equivalenti:

1. A_1, A_2 l.d.;
2. $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$;

infatti: se una fra A_1, A_2 è nulla chiaramente valgono entrambe le condizioni, sia dunque $A_1 \neq 0_{\mathbf{k}^2} \neq A_2$, si ha A_1, A_2 l.d. $\iff \exists\, \lambda \in \mathbf{k}^* : A_1 = \lambda A_2$, i.e. $a_{11} = \lambda a_{21}, a_{12} = \lambda a_{22}$, ossia,

$$0 = \lambda a_{21}a_{22} - \lambda a_{22}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

viceversa, se $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ si ha che

$$a_{22}A_1 - a_{12}A_2 = (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}, a_{12}a_{22} - a_{12}a_{22}) = (0, 0)$$

è una combinazione lineare nulla non banale perché $0_{\mathbf{k}^2} \neq A_2$ si pone allora $d(A) := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

L'esistenza di una funzione $d : M_n(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathbf{k}$ tale che $A_1, \dots, A_n$ l.d. $\iff$ $d(A) = 0$, è finora provato per $n = 1, 2$, $d(A)$ è detta *determinante (di ordine* $1, 2$*) di* A.

Proprietà del determinante (per $n = 2$)[18]! :

[17] L'impostazione di questo paragrafo deriva dalle dispense di Geometria (per Fisici) di M. Arezzo.
[18] Valgono in modo banale anche per $n = 1$

1. se $A_1 = \lambda B + \mu B'$, $B = (a_{11}, a_{12})$, $B' = (\alpha_{11}, \alpha_{12}) \Longrightarrow$
   $d(A) = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} + \mu\alpha_{11} & \lambda a_{12} + \mu\alpha_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$
   $= (\lambda a_{11} + \mu\alpha_{11})a_{22} - (\lambda a_{12} + \mu\alpha_{12})a_{21} =$
   $= \lambda a_{11}a_{22} + \mu\alpha_{11}a_{22} - \lambda a_{12}a_{21} - \mu\alpha_{12}a_{21} =$
   $= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda d(B, A_2) + \mu d(B', A_2);$
2. $d(A_2, A_1) = -d(A_1, A_2)$;
3. $d(I_2) = d(e_1, e_2) = 1$.

   da cui risulta che la funzione determinante di ordine 2 è:

- *multilineare* (ossia, lineare su ogni riga),
- *alternante* (ossia, scambiando fra loro due righe il determinante cambia segno);
- *unitaria* (ossia, $d(I_2) = 1$);

  multilinearità, alternanza e unitarietà caratterizzano la funzione determinante di ordine 2, verifichiamo infatti che se $\delta : M_2(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathbf{k}$ le soddisfa, allora $\delta(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

  Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow A_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2, A_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 \Longrightarrow$

  $\delta(A) = a_{11}\delta(e_1, A_2) + a_{12}\delta(e_1, A_2) = a_{11}a_{21}\delta(e_1, e_1) + a_{11}a_{22}\delta(e_1, e_2) + a_{12}a_{21}\delta(e_2, e_2) + a_{12}a_{21}\delta(e_2, e_1) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Possiamo quindi dare la seguente definizione:

Definizione 4.7.2 Una *funzione determinante di ordine 2* è un'applicazione

$$d : M_2(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathbf{k}, \quad \textit{multilineare, alternante e unitaria.}$$

Vogliamo provare ora che anche per ogni $n \geq 3$ esiste un'unica applicazione:

$$d : M_n(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathbf{k}, \quad \text{multilineare, alternante e unitaria.}$$

Sia $d : M_n(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathbf{k}$, un'applicazione multilineare, alternante e unitaria, valgono i seguenti fatti:

- se A ha una riga nulla $\Longrightarrow d(A) = 0$, (infatti se $A_i = 0_{\mathbf{k}^n}$, pensando $A_i = 0_{\mathbf{k}} \cdot A_i \Longrightarrow d(A) = d(A_1, \dots, A_n) = d(A_1, \dots, 0_{\mathbf{k}}A_i, \dots, A_n) = 0_{\mathbf{k}} \cdot d(A_1, \dots, A_n) = 0$),

- se A ha due righe uguali $\Longrightarrow d(A)=0$, sia $A_i = A_j, i \neq j$, poiché
$$\begin{aligned} d(A) &= d(A_1,\ldots,A_i,\ldots,A_j,\ldots,A_n) = \\ &= -d(A_1,\ldots,A_j,\ldots,A_i,\ldots,A_n) = -d(A) \end{aligned}$$
si ha $d(A)=0$;

- se A ha due righe l.d. $\Longrightarrow d(A)=0$, sia $A_i \in < A_1,\ldots,\widehat{A_i},\ldots,A_n > \Longrightarrow A_i = \sum\limits_{i\neq j} \lambda_j A_j \Longrightarrow d(A)$ risulta essere una combinazione lineare di determinanti di matrici o con due righe uguali o con una riga nulla, cosí $d(A)=0$ come affermato;

- se A è diagonale o triangolare (sia inferiore che superiore) si ha
$$d(A) = a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn},$$
se A è diagonale, da $A_i = a_{ii}e_i, \forall\, 1 \le i \le n$, si ha $d(A) = d(A_1,\ldots,A_n) = a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn}\cdot d(I_n) = a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn}$;
dimostriamo prima che se A è triangolare e un elemento della diagonale principale è nullo $\Longrightarrow d(A)=0$,
se $A_i = (0,\ldots,0,a_{ii+1},\ldots,a_{in})$, si ha che il sottospazio
$< A_i,\ldots,A_n > \subseteq \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{k}^n : x_1 = x_2 = \cdots = X_i = 0\} =$
$=< e_{i+1},\ldots,e_n >$, poiché $\#\{A_i,\ldots,A_n\} = n-i+1$ e $\#\{e_{i+1},\ldots,e_n\} = n-i \Longrightarrow A_i,\ldots,A_n$ sono l.d. e quindi $d(A)=0$ come asserito[19].
In generale, se A è una matrice triangolare e $A_1 = (a_{11},\ldots,a_{1n})$, scrivendo $A_1 = B_1 + C_1$, con $B_1 = (a_{11},0,\ldots,0), C_1 = (0,a_{12},\ldots,a_{1n})$ si ha
$$\begin{aligned} d(A) &= d(A_1,\ldots,A_n) = d(B_1+C_1,A_2,\ldots,A_n) = \\ &= d(B_1,A_2,\ldots,A_n) + d(C_1,A_2,\ldots,A_n) = \\ &= d(B_1,A_2,\ldots,A_n) + 0, \end{aligned}$$
se $A_2 = (0,a_{22},\ldots,a_{2n})$, scrivendo $A_2 = B_2 + C_2$ questa volta con $B_2 = (0,a_{22},0,\ldots,0)$, $C_1 = (0,0,a_{23},\ldots,a_{2n})$ si ha
$$\begin{aligned} d(A) &= d(B_1,A_2,\ldots,A_n) = d(B_1,B_2+C_2,\ldots,A_n) = \\ &= d(B_1,B_2,\ldots,A_n) + d(B_1,C_2,\ldots,A_n) = \\ &= d(B_1,B_2,A_3,\ldots,A_n) + 0, \end{aligned}$$
e cosí via, sempre con $B_i = e_i a_{ii}$, fino a
$d(A) = d(B)$ dove $B = (B_1,B_2\ldots,B_n)$ è la matrice diagonale con diagonale principale uguale a quella di A;

[19] Una matrice triangolare A ha righe l.d. se e solo se con operazioni elementari sulle righe di tipo $E_{i,j}(c)$ (che manifestamente non alterano il determinante) può essere trasformata in una matrice (triangolare) A' con $a'_{ii} = 0$ per qualche i.

- se A' è una matrice triangolare ottenuta da A mediante operazioni elementari, si ha $d(A') = 0 \iff d(A) = 0$

  Poiché le operazioni elementari di tipo $E_{i,j}(c)$ non alterano il determinante, dobbiamo tenere conto solo delle operazioni elementari di tipo $E_{i,j}$ (ciascuna delle quali altera il determinante per un fattore -1) e delle operazioni elementari di tipo $E_i(c)$ (ciascuna delle quali altera il determinante per il fattore c), pertanto, se A' è ottenuta da A attraverso r scambi di righe e s moltiplicazioni di righe per scalari nonnulli $c_1, \dots, c_s \in \mathbf{k}$, avremo $d(A') = (-1)^r c_1 \cdots c_s d(A) \Longrightarrow d(A) = (-1)^r c_1^{-1} \cdots c_s^{-1} b_{11} \cdots b_{nn}$ dove $b_{ii}, 1 \leq i \leq n$, sono gli elementi della diagonale principale di A'. Essendo $d(A) = \gamma d(A')$, con $\gamma \neq 0$, abbiamo la tesi.

Proposizione 4.7.3 *Per ogni* $n \in \mathbb{N}^*$, $\exists!$ *applicazione*

$$d : M_n(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathbf{k}, \qquad \textit{multilineare, alternante e unitaria.}$$

Dim. Proviamo prima l'unicità: siano $d, d' : M_n(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathbf{k}$, multilineari, alternanti e unitarie, calcoliamo $d(A)$ e $d'(A)$ riducendo A a forma triangolare A', avendo provato sopra che valgono $d(A') = d'(A') = b_{11} \cdots b_{nn}$ e che vale sia $d(A) = d(A')$ che $d'(A) = d'(A')$, abbiamo la tesi. Per quanto riguarda l'esistenza procediamo via induzione: abbiamo già visto che $d(A) = a_{11}$, per $n = 1$, e $d(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, per $n = 2$, soddisfano, supponiamo quindi di avere definito una funzione $\bar{d} : M_{n-1}(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathbf{k}$, multilineare, alternante e unitaria (unica!), se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{k})$, con A_{ij} indichiamo lo scalare:

$$(-1)^{i+j}\bar{d}(A(1, \dots, \hat{i}, \dots, n \mid 1, \dots, \hat{i}, \dots, n)), \text{ detto } cofattore^{20} \text{ di } a_{ij},$$

definiamo $d_i : M_n(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathbf{k}, d^j : M_n(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathbf{k}$, ponendo $\forall 1 \leq i, j \leq n :$

$$d_i(A) := a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad \text{sviluppo rispetto alla } i\text{-esima riga}$$

$$d^j(A) := a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad \text{sviluppo rispetto alla } j\text{-esima colonna,}$$

sia d_i che d^j sono multilineari, alternanti, unitarie e quindi, per l'unicità, coincidono, ossia tutte possono essere chiamate funzione determinante[21].

Osservazione 4.7.4 Discende dalla definizione stessa di funzione determinante che il calcolo di un determinante di ordine n si riduce al calcolo di n determinanti di ordine $n - 1$, ciascuno dei quali si riduce al calcolo di $n - 1$ determinanti di ordine $n - 2$, ecc. Ci si riconduce cosí al calcolo di determinanti di ordine 2 o 3; per i determinanti di ordine 3 $\exists$ regole di calcolo pratiche, e.g. la regola di Sarrus secondo la quale data

[20] O anche *complemento algebrico.*

[21] Data $A \in M_n(\mathbf{k})$, per indicare il suo determinante invece di $d(A)$ si usa anche la scrittura $|A|$.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, basta scrivere

$A' = \left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right)$, e prendere

col segno positivo i prodotti degli elementi sulle tre 'diagonali' da sinistra a destra,

col segno negativo i prodotti degli elementi sulle tre 'diagonali' da destra a sinistra, ossia

$$d(A) = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Definizione 4.7.5 Un *minore di ordine* $p \leq \min(n, m)$ di $A \in M_{m,n}(\mathbf{k})$ è il deteminante di una sottomatrice $p \times p$ di A.

Esercizio 4.7.6

1. Provare che $\forall\, A \in M_n(\mathbf{k})$ si ha $d(A) = d({}^tA)$.
2. Provare che la riduzione Gaussiana fornisce un metodo effettivo per calcolare $d(A)$ con $A \in M_n(\mathbf{k})$, $n \gg 0$.
3. Provare che $d(A) \neq 0 \iff \rho(A) = n$, per $A \in M_n(\mathbf{k})$.
4. Provare che se $A \in M_{m,n}(\mathbf{k}) \Longrightarrow \rho(A)$ è il massimo ordine dei minori nonnulli di A.
5. Data $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, calcolare A_{22} e A_{23}.

Teorema 4.7.7 (2° Teorema di Laplace[22] (1749-1827)) *Data una matrice $A = (a_{hl}) \in M_n(\mathbf{k})$, $\forall\ 1 \leq i \neq j \leq n$ si ha:*

1. $a_{i1}A_{j1} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$,

2. $a_{1i}A_{1j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0$.

Dim. Il teorema afferma che moltiplicando gli elementi di una riga (o colonna) per i complementi algebrici di un'altra riga (o colonna) si ottiene 0, in effetti, cosí facendo si calcola il determinante di una matrice con due righe (o colonne) uguali.

Definizione 4.7.8 Se $A \in M_n(\mathbf{k}), I = \{i_1, \ldots, i_p\}, J = \{j_1, \ldots, j_p\}, 1 < p < n$,

$$a_{I,J} \qquad \text{indica la sottomatrice } A(i_1, \ldots, i_p \mid j_1, \ldots, j_p),$$

il *complemento algebrico* $A_{I,J}$ *di* a_{IJ} è il determinante della sottomatrice di A ottenuta cancellandone le righe $i_1, \ldots, i_p$ e le colonne $j_1, \ldots, j_p$, preso col segno $(-1)^{i_1+\cdots+i_p+j_1+\cdots+j_p}$.

Teorema 4.7.9 ($3°$ Teorema di Laplace) *Data $A = (a_{hl}) \in M_n(\mathbf{k})$ e fissate p righe di indici $R = \{r_1, \dots, r_p\}$ (rispettivamente, fissate q colonne di indici $S = \{s_1, \dots, s_q\}$) si ha:*

$$d(A) = \sum_{J=\{j_1<\cdots<j_p\}} a_{R,J}A_{R,J}, \quad d(A) = \sum_{I=\{i_1<\cdots<i_q\}} a_{I,S}A_{I,S}.$$

Teorema 4.7.10 (Teorema di Binet (1786-1856)) *Date $A, B \in M_n(\mathbf{k})$ si ha:*

$$d(AB) = d(A)d(B).$$

Dim. Basta applicare il Teor. 4.7.9 alle matrici:

$$C = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ -I_n & B \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C' = \begin{pmatrix} A & AB \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix},$$

la seconda è infatti ottenibile dalla prima mediante operazioni elementari sulle (ultime n) colonne che non alterano il determinante.

4.8 Regole di Cramer e Kronecker

Usando i determinanti si può stabilire se una data $A \in M_n(\mathbf{k})$ è invertibile, calcolarne l'inversa e risolvere un sistema (4.3) con $A \in Gl_n(\mathbf{k})$.

Esercizio 4.8.1
1. Provare che $A \in Gl_n(\mathbf{k}) \iff d(A) \neq 0$.
2. Provare che $d(A) \neq 0 \implies A^{-1} = (\alpha_{ij})$ dove $\alpha_{ij} = \frac{1}{d(A)}A_{ji}$, e A_{ji} è il complemento algebrico di $a_{ji} \in A$.
3. Provare che $A \in Gl_n(\mathbf{k}) \implies d(A^{-1}) = d(A)^{-1}$.

Esempio 4.8.2 Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, calcolare A^{-1}.

Si ha $d(A) = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies A \in Gl_3(\mathbb{R})$, inoltre $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \implies A_{11} = 0, A_{12} = 1, A_{13} =$-1, $A_{21} =$-2, $A_{22} = 1$, $A_{23} = 0, A_{31} = 1, A_{32} = -1, A_{33} = 1 \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Teorema 4.8.3 (Teorema di Cramer (1704-1752)) *Se $A \in Gl_n(\mathbf{k})$, il sistema (4.3) ha un'unica soluzione:*

$$\beta =^t (\beta_1, \dots, \beta_n) \qquad \textit{con} \quad \beta_i = \frac{\Delta_i}{d(A)}$$

dove Δ_i è il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo $\mathbf{b}$ a C^i_A.

Dim. Si ha $A\beta = \mathbf{b} \Longrightarrow \beta = A^{-1}\mathbf{b}$ con $\beta_i = \frac{1}{d(A)} \sum_{j=1}^{n} A_{ji} b_j, 1 \le i \le n.$

Esempio 4.8.4 Studiare al variare del parametro reale λ il sistema lineare

$$\begin{cases} (\lambda-1)X + (\lambda+1)Y + \lambda Z = \lambda \\ \qquad\qquad\quad (\lambda+1)Y + \lambda Z = 0 \\ (\lambda-1)X + \qquad\qquad\quad + \lambda Z = \lambda \end{cases} \tag{4.6}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda-1 & \lambda+1 & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda+1 & \lambda & \lambda \\ \lambda-1 & 0 & \lambda & \lambda \end{array} \right)$$

$$d(A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda+1 & \lambda \\ 0 & \lambda+1 & \lambda \\ \lambda-1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2-1) + \lambda(\lambda^2-1) - \lambda(\lambda^2-1)$$

e quindi $d(A) = \lambda(\lambda^2-1)$. Pertanto:

$\lambda = 0 \Longrightarrow (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \rho(A) = \rho(A|B) = 2 \Longrightarrow$ (4.6) ha ∞^1 soluzioni,

$\lambda = 1 \Longrightarrow (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow \rho(A) = 2, \rho(A|B) = 3 \Longrightarrow$ (4.6) è incompatibile,

$\lambda = -1 \Longrightarrow (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right) \Longrightarrow \rho(A) = \rho(A|B) = 2 \Longrightarrow$ (4.6) ha ∞^1 soluzioni,

$\forall \lambda \neq 0, 1, -1,$ (4.6) ha un'unica soluzione.

Il calcolo della caratteristica di una matrice implica, per Es. 4.7.6.4. il computo di un grande numero di minori di ordini via via crescenti, diamo un metodo per semplificarlo.

Definizione 4.8.5 Date una matrice A e una sottomatrice B di ordine ρ, un minore di ordine $\rho+1$ di A è *ottenuto orlando il minore* $|B|$ se è il determinante di una sottomatrice di A, di ordine $\rho+1$, ottenuta aggiungendo una riga e una colonna a B.

Teorema 4.8.6 (Teorema di Kronecker) *Una matrice A, di tipo $m \times n$, ha caratteristica ρ se:*

- *$\exists$ un minore nonnullo di A avente ordine ρ,*
- *tutti i minori di A, di ordine $\rho+1$, ottenuti orlando il minore di ordine ρ nonnullo di cui sopra, sono nulli.*

Dim. Sia $A \supset B = A(i_1, \ldots, i_\rho \mid j_1, \ldots, j_\rho) \in Gl_\rho(\mathbf{k}) \Longrightarrow$ in particolare sono l.i. le colonne $C_A^{j_1}, \ldots, C_A^{j_\rho}$. Se ogni sottomatrice quadrata di ordine $\rho+1$ di A, ottenuta aggiungendo una riga e una colonna a B ha determinante nullo[23], $\Longrightarrow C_A^\star \in < C_A^{j_1}, \ldots, C_A^{j_\rho} >$, $\forall\, C_A^\star$ colonna di $A \Longrightarrow \rho(A) = \rho$.

Esempio 4.8.7 Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, calcolare $\rho(A)$.

Si ha $A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \rho(A) \geq 2$, giacché $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ e $\rho(A) \leq 3$, giacché $d(A) = 0$.
I minori di ordine 3 di A sono $\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3} = 16$, il teorema di Kronecker assicura che basta calcolarne $\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1} = 4$, precisamente, essendo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

si ha che $\rho(A) = 2$.

[23]Ossia sono nulli tutti i minori di A orlati di $|B|$.

Chapter 5

VETTORI

5.1 Vettori applicati e vettori liberi

Definizione 5.1.1 Un *vettore applicato* o *segmento orientato dello spazio ordinario* è il dato di una coppia ordinata di punti dello spazio, il primo detto *punto iniziale* o *punto di applicazione,* il secondo detto *punto finale* o *secondo estremo.* Un vettore applicato di estremi A e B è denotato $B - A$.

Un vettore applicato $B - A$ individua (ed è individuato da):

- il punto di applicazione A,
- la *direzione* (della retta congiungente A eB, detta *retta di applicazione del vettore applicato*),
- il *verso* (da A a B lungo la retta di applicazione),
- il *modulo* (il numero reale, positivo o nullo, che misura la lunghezza del segmento di estremi A e B).

Definizione 5.1.2 Due vettori applicati $B - A$ e $D - C$ sono *equipollenti, in simboli* $B - A \equiv D - C$, se hanno gli stessi
– direzione,
– verso,
– modulo[1].

Nell'insieme dei vettori applicati dello spazio l'equipollenza è una *relazione di equivalenza*[2].

Definizione 5.1.3 *1.* Un *vettore libero,* o semplicemente, *vettore dello spazio* è una classe di equipollenza di vettori applicati.

[1] O, equivalentemente, il quadrilatero di vertici A, B, C, D è un parallelogramma (inclusi i casi degeneri).
[2] Ossia è una relazione *riflessiva, simmetrica* e *transitiva.*

2. Se $B-A$ è un vettore applicato e u è il corrispondente vettore (libero) si scrive $u := B - A$ o anche $B - A \in u$ e si legge *$B - A$ è un rappresentante di u* o anche *u è la classe di equipollenza di $B - A$* e, meno bene, ma piú brevemente, $u = B - A$. Il *modulo di u*, indicato $|u|$, è il modulo di un rappresentante qualsiasi di u.

3. Il vettore libero individuato da un vettore applicato con punto iniziale e secondo estremo coincidenti[3] è detto *vettore nullo* e denotato 0[4].

Proposizione 5.1.4 *Dati un vettore applicato $B-A$ e un punto $O \in \Sigma \Longrightarrow$ $\exists!$ vettore applicato $P - O \equiv B - A$.*

Dim. Possiamo chiaramente supporre $A \neq B$ e O non appartenente alla retta AB, conduciamo da B la retta $\|$ ad AO e da O la retta $\|$ ad AB. Detto P il punto comune a queste due rette, $P - O \equiv B - A$.

Corollario 5.1.5 *Fissato $O \in \Sigma$, la corrispondenza che associa a ogni vettore (libero) u l'unico vettore, della classe di equipollenza u, applicato in O è biunivoca.*

5.2 La struttura di spazio vettoriale

Sull'insieme V dei vettori (liberi) di Σ sono definite 'in modo geometrico' le seguenti operazioni:

- *addizione:* siano $u, v \in V$ con $u = B - A$ e $v = D - A$ e $C \in \Sigma$ il punto del piano individuato da A, B, D tale che $ABCD$ sia un parallelogramma, si pone $u + v := C - A$, tale $u + v \in V$ è detto *somma di u e v*,

  siano $u, v, w \in V$:

  i la somma di vettori (liberi) è associativa, ossia, si ha:
  $u + (v + w) = (u + v) + w$ e si scrive semplicemente $u + v + w$;

  ii la somma di vettori (liberi) è commutativa, ossia, si ha:
  $u + v = v + u$;

  iii il vettore nullo 0 soddisfa $u + 0 = u = 0 + u$;

  iv $-u := A - B$ è l'opposto di u infatti si ha $u + (-u) = 0$;

  V è un gruppo abeliano rispetto all'addizione;

[3] E quindi da tutti i vettori applicati con estremi coincidenti, che sono chiaramente equipollenti tra loro!

[4] n.b. 0 ha nullo il modulo, indeterminati la direzione e il verso.

- *moltiplicazione per scalari:*

  $-$ siano $0 \neq u \in V, \lambda \in \mathbb{R}^*$, il *prodotto di u e* λ, denotato λu, è il vettore con

  la stessa direzione di u,

  $|\lambda u| = |\lambda||u|$,

  il verso concorde o discorde con u, a seconda che $\lambda > 0$ o $\lambda < 0$;

  $-$ se $\lambda = 0 \in \mathbb{R}$ oppure $u = 0$, si pone $\lambda u := 0$,

  siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

  v la moltiplicazione per scalari è omogenea, ossia si ha:
  $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$,

  vi l'addizione tra scalari è distributiva rispetto alla moltiplicazione tra scalari e vettori, ossia si ha:
  $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$,

  vii l'addizione tra vettori è distributiva rispetto alla moltiplicazione tra scalari e vettori, ossia si ha:
  $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$,

  viii la moltiplicazione per scalari è unitaria, ossia si ha:
  $1_{\mathbb{R}} u = u$;

  V con le operazioni di addizione e moltiplicazione per scalari è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

n.b. Fin qui abbiamo usato solo il concetto di $\|$ tra rette e la possibilità di confrontare le lunghezze di segmenti situati su rette $\|$, non abbiamo cioè confrontato segmenti segmenti qualsiasi né misurato l'angolo di due semirette o usato il concetto di $\perp$.

Notazione 5.2.1 Fissato un riferimento cartesiano $\sigma(O; x, y, z)$ (vedi Cor. 5.1.5.):
$-$ a ogni vettore (libero) u si associa l'unico vettore applicato $P - O \in u$,
$-$ a ogni vettore applicato $P - O$ si associano le coordinate cartesiane di P in σ,
ciò da una c.b.u. tra V ed $\mathbb{R}^3$, che consente di identificare i due insiemi[5].
Scrivendo $u = (a, b, c)$ si intende che è stato fissato un riferimento cartesiano $\sigma(O; x, y, z)$ e che, posto $P - O = u$, si ha $P(a, b, c)$.

Inoltre, uguaglianza e similitudine di triangoli, permettono di tradurre in termini di coordinate le operazioni 'geometriche' di addizione e moltiplicazione per scalari. Piú precisamente, dati

$u = (a, b, c), v = (a', b', c'), a, b, c, a', b', c', \lambda \in \mathbb{R}$, si ha:

[5]Incluse le strutture di spazi vettoriali reali.

i) $u+v=(a+a',b+b',c+c')$,

ii) $\lambda u=(\lambda a,\lambda b,\lambda c)$;

se $A(a_1,a_2,a_3), B(b_1,b_2,b_3)$, si ha:

iii) $B-A=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$;

infine, dato $P\in\Sigma$ con $P-O\equiv B-A$, (ossia $OABP$ parallelogramma), essendo $P-O=(B-O)-(A-O)$ si ha

iv) $(x,y,z)=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$.

Le operazioni geometriche sui vettori di V si estendono formalmente alle operazioni su $\mathbb{R}^n$ (anche per $n>3$).

Definizione 5.2.2 *1. Se $u,v\in V$, $\sigma(O;x,y,z)$ è un sistema di coordinate cartesiane su Σ, $P-O=u, Q-O=v$ e O,P,Q sono allineati, si dice che u e v* sono paralleli[6].

2. Dati $u,v,w\in V$ e un sistema di coordinate cartesiane $\sigma(O;x,y,z)$ su Σ, se, posto $P-O=u, Q-O=v, R-O$, i punti O,P,Q,R sono complanari, si dice che u,v e w sono complanari.

Proposizione 5.2.3 *Siano $\sigma(O;x,y)$ e $\sigma(O;x,y,z)$ sistemi di coordinate cartesiane ortogonali rispettivamente del piano, e dello spazio.*
Se $u=(a,b), A(a_1,a_2), B(b_1,b_2)\Longrightarrow$
$|u|=\sqrt{a^2+b^2}$,
$|B-A|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$.
Se $u=(a,b,c), A(a_1,a_2,a_3), B(b_1,b_2,b_3)\Longrightarrow$
$|u|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$,
$|B-A|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$.

Definizione 5.2.4 *1. Un* versore *è un vettore di modulo* 1;

2. il versore associato a un vettore v *è il versore con egual verso e direzione di v*[7]*, ossia:*

$$\mathrm{vers}(v):=\frac{v}{|v|},$$

3. se $u=(a,b)\Longrightarrow$ $\mathrm{vers}(u)=(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$,

4. se $u=(a,b,c)\Longrightarrow$ $\mathrm{vers}(u)=(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}),\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}),\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}})$;

*5. l'*angolo (convesso) di due vettori applicati *è l'angolo $0\le\theta\le\pi$ formato da due semirette uscenti da uno stesso punto, $\|$ alle rette di applicazione dei vettori applicati e aventi lo stesso verso dei medesimi.*

Essendo l'angolo di due vettori applicati invariante per equipollenza, si può parlare di angolo di due vettori (liberi) $u,v\in V$*, indicato $\widehat{uv}$;*

[6]In simboli si scrive $u\parallel v$.
[7]Chiaramente la definizione è fatta su un rappresentante qualsiasi!

6. *il* vettore proiezione ortogonale di un vettore applicato $B - A$ su una retta r *è il vettore applicato* $B' - A'$ *con* B' *e* A' *rispettivamente proiezioni ortogonali di* B *e* A *su* r.

7. *Il vettore (libero)* proiezione ortogonale di un $u \in V$ lungo una direzione r *è il vettore (libero) rappresentato dalla proiezione ortogonale su* r *di un qualunque rappresentante di* u;

8. *il* versore di una retta orientata r *è il versore di un suo vettore direzionale;*

9. *la* componente di un $u \in V$ lungo la direzione e il verso di una retta orientata r di versore ε *è il numero reale* λ *tale che* $\lambda\varepsilon$ *sia il vettore proiezione ortogonale di* u *lungo* r.

Proposizione 5.2.5 *Dati* $0 \neq v, u \in V$*, il vettore proiezione ortogonale di* u *su* v *è*

$$|u| \cos \widehat{uv} \mathrm{vers}(v).$$

Dim. Segue facilmente dalla definizione.

5.3 Prodotto scalare

Lemma 5.3.1 *Siano* $u = (a_1, a_2), v = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$*, si ha:*

$$u \perp v \iff a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

Dim. Siano $A - O = u, C - A = v, C - O = u + v$, sappiamo che $u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, pertanto:

$$\begin{aligned} |u+v|^2 &= (a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2 = a_1^2 + b_1^2 + 2a_1b_1 + a_2^2 + b_2^2 + 2a_2b_2 = \\ &= |u|^2 + |v|^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2). \end{aligned}$$

Il teorema di L. Carnot(1753-1823) applicato al triangolo OAC dice che il triangolo è retto in A (ossia $u \perp v$), $\iff$ $|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2$ $\iff$ $(a_1b_1 + a_2b_2) = 0$

Osservazione 5.3.2 Si prova in modo simile che se $u = (a_1, a_2, a_3), v = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, si ha: $u \perp v \iff a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

Definizione 5.3.3 Il *prodotto scalare di* $u = (u_1, \ldots, u_n), v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, indicato $u.v$, è lo scalare

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n.$$

Proposizione 5.3.4 *Per ogni* $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *si ha:*

1. $u.v = v.u$ simmetria,

2. $(\lambda u + \mu v).w = \lambda(u.w) + \mu(v.w)$ linearità,

3. $u.u = |u|^2 \geq 0,\ u.u = 0 \iff u = 0$ positività.

Dim. Tutte le implicazioni seguono facilmente dalla definizione.

Per $n = 2, 3$ il prodotto scalare ha un'interpretazione geometrica[8].

Teorema 5.3.5 *Se* $u, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}, \implies u.v = |u||v| \cos \widehat{uv}$.

Dim. Siano $\sigma(O; x, y)$ un sistema di riferimento del piano, $u = A - O, v = B-O, \theta = \widehat{uv}$, sia inoltre r la $\perp$ a OB passante per O. Conduciamo da A le $\|$ a r e OB, siano $B'-O = (|\,u| \cos \theta)\text{vers}(v)$ e $w = A'-O$, con A' la proiezione ortogonale di A su r, si ha $u = A'-O+B'-O = w + (|\,u| \cos \theta)\text{vers}(v) \implies$

$$\begin{aligned} u.v &= w.v + (|u| \cos \theta) vers(v).v = 0 + (|u| \cos \theta) vers(v).|v| vers(v) = \\ &= |u| \cos \theta |v| vers(v).vers(v) = |u||v| \cos \theta \end{aligned}$$

in quanto $\text{vers}(v).\text{vers}(v) = 1$.

Definizione 5.3.6 1. *Dati* $u, v \in V, v \neq 0$, *il* vettore proiezione ortogonale di u su v *è*

$$\frac{u.v}{|v|}\text{vers}(v),$$

mentre la componente di u su v *è*

$$\frac{u.v}{|v|}.$$

2. *I* coseni direttori di un vettore u *sono i coseni degli angoli che* u *forma coi versori degli assi coordinati.*

Osservazione 5.3.7 Dato $u = (a, b, c)$, *le coordinate di* u sono le componenti di u sui versori degli assi, mentre i *coseni direttori di* u sono le coordinate di $\text{vers}(u)$.

5.4 Prodotto vettore

Definizione 5.4.1 Dati $u = (a_1, a_2, a_3), v = (b_1, b_2, b_3) \in V$, il *prodotto vettoriale di* u *e* v (denotato $u \times v$ è il vettore:

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

[8]Noi diamo la dimostrazione solo per $n = 2$.

Osservazione 5.4.2 Dati $u = (a_1, a_2, a_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in V$, le coordinate di $u \times v$ sono i minori, presi a segni alterni, ottenuti cancellando -ordinatamente- le colonne della matrice[9]

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Lemma 5.4.3 *Il vettore $u \times v$ è ortogonale sia a u che a v.*

Dim. Le matrici

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

hanno entrambe determinante nullo avendo due righe uguali. Posto $u \times v = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e sviluppando entrambi rispetto alla terza riga otteniamo

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0, b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 = 0$$

.

Osservazione 5.4.4 Il prodotto vettoriale non è associativo, infatti, dati $u, v, w \in V$, si ha:

$$u \times (v \times w) \neq (u \times v) \times w,$$

come dimostra il seguente esempio.

Esempio 5.4.5 Se $u = (1, 0, 0), v = (1, 0, 0), w = (0, 1, 0)$, si ha:
$u \times v = 0_{\mathbb{R}^3},\ v \times w = (0, 0, 1)$
$u \times (v \times w) = (0, -1, 0),\ (u \times v) \times w = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Proposizione 5.4.6 *Dati $u, v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$, si ha:*

1. $u \times v = -v \times u$ (anticommutatività),
2. $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$ (distributività),
3. $(\lambda u) \times v = \lambda(u \times v)$ (omogeneità[10]).

Proposizione 5.4.7 *Dati $u = (a_1, a_2, a_3), v = (b_1, b_2, b_3) \in V$, si ha:*

1. $|u \times v|^2 = |u|^2|v|^2 - (u.v)^2$ (identità di Lagrange (1736-1813)),
2. $|u \times v| = |u||v| \sin \widehat{uv}$[11],
3. $u \times v = 0_{\mathbb{R}^3} \iff u \parallel v$.

[9] Le cui righe sono le componenti di u e v.
[10] Si ha cosí: $(-u) \times v = -u \times v = v \times u$.
[11] $|u \times v|$ è l'area del parallelogramma di lati u e v.

Dim. Si ha $|u \times v|^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$, e $|u|^2|v|^2 - (u.v)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$ e quindi 1.. Per il Teor. 5.3.5 si ha $(u.v)^2 = |u|^2|v|^2 \cos^2 \widehat{uv}$, da 1. si ha quindi $|u \times v|^2 = |u|^2|v|^2(1 - \cos^2 \widehat{uv}) = |u|^2|v|^2 \sin^2 \widehat{uv}$, poiché $\sin \widehat{uv} \geq 0$, essendo $0 \leq \widehat{uv} \leq \pi, \Longrightarrow \sqrt{\sin^2 \widehat{uv}} = \sin \widehat{uv}$, e ciò prova 2.. Per 3., Basta applicare la Def. 5.2.2.1. a 2..

Corollario 5.4.8 Dati tre punti non allineati $A, B, C \in \Sigma$, l'area del triangolo da essi definito è

$$S = \frac{1}{2}|(B - A) \times (C - A)|.$$

Osservazione 5.4.9 Si poteva anche definire geometricamente il prodotto vettoriale deducendone poi le proprietà formali, ma sarebbe stato piú difficile.

5.5 Prodotto misto

Definizione 5.5.1 Dati $u, v, w \in V$, il prodotto scalare di u col prodotto vettore $v \times w$ è detto *prodotto misto di* u, v, w.

Osservazione 5.5.2 Dalle Def. 5.3.3 e 5.4.1, se $u = (a_1, a_2, a_3), v = (b_1, b_2, b_3), w = (c_1, c_2, c_3)$, si ha che:

$$u.v \times w = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

.

Esercizio 5.5.3 Dati $u, v, w \in V$,

1. Provare che $u.v \times w = w.u \times v = v.w \times u$,

2. Determinare tutti gli altri prodotti misti dei tre vettori e indicarne il valore.

3. Se u, v e w sono complanari, essendo $v \times w$ ortogonale a entrambi i fattori lo è anche a $u \Longrightarrow u.v \times w = 0_{\mathbb{R}}$, viceversa l'annullarsi del numero reale $u.v \times w$ è condizione sufficiente alla complanarità di u, v e w.

5.6 Ancora sui sistemi di riferimento

Notazione 5.6.1

- Dati u_1, u_2 vettori non allineati del piano, $\sigma(u_1, u_2)$ denota il sistema di coordinate cartesiane che ha vers(u_1),vers(u_2) come versori rispettivamente degli assi x e y.
- Dati u_1, u_2, u_3 vettori non complanari dello spazio, $\sigma(u_1, u_2, u_3)$ denota il sistema di coordinate cartesiane con vers(u_1),vers(u_2), vers(u_3) come versori rispettivamente degli assi x, y e z.

Osservazione 5.6.2 Risulta $\sigma(u_1, u_2) \neq \sigma(u_2, u_1)$; provare per esempio che $\sigma(u_1, u_2, u_3) \neq \sigma(u_2, u_1, u_3)$, ma $\sigma(u_1, u_2, u_3) = \sigma(u_2, u_3, u_1)$.

Definizione 5.6.3

1. Un riferimento $\sigma(u_1, u_2, u_3)$ è *orientato positivamente* se un osservatore orientato come u_3 vede percorrere l'angolo $\widehat{u_1 u_2}$ da u_1 a u_2 in senso antiorario (altrimenti, $\sigma(u_1, u_2, u_3)$ è *orientato negativamente).*

2. Un riferimento $\sigma(u_1, u_2)$ è *orientato positivamente rispetto a un vettore u_3 non giacente sul piano di u_1 e u_2*, se il riferimento $\sigma(u_1, u_2, u_3)$ è orientato positivamente.

3. Due sistemi di coordinate cartesiane del piano (o dello spazio) si dicono *concordi* se hanno lo stesso tipo di orientazione[12].

4. Se $\sigma(O; x, y)$ e $\sigma(O; x, y, z)$ sono sistemi di coordinate cartesiane ortogonali orientati positivamente, i rispettivi versori degli assi sono spesso indicati[13] $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$[14].

Proposizione 5.6.4 *Siano $u = (a_1, a_2), v = (b_1, b_2)$ due vettori non allineati di un piano, dotato di un sistema di coordinate cartesiane orientato positivamente. Posto $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$, il riferimento $\sigma(u_1, u_2)$ è orientato positivamente $\iff d(A) > 0$.*

Dim. Chiaramente $\sigma(u_1, u_2)$ è concorde con $\sigma(vers(u_1), vers(u_2))$, ponendo $vers(u_1) = (\cos\theta, \sin\theta), vers(u_2) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ e

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} cos\theta & \cos\varphi \\ \sin\theta & \sin\varphi \end{pmatrix} \Longrightarrow d(\tilde{A}) = \cos\theta\sin\varphi - \cos\varphi\sin\theta = \sin(\varphi - \theta),$$

si ha , $d(\tilde{A}) > 0 \iff 0 < \varphi - \theta < \pi$. D'altra parte,

$$d(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = |u_1| \cdot |u_2| \cdot d(\tilde{A}),$$

per la Def. 5.2.4 3.. Con le stesse notazioni:

Corollario 5.6.5 *Due riferimenti $\sigma(u_1, u_2)$ e $\sigma(u_1', u_2')$ sono concordi $\iff$*

$$d(A) \cdot d(A') > 0.$$

Esercizio 5.6.6 Per ogni sistema di coordinate cartesiane $\sigma(u_1, u_2)$:

- $\sigma(u_1, u_2)$ e $\sigma(u_1 + \lambda u_2, u_2)$ sono concordi, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

[12] La relazione di essere concordi è una relazione di equivalenza nell'insieme dei sistemi di coordinate cartesiane del piano (o dello spazio).

[13] Specialmente dai fisici.

[14] Spesso omettendo le frecce.

- $\sigma(u_1, u_2)$ e $\sigma(-u_1, u_2)$ sono discordi,
- $\sigma(u_1, u_2)$ e $\sigma(u_2, u_1)$ sono discordi,

Osservazione 5.6.7 Valgono gli stessi risultati per $\sigma(u_1, u_2, u_3)$, con u_1, u_2, u_3 vettori non complanari dello spazio dotato di sistema di coordinate cartesiane orientato positivamente.

Chapter 6

Geometria Analitica

Consideriamo sia il piano che lo spazio dotati di sistema di coordinate cartesiane orogonali orientato positivamente (se si parla di prodotto vettore di vettori del piano, questo sarà il piano xy e il vettore (a, b) sarà quindi $(a, b, 0)$).

6.1 Allineamento e complanarità

Teorema 6.1.1 *Dati tre punti A, B, P* nel piano o nello spazio! *le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *A, B, P sono allineati,*
2. $(P - A) \times (B - A) = 0$,

   se $A \neq B \Longrightarrow$ 1. e 2. sono anche equivalenti a
3. $(P - A) = t(B - A)$ *per qualche* $t \in \mathbb{R}$.

Dim. 1. $\Longrightarrow$ 3. sia $A \neq B$, assumiamo sulla retta AB il punto A come origine delle coordinate e il punto B come punto di ascissa $1, \Longrightarrow$ il punto P[1] ha per ascissa qualche $t \in \mathbb{R}$ ossia, $(P - A) = t(B - A)$; 1. $\Longrightarrow$ 2. in particolare l'ipotesi A, B, P allineati $\Longrightarrow P - A \parallel B - A$; 2. $\Longrightarrow$ 1. abbiamo già osservato che il prodotto vettore di due vettori è nullo $\Longleftrightarrow$ essi sono $\parallel$; 3. $\Longrightarrow$ 2. segue dalla Def. 5.4.1.

Corollario 6.1.2 *Dati nel piano, un punto P_0 e un vettore (libero) u, la retta r per P_0 e $\perp$ a u è il luogo dei punti P tali che $u.(P - P_0) = 0$.*

Dim. Sia $P_1 \in r$, si ha $P \in r \iff (P - P_0) \times (P_1 - P_0) = 0 \iff (P - P_0) \parallel (P_1 - P_0)$, essendo $P_1 - P_0 \perp u$ si ha $u.(P - P_0) = 0$.

[1]Appartenente alla retta AB!

Teorema 6.1.3 *Dati quattro punti A, B, C, P nello spazio, le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *A, B, C, P sono complanari,*
2. *$(P-A).(B-A) \times (C-A) = 0$,*

   se A, B, C non sono allineati è anche equivalente
3. *$(P-A) = s(B-A) + t(C-A)$ per qualche $s, t \in \mathbb{R}$.*

Dim. Se A, B, C sono allineati $\Longrightarrow A, B, C, P$ sono complanari $\forall P$ e vale anche $(P-A).(B-A) \times (C-A) = 0$, in quanto $(B-A) \times (C-A) = 0$, possiamo quindi supporre che A, B, C non siano allineati. Per provare 1. $\Longrightarrow$ 3., dotiamo il piano ABC del sistema di coordinate che ha il punto A come origine delle coordinate, la retta AB come asse delle x e la retta AC come asse delle y, in modo che $B(1,0)$ e $C(0,1) \Longrightarrow \forall P \in ABC$ ha per coordinate una coppia $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ ossia, $(P-A) = s(B-A) + t(C-A)$; 3. $\Longrightarrow$ 2. sappiamo già che il determinante di una matrice con una riga combinazione lineare delle altre è nullo; 2. $\Longrightarrow$ 1. sappiamo già che se tre vettori hanno prodotto misto nullo sono complanari.

Corollario 6.1.4 *Dati nello spazio un punto P_0 e un vettore (libero) u, il piano π per P_0 e $\perp$ a u è il luogo dei punti P tali che $u.(P-P_0) = 0$.*

Dim. Siano P_0, P_1, P_2 tre punti non allineati del piano $\pi, P \in \pi \iff (P-P_0).(P_1-P_0) \times (P_2-P_0) = 0 \iff (P-P_0) \perp (P_1-P_0) \times (P_2-P_0)$ ossia $(P-P_0) \perp u \Longrightarrow u.(P-P_0) = 0$.

6.2 La retta nel piano

Se $A \neq B$ sono due punti distinti del piano ed r è la retta che li congiunge, dal Teor. 6.1.1 si ricavano le equazioni di r. Precisamente, per un punto P del piano si ha $P \in r \iff$:

$$P - A = t(B-A) \text{ per qualche } t \in \mathbb{R}, \tag{6.1}$$

$$(P-A) \times (B-A) = 0, \tag{6.2}$$

6.2.1 Equazioni

Posto $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), P(x, y)$ ed $(l_1, l_2) := (b_1-a_1, b_2-a_2)$, l'eguaglianza vettoriale di (6.1) può essere tradotta in eguaglianza delle componenti dei vettori (liberi) corrispondenti:

$$\begin{cases} x = a_1 + l_1 t \\ y = a_2 + l_2 t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, (l_1, l_2) \neq (0,0). \tag{6.3}$$

(6.1) è detta *rappresentazione parametrica vettoriale della retta r*
(6.3) è detta *rappresentazione parametrica scalare della retta r*,
evidenziando le coordinate del punto generico di r, (6.3) può essere scritta nella forma compatta:

$$r: \ (a_1 + l_1 t, a_2 + l_2 t), \ t \in \mathbb{R}.$$

L'eguaglianza vettoriale di (6.2) può essere tradotta in

$$\rho\left(\begin{pmatrix} X - a_1 & Y - a_1 & 0 \\ l_1 & l_2 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 \quad \text{ossia} \quad \begin{vmatrix} X - a_1 & Y - a_1 \\ l_1 & l_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{6.4}$$

notiamo che (6.4) è un'equazione lineare nelle incognite X e Y, cioè del tipo:

$$aX + bY + c = 0 \quad (a, b) \neq (0, 0) \tag{6.5}$$

(6.2) è detta *rappresentazione cartesiana vettoriale della retta r*
(6.5) è detta *rappresentazione cartesiana scalare della retta r*, o semplicemente, *equazione di r*.

Teorema 6.2.1 *Nel piano ogni retta r ha rappresentazione parametrica scalare (6.3) e rappresentazione cartesiana scalare (6.5). Viceversa, ogni scrittura (6.3) e ogni equazione (6.5) rappresentano una retta.*

Dim. La (6.3) rappresenta la retta passante per $A(a_1, a_2), B(a_1 + l_1, a_2 + l_2)$[2]; sia (x_0, y_0) una soluzione di (6.5), ossia:

$$(\bullet) \qquad a(X - x_0) + b(Y - y_0) = 0,$$

posto $u = (a, b), P_0(x_0, y_0), P(x, y), (\bullet)$ può essere riscritta nella forma: $u.(P - P_0) = 0$[3].

Definizione 6.2.2 *Dati una retta r e due suoi punti distinti A e B, il vettore (libero) associato a $B - A$ è detto* vettore direzionale di r, *mentre il suo versore è detto* versore direzionale di r.

Osservazione 6.2.3

1. Se r è data da (6.3) $\Longrightarrow$ un suo vettore direzionale è (l_1, l_2), se è data da (6.5) $\Longrightarrow$ un suo vettore direzionale è $(-b, a)$.

2. Una retta r è determinata univocamente da un suo punto $A(a_1, a_2)$ e da un suo vettore direzionale (l_1, l_2).

   Nel caso $l_1 l_2 \neq 0$, un'equazione di r è:

$$\frac{X - a_1}{l_1} = \frac{Y - a_2}{l_2} \tag{6.6}$$

[2] Rispettivamente corrispondenti ai valori 0 e 1 del parametro t in (6.3).
[3] Che sappiamo essere la retta per $P_0 \perp$ a u, vedi Cor. 6.1.2.

n.b. (6.6) può essere considerata anche se $l_1 l_2 = 0$, convenendo che se un denominatore è nullo sia nullo il corrispondente numeratore[4].

3. A ogni retta r sono associati due versori direzionali tra loro opposti, fissarne uno equivale a fissare un verso su r.

6.2.2 Coseni direttori e coefficiente angolare

Definizione 6.2.4 *1. I coseni direttori di un vettore direzionale di una retta r sono detti* coseni direttori di r[5].

2. Dati una retta r, i suoi due versori u_r e $-u_r$, e un vettore v, l'angolo $\widehat{vr}$ *è il piú piccolo dei due angoli $\widehat{u_r v}$, $\widehat{-u_r v}$ (n.b. risulta* $0 \leq \widehat{vr} \leq \frac{\pi}{2}$*).*

3. Dati $u, v \in V$, con versori u', v' e $A-O, B-O$ rappresentanti di u', v' applicati in O, l'angolo orientato *di u e v, o semplicemenete* angolo che u forma con v, *denotato $\widehat{\overrightarrow{uv}}$, è l'insieme degli angoli θ tali che una rotazione di θ porta A a sovrapporsi con B.*

*4. Dati un vettore u e una retta r, l'*angolo orientato di u *e* r *o l'*angolo orientato che r forma con u, *indicato $\widehat{\overrightarrow{ur}}$, è l'unione degli angoli orientati che i due versori di r formano con u.*

*5. Date due rette r, s, l'*angolo orientato di r *ed* s *o l'*angolo orientato che r forma con s, *indicato $\widehat{\overrightarrow{rs}}$, è l' angolo orientato che r forma con uno dei versori di s.*

Osservazione 6.2.5 *1.* Se $\theta \in \widehat{\overrightarrow{vr}} \Longrightarrow \widehat{\overrightarrow{vr}} = \{\theta + 2h\pi : h \in \mathbb{Z}\}$;

2. In Def. 5.2.4.5 avevamo definito un angolo convesso come un numero reale dell'intervallo $[0, \pi]$. Ora, associando a ogni angolo orientato $\{\theta + 2h\pi : h \in \mathbb{Z}\}$, il numero reale $\min\{|\theta + 2h\pi| : h \in \mathbb{Z}, \}$, si ottiene un elemento di $[0, \pi]$, detto *angolo convesso associato.*

3. Un angolo orientato è una classe di equivalenza della relazione di equivalenza definita, sull'insieme degli angoli, da $\theta \sim \varphi$, se $\theta - \varphi$ è un multiplo di 2π.

Esempio 6.2.6 Dati $u = (1, 2), v = (3, 1) \Longrightarrow$

$$\cos \widehat{uv} = \frac{u.v}{|u||v|} = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \widehat{uv} = \frac{\pi}{4};$$

[4] In particolare, se $l_1 = 0$ un'equazione di r è $X - a_1 = 0$, se $l_2 = 0$ un'equazione di r è $Y - a_2 = 0$.

[5] n.b. i coseni direttori di r sono individuati a meno del segno!

poiché $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5 < 0$, la rotazione di $\frac{\pi}{4}$ che porta u a sovrapporsi con v è in senso orario, ossia:

$$\widehat{\vec{uv}} = -\frac{\pi}{4} \quad \text{o} \quad \widehat{\vec{uv}} = \frac{3}{4}\pi \quad \text{o} \quad \widehat{\vec{uv}} = \{\frac{3}{4}\pi + 2h\pi, h \in \mathbb{Z}\}.$$

Proposizione 6.2.7 *Dati un vettore v, due rette r e s, $\theta \in \widehat{\vec{ur}}$ e $\varphi \in \widehat{\vec{us}}$:*

1. $\widehat{\vec{ur}} = \{\theta + h\pi : h \in \mathbb{Z}\}$;
2. $\widehat{\vec{ur}} = \widehat{\overrightarrow{(-u)r}}$;
3. $\widehat{\vec{rs}} = \{\theta - \varphi + h\pi : h \in \mathbb{Z}\}$.

Dim. Se $r \not\parallel$ all'asse y, tutti gli angoli di $\widehat{\vec{ir}}$ hanno la stessa tangente trigonometrica $\tau \in \mathbb{R}$ e viceversa, $\forall t \in \mathbb{R}$ determina un insieme di angoli $\{\theta + h\pi : h \in \mathbb{Z}\}$ aventi t come tangente trigonometrica, ossia $\tan \widehat{\vec{ir}} \in \mathbb{R}$ è univocamente determinata da r e cosí pure $\tan \widehat{\vec{rs}} \in \mathbb{R}$.

Definizione 6.2.8 Se $r \not\parallel$ all'asse y, il *coefficiente angolare di* r è il numero reale

$$m = \tan \widehat{\vec{ir}}.$$

Proposizione 6.2.9 *Se $r \not\parallel$ all'asse $y, \Longrightarrow r$ ha vettore direzionale $u = (l_1, l_2)$, con $l_1 \neq 0$ e vale $m = \frac{l_2}{l_1}$.*

Dim. Essendo $l_1 \neq 0$, se $u' = \text{vers}(u) = (l_1', l_2')$ si ha $\frac{l_2}{l_1} = \frac{l_2'}{l_1'}$, dove, posto $\theta = \widehat{\vec{iu'}}$, vale $l_1' = \cos\theta, l_2' = \sin\theta$.

Corollario 6.2.10 *Se $r \not\parallel$ all'asse y, ha equazione $aX + bY + c = 0$ si ha*

$$m = -\frac{a}{b}.$$

Dim. Sappiamo che un vettore direzionale di r è $(-b, a), b \neq 0$.

Osservazione 6.2.11 Ossia, una retta $r \not\parallel$ all'asse y è rappresentabile mediante un'equazione della forma $Y = mX + q$. Infatti, da $aX + bY + c = 0, b \neq 0$ si ricava

$$\frac{a}{b}X + Y + \frac{c}{b} = 0 \Longrightarrow Y = -\frac{a}{b}X - \frac{c}{b} \;\therefore\; m = -\frac{a}{b},\, q = \frac{c}{b}.$$

6.2.3 Mutue posizioni di rette

Proposizione 6.2.12 *Se $r \nparallel$ all'asse y, $s \nparallel$ all'asse y, con rispettivi coefficienti angolari m, m', si ha:*

1. $r \perp s \iff 1 + mm' = 0$,
2. *se r non è perpendicolare a s si ha:*
$$\tan \widehat{\overrightarrow{rs}} = \frac{m' - m}{1 + mm'},$$
3. $r \parallel s \iff m = m'$.

Dim. 1. se $r : y = mX + q, s : y = m'X + q'$, allora $(1, m)$ e $(1, m')$ ne sono i rispettivi vettori direzionali e $1 + mm'$ è il loro prodotto scalare; 2. se poi $\theta \in \widehat{\overrightarrow{ir}}, \theta' \in \widehat{\overrightarrow{is}}$ si ha $\theta - \theta' \in \widehat{\overrightarrow{rs}}$ ossia la tesi perché
$$\tan(\theta - \theta') = \frac{\tan \theta' - \tan \theta}{1 + \tan \theta \tan \theta'};$$
3. si ha $r \parallel s \iff 0 \in \widehat{\overrightarrow{rs}}$.

Teorema 6.2.13 *Date $r : aX + bY + c = 0, r' : a'X + b'Y + c' = 0$, siano $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \implies \rho(A) \geq 1$ e:*

1. $\rho(A) = \rho(B) = 2 \iff r$ *e* r' *sono incidenti e distinte,*
2. $\rho(A) = 1, \rho(B) = 2 \iff r$ *e* r' *sono* $\parallel$ *e distinte,*
3. $\rho(A) = \rho(B) = 2 \iff r$ *e* r' *sono* $\parallel$ *e* $=$.

Dim. Basta applicare il teorema di Rouché-Capelli al sistema formato dalle equazioni delle due rette.

Dati

– $\mathcal{S} := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (a, b) \neq (0, 0)\}$,

– $\mathcal{R} := \{r : r$ è una retta del piano$\}$,

– $\varphi : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{R}$ definita da $\varphi(a, b, c) = r : aX + bY + c = 0$,

provare che φ è surgettiva,
determinare $\varphi^{-1}(r)$.
Definendo in $\mathcal{S}$ la relazione

$$(a, b, c) \sim (a', b', c') \text{ se } a' = \lambda a, b' = \lambda b, c' = \lambda c, \text{ per qualche } \lambda \in \mathbb{R}^*,$$

in virtú del Teor. 6.2.13, φ induce una c.b.u.
$$\bar{\varphi} : \mathcal{S}/\sim \longrightarrow \mathcal{R}$$
ossia, una retta individua i suoi coefficienti a meno di un fattore di proporzionalità.

6.2.4 Fasci di rette

Definizione 6.2.14 *Dato un punto P_0, il* fascio di rette di centro P_0, *denotato Φ_{P_0}, è l'insieme delle rette passanti per P_0.*

Proposizione 6.2.15 *Dati $P_0(x_0, y_0)$ e $r, r' \in \Phi_{P_0}$, di equazioni*

$$r : aX + bY + c = 0,\ r' : a'X + b'Y + c' = 0,$$

$\forall\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ si ha che $\lambda(aX + bY + c) + \mu(a'X + b'Y + c') = 0$ definisce una retta di Φ_{P_0}.

Dim. Basta osservare che vale $(\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b') \neq (0,0)$ e che si ha $\lambda(ax_0 + by_0 + c) + \mu(a'x_0 + b'y_0 + c') = 0$.

Proposizione 6.2.16 *Nelle stesse ipotesi di Prop. 6.2.15, l'applicazione*

$$\psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \Phi_{P_0},\ \ con\ \ \psi(\lambda, \mu) = r$$

è surgettiva (dove $r : \lambda(aX + bY + c) + \mu(a'X + b'Y + c') = 0$).

Inoltre, posto in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $(\lambda, \mu) \sim (\lambda', \mu')$ se proporzionali, ψ induce $\bar{\psi} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}/\sim \longrightarrow \Phi_{P_0}$, bigettiva[6].

Dim. Siano $s \in \Phi_{P_0}$ e $A(\bar{x}, \bar{y}) \in s$, $A \neq P_0$, poiché

$$\lambda(a\bar{x} + b\bar{y} + c) + \mu(a'\bar{x} + b'\bar{y} + c') = 0$$

è un'equazione lineare omogenea in (λ, μ) essa ha una soluzione non banale $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ e $\bar{\lambda}(aX + bY + c) + \bar{\mu}(a'X + b'Y + c') = 0$ rappresenta una retta, passante per A e P_0, ossia proprio s.

Osservazione 6.2.17

1. Se $(\lambda, \mu), (\lambda', \mu') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ soddisfano $\psi(\lambda, \mu) = \psi(\lambda', \mu') = s \in \Phi_{P_0}$ e $A(\bar{x}, \bar{y}) \in s$, $A \neq P$ da

$$\begin{cases} \lambda(a\bar{x} + b\bar{y} + c) + \mu(a'\bar{x} + b'\bar{y} + c') = 0 \\ \lambda'(a\bar{x} + b\bar{y} + c) + \mu'(a'\bar{x} + b'\bar{y} + c') = 0 \end{cases} \tag{6.7}$$

   si ottiene $(\lambda, \mu) = \alpha \cdot (\lambda', \mu')$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}^*$, in quanto soluzioni di una stessa equazione lineare omogenea in 2 variabili.

2. Φ_{P_0} può essere generato come sopra a partire da 2 sue rette distinte qualsiasi.

Definizione 6.2.18 *L'insieme di tutte le rette $\parallel$ a una retta data è detto* fascio di rette improprio *o* fascio di rette $\parallel$.

[6] Ossia, fissate due equazioni di due rette $r, r' \in \Phi_{P_0}$, un'altra retta di Φ_{P_0} individua i suoi coefficienti (λ, μ) a meno di un fattore di proporzionalità.

Proposizione 6.2.19 *Data una retta $r: aX + bY + c = 0$, il fascio improprio da essa individuato può essere rappresentato da:*

$$aX + bY + t = 0,\ t \in \mathbb{R}.$$

Esempio 6.2.20 1. Trovare la retta passante per $A(1,1)$ e per $P \in r \cap r'$ con $r: X + Y - 1 = 0$ e $r': X - 3Y = 0$.

La retta cercata è la retta $s \in \Phi_P$ con $A \in s$, ossia,

$s: (\lambda+\mu)X + (\lambda-3\mu)Y - \lambda = 0$ con $\lambda+\mu+\lambda-3\mu-\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 2\mu$ e quindi $s: 3X - Y - 2 = 0$[7].

2. Trovare la retta passante per $O(0,0)$ e $\parallel$ a $r: 2X - Y + 1 = 0$.

   La retta cercata è la retta $s: 2X - Y = 0$.

3. Provare che $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \end{cases}$, $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t \end{cases}$, $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 2t + 2 \end{cases}$ sono tre rappresentazioni parametriche della stessa retta di equazione cartesiana $X - Y + 1 = 0$.

4. - Determinare $P \in r \cap r'$ con $r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \end{cases}$ e $r': \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 4t \end{cases}$.

   - Determinare $P \in r \cap r'$ con $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$ e $r': \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 + 6t \end{cases}$.

   Si trovano gli eventuali punti comuni a due rette date mediante rappresentazioni parametriche determinando l'equazione cartesiana di una e cercando gli eventuali valori del parametro dell'altra che la verificano oppure determinando gli eventuali valori dei due parametri che danno luogo agli stessi punti.

   Nel primo caso $r: 2x + y - 2 = 0$ e $4 + 4t + 1 - 4t = 0$ dànno $r \cap r' = \emptyset$.

   Nel secondo caso $\begin{cases} 1 + t = 3 - s \\ 2 - 2t = 6s - 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = 2 - s \\ t = 2 - 3s \end{cases} \Longrightarrow 2 - s = 2 - 3s \Longrightarrow s = 0 \Longrightarrow t = 2$, dànno $r \cap r' = \{P(3, -2)\}$.

6.3 Il piano nello spazio

Se A, B, C sono tre punti non allineati dello spazio e π è il piano da essi individuato, dal Teor. 6.1.3 si ricava:

$$P \in \pi \iff P - A = s(B - A) + t(C - A) \text{ per qualche } (s,t) \in \mathbb{R}^2. \quad (6.8)$$

Dati i punti $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3), C(c_1, c_2, c_3), P(x, y, z)$ se si pone $\beta := (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$, $\gamma := (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3)$, l'eguaglianza vettoriale di (6.8) può essere tradotta in eguaglianza delle componenti dei vettori (liberi) corrispondenti:

[7] Notare che non occorre determinare P!

$$\begin{cases} x = a_1 + s\beta_1 + t\gamma_1 \\ y = a_2 + s\beta_2 + t\gamma_2 \\ z = a_3 + s\beta_3 + t\gamma_3 \end{cases}, \ \rho\left(\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}\right) = 2, \ (s,t) \in \mathbb{R}^2 \tag{6.9}$$

(6.8) è detta *rappresentazione parametrica vettoriale del piano* π,
(6.9) è detta *rappresentazione parametrica scalare del piano* π,
evidenziando le coordinate del punto generico di π, (6.9) può essere scritta nella forma compatta:

$$\pi : \ (a_1 + s\beta_1 + t\gamma_1, a_2 + s\beta_2 + t\gamma_2, a_3 + s\beta_3 + t\gamma_3), \ (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Dal Teor. 6.1.3, abbiamo anche che

$$P \in \pi \iff (P - A).(B - A) \times (C - A) = 0, \tag{6.10}$$

passando alle coordinate (6.10) diventa

$$\begin{vmatrix} X - a_1 & Y - a_2 & Z - a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{6.11}$$

ossia, (6.11) è un'equazione lineare nelle incognite X, Y e Z, cioè del tipo:

$$aX + bY + cZ + d = 0 \quad (a,b,c) \neq (0,0,0) \tag{6.12}$$

(6.10) è detta *rappresentazione cartesiana vettoriale del piano* π,
(6.12) è detta *rappresentazione cartesiana scalare del piano* π, o semplicemente, *equazione di* π.

Teorema 6.3.1 *Nello spazio ogni piano π ha rappresentazione parametrica scalare (6.9) e rappresentazione cartesiana scalare (6.12). Viceversa, ogni scrittura (6.9) e ogni equazione (6.12) rappresentano un piano.*

Definizione 6.3.2 *Diconsi rispettivamente* vettore *e* versore direzionale *di un piano π un vettore a esso $\perp$ e il suo versore.*

Osservazione 6.3.3 Se π è dato in forma parametrica, un vettore direzionale è per esempio $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \times (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, se in forma cartesiana un vettore direzionale è per esempio (a, b, c)[8].

Definizione 6.3.4 *I concetti di* angolo fra due piani, $\|$ *e* $\perp$, *si riconducono ai corrispondenti fra vettori direzionali.*

Esercizio 6.3.5 Determinare una rappresentazione parametrica del piano per $A(1,1,1), B(1,2,1), C(2,1,0)$, un suo vettore direzionale e un'equazione cartesiana.

Si ha $(B - A) = (0,1,0)$, $(C - A) = (1,0,-1)$ e, da $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + s \\ z = 1 - t \end{cases}$, si ricava $X + Z - 2 = 0$.

[8] A ogni piano sono associati due versori direzionali, uno opposto dell'altro.

6.4 La retta nello spazio

Se $A \neq B$ sono due punti distinti dello spazio ed r è la retta che li congiunge, dal Teor. 6.1.1 si ricavano anche le 'equazioni vettoriali' di r[9] e precisamente un punto P dello spazio soddisfa $P \in r \iff$:

$$P - A = t(B - A) \text{ per qualche } t \in \mathbb{R}, \tag{6.13}$$

$$(P - A) \times (B - A) = 0, \tag{6.14}$$

6.4.1 Equazioni

Dati i punti $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3), P(x, y, z)$, se si pone $(l_1, l_2, l_3) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$, l'eguaglianza vettoriale di (6.13) può essere tradotta in eguaglianza delle componenti dei vettori (liberi) corrispondenti:

$$\begin{cases} x = a_1 + l_1 t \\ y = a_2 + l_2 t \\ z = a_3 + l_3 t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, (l_1, l_2, l_3) \neq (0, 0, 0); \tag{6.15}$$

evidenziando le coordinate del punto generico di r, (6.15) può essere scritta nella forma compatta:

$$r : \ (a_1 + l_1 t, a_2 + l_2 t, a_3 + l_3 t), \ t \in \mathbb{R}.$$

L'eguaglianza vettoriale di (6.14) può essere tradotta in

$$\rho\left(\begin{pmatrix} X - a_1 & Y - a_2 & Z - a_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix}\right) = 1 \ \therefore \ \frac{X - a_1}{l_1} = \frac{Y - a_2}{l_2} = \frac{Z - a_3}{l_3} \tag{6.16}$$

convenendo che se in (6.16) c'è uno 0 a un denominatore, va inteso 0 il corrispondente numeratore; notiamo che (6.16) è un sistema di 3 equazioni lineari (non indipendenti!) nelle incognite X, Y e Z cioè del tipo:

$$\begin{cases} aX + bY + cZ + d = 0 \\ a'X + b'Y + c'Z + d' = 0 \end{cases}, \quad \rho\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}\right) = 2 \tag{6.17}$$

(6.13) è detta *rappresentazione parametrica vettoriale della retta r*,
(6.15) è detta *rappresentazione parametrica scalare della retta r*,
(6.14) è detta *rappresentazione cartesiana vettoriale della retta r*,
(6.17) è detta *rappresentazione cartesiana scalare della retta r*, o semplicemente *equazioni cartesiane di r*.

Teorema 6.4.1 *Nello spazio ogni retta r ha una rappresentazione parametrica scalare (6.15) e una rappresentazione cartesiana scalare (6.17). Viceversa, ogni scrittura del tipo (6.15) e (6.17) rappresenta una retta.*

[9] Formalmente le stesse del piano!

Definizione 6.4.2 *Per ogni retta dello spazio si definiscono*[10] *i concetti di* vettore *e* versore direzionale, coseni direttori.

Osservazione 6.4.3

1. Una retta r rappresentata da

$$\begin{cases} aX + bY + cZ + d = 0 \\ a'X + b'Y + c'Z + d' = 0 \end{cases}$$

è $\perp$ sia ad (a, b, c)[11], che ad (a', b', c'), [12]. Pertanto, come suo vettore direzionale si può assumere $(a, b, c) \times (a', b', c')$.

2. I concetti di angolo fra due rette, $\|, \perp$ si riconducono agli analoghi concetti relativi ai vettori direzionali.

Esempio 6.4.4

1. Le rette $r : \begin{cases} X - 2Y + Z = 0 \\ X + Y - Z + 1 = 0 \end{cases}$, $s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4t - 1 \\ z = 6t \end{cases}$ sono $\|$, infatti $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (1, 2, 3)$.

2. Una rappresentazione della retta congiungente $A(1, 1, 1)$ e $B(1, 2, 0)$ come intersezione di piani è $\begin{cases} X = 1 \\ Y + Z - 2 = 0 \end{cases}$, si ha infatti

$$\frac{X - 1}{0} = \frac{Y - 1}{1} = \frac{Z - 1}{-1}.$$

6.4.2 Passaggio da una rappresentazione all'altra

Per passare da una rappresentazione parametrica, di una retta r o di un piano π, a una cartesiana basta determinarne un punto e un vettore direzionale, lo stesso per passare da una rappresentazione cartesiana a una parametrica. Algebricamente, per passare da una rappresentazione parametrica a una cartesiana, di una retta r o di un piano π, bisogna trovare nel primo caso due equazioni lineari e nel secondo una sola, attraverso l'operazione detta di *eliminazione del* o *dei parametri.* Viceversa, si passa da una rappresentazione cartesiana a una rappresentazione parametrica assumendo come parametri il massimo numero possibile di variabili.

Esempio 6.4.5

1. Data la rappresentazione parametrica

$$r : \ (1 + t, t, 1 - 2t) \, t \in \mathbb{R},$$

posto $t = y$ si ricava la rappresentazione cartesiana $r : \begin{cases} X = 1 + Y \\ Z = 1 - 2Y \end{cases}$;

[10] Analogamente a quanto fatto nel piano.
[11] Vettore direzionale del piano $\pi : \ aX + bY + cZ + d = 0$ che contiene r.
[12] Vettore direzionale del piano $\pi' : \ a'X + b'Y + c'Z + d' = 0$ che contiene r.

2. Data la rappresentazione parametrica
$$\pi : (1-s-t, 1+s-t, s+t), \ (s,t) \in \mathbb{R}^2,$$
posto $s = \frac{Y-X}{2}, t = 1+s-Y$ si ricava la rappresentazione cartesiana $Z = \frac{Y-X}{2} + 1 + \frac{Y-X}{2} - Y$, i.e $Z = 1 - X$;

3. Data una rappresentazione cartesiana $\pi : X - 2Y + Z - 1 = 0$, posto $X = 2Y - Z + 1, Y = s, Z = t$ si ottiene $\pi : \begin{cases} x = 1 + 2s - t \\ y = s \\ z = t. \end{cases}$

4. Data una rappresentazione cartesiana $r : \begin{cases} X + 2Y + Z = 0 \\ 2X - 3Y - Z + 1 = 0 \end{cases}$ da $3X - Y + 1 = 0$ posto $y = t$ si ottiene $x = \frac{t-1}{3}, z = \frac{1-7t}{3}$ e quindi $r : \begin{cases} x = \frac{t-1}{3} \\ y = t \\ z = \frac{1-7t}{3}. \end{cases}$

6.5 Mutue posizioni di piani

Teorema 6.5.1 *Dati* $\pi : aX+bY+cZ+d = 0, \pi' : a'X+b'Y+c'Z+d' = 0$, *siano* $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} \Longrightarrow \rho(A) \geq 1$ *e:*

1. $\rho(A) = \rho(B) = 2 \iff \pi$ *e* π' *sono incidenti (in una retta) e distinti,*
2. $\rho(A) = 1, \rho(B) = 2 \iff \pi$ *e* π' *sono* $\|$ *e distinti,*
3. $\rho(A) = \rho(B) = 2 \iff \pi$ *e* π' *sono* $\|$ *e* $=$ *.*

Dim. Basta applicare il teorema di Rouché-Capelli al sistema formato dalle equazioni dei due piani.

Dati

– $\mathcal{S} := \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : (a,b,c) \neq (0,0,0)\}$,

– $\mathcal{P} := \{\pi : \pi$ è un piano dello spazio$\}$,

– $\varphi : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{P}$ definita da $\varphi(a,b,c,d) = \pi : aX + bY + cZ + d = 0$,

provare che φ è surgettiva,
determinare $\varphi^{-1}(\pi)$.

Definendo in $\mathcal{S}$ la relazione di equivalenza $(a,b,c,d) \sim (a',b',c',d')$ se $a' = \lambda a, b' = \lambda b, c' = \lambda c, d' = \lambda d$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}^*$, in virtú del Teor. 6.5.1, φ induce una c.b.u.
$$\bar{\varphi} : \mathcal{S}/\sim \longrightarrow \mathcal{P}$$
ossia, un piano individua i suoi coefficienti a meno di un fattore di proporzionalità.

6.5.1 Fasci di piani

Definizione 6.5.2 *Data una retta* r, *il* fascio di piani di centro r, *denotato* Φ_r, *è l'insieme dei piani passanti per* r.

Proposizione 6.5.3 *Se* $\pi : aX + bY + cZ + d = 0$, $\pi'' : a'X + b'Y + c'Z + d' = 0$, *sono piani distinti e incidenti in* r, $\forall\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$\lambda(aX + bY + cZ + d) + \mu(a'X + b'Y + c'Z + d') = 0$$

definisce un piano di Φ_r.

Dim. Basta osservare che vale $(\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b', \lambda c + \mu c') \neq (0, 0, 0)$ e che $\forall P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in r$ si ha $\lambda(a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z} + d) + \mu(a'\bar{x} + b'\bar{y} + c'\bar{z} + d') = 0$.

Proposizione 6.5.4 *Nelle stesse ipotesi di Prop. 6.5.3, l'applicazione*

$$\psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \Phi_r,\ (\lambda, \mu) \mapsto \pi$$

è surgettiva (dove $\pi : \lambda(aX + bY + cZ + d) + \mu(a'X + b'Y + c'Z + d') = 0$*). Inoltre, ponendo in* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\, (\lambda, \mu) \sim (\lambda', \mu')$, *se le due coppie sono proporzionali,* ψ *induce una c.bu.* $\bar{\psi} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}/\sim \longrightarrow \Phi_r$[13].

Definizione 6.5.5 *L'insieme di tutti i piani* $\parallel$ *a un piano dato è detto* fascio improprio di piani *o* fascio di piani $\parallel$.

Proposizione 6.5.6 *Data un piano* $\pi : aX + bY + cZ + d = 0$, *il fascio improprio da esso individuato può essere rappresentato da:*

$$aX + bY + cZ + t = 0,\ t \in \mathbb{R}.$$

6.6 Mutue posizioni di rette e piani

Proposizione 6.6.1 *Dati una retta* r, *con vettore direzionale* u, *e un piano* π, *con vettore direzionale* v, *si ha:*

1. $r \parallel \pi \iff u \perp v$,
2. $r \perp \pi \iff u \parallel v$,
3. $\widehat{r\pi} = |\frac{\pi}{2} - \widehat{uv}|$ *e quindi* $\sin \widehat{r\pi} = |\cos \widehat{uv}|$,
4. *se* $r \parallel \pi \Longrightarrow r \subset \pi$ *o* $r \cap \pi = \emptyset$,
5. *se* $r \not\parallel \pi \Longrightarrow \exists!$ *punto* $A \in r \cap \pi$.

[13] Ossia, fissate due equazioni di due piani $\pi, \pi' \in \Phi_r$, ogni piano di Φ_r individua i suoi coefficienti (λ, μ) a meno di un fattore di proporzionalità.

Dim. 1. e 2. sono ovvie; 3. è conseguenza della definizione e di proprietà trigonometriche elementari; 4. e 5. discendono facilmente dallo studio del sistema formato dalle equazioni di r e π.

Definizione 6.6.2 *Due rette non complanari*[14] *dello spazio sono chiamate* sghembe.

Proposizione 6.6.3 *Date due rette r, s dello spazio e quattro punti $A \neq B \in r, C \neq D \in s$, r e s sono complanari $\iff A, B, C, D$ sono tali.*

Dim. Condizione necessaria e sufficiente affinché un piano contenga una retta è che contenga due suoi punti distinti.

6.7 Punti e luoghi notevoli

6.7.1 Punto medio di un segnemto

Definizione 6.7.1 *Il* punto medio di un segmento di estremi *A e B è il punto M (della retta congiungente A e B) tale che*

$$B - M = M - A. \tag{6.18}$$

Nel piano, se $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), M(x_M, y_M)$ da (6.18) si ricava

$$\begin{cases} b_1 - x_M = x_M - a_1 \\ b_2 - y_M = y_M - a_2 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad (x_M, y_M) = (\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2});$$

analogamente, nello spazio, se $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3), M(x_M, y_M, z_M)$ da (6.18) si ricava

$$(x_M, y_M, z_M) = (\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}).$$

6.7.2 Proiezioni ortogonali

Definizione 6.7.2 *1. Nel piano, la* proiezione ortogonale di un punto A su una retta r *è $P_A \in r \cap s_A$ con s_A retta $\perp$ a r passante per A*;

2. *nello spazio, la* proiezione ortogonale di un punto A su una retta r *è $P_A \in r \cap \pi_A$ con π_A piano $\perp$ a r passante per A;*

3. *la* proiezione ortogonale di un punto A su un piano π *è $P_A \in \pi \cap r_A$ con r_A retta $\perp$ a π passante per A;*

4. *se una retta r non è $\perp$ a un piano π, la* proiezione ortogonale di r su π *è la retta $s = \pi \cap \pi_r$ con π_r piano per $r, \pi_r \perp \pi$;*

[14] Siccome tre punti non allineati dello spazio individuano un unico piano, due rette dello spazio sono complanari se sono $\|$, incidenti o coincidenti.

5. *il* simmetrico di un punto A rispetto a un punto Q *è il punto* A', *della retta congiungente* A *e* Q, *tale che* $A' - Q = Q - A$[15];

6. *il* simmetrico di un punto A rispetto a una retta r *è il punto* A', *tale che la proiezione ortogonale* $P_A \in r$ *soddisfi* $A' - P_A = P_A - A$[16];

7. *il* simmetrico di un punto A rispetto a un piano π *è il punto* A', *tale che la proiezione ortogonale* $P_A \in \pi$ *soddisfi* $A' - P_A = P_A - A$[17].

Esempio 6.7.3 *a*) Per trovare la proiezione ortogonale della retta $r : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ sul piano $\alpha : z = 0$ basta scegliere il $\pi \in \Phi_r$ che ha vettore direzionale ortogonale a $(0, 0, 1)$, ora Φ_r è il luogo dei piani $\pi_{\lambda,\mu}$ di equazione $\lambda Y + \mu(Z - 1) = 0$, ossia con vettore direzionale $(0, \lambda, \mu)$, per cui la condizione è $(0, \lambda, \mu).(0, 0, 1) = \mu = 0$ e l'equazione del piano cercato è $Y = 0$, pertanto la proiezione ortogonale di r su α è $s : \begin{cases} Y = 0 \\ Z = 0. \end{cases}$
b) Per trovare il simmetrico del piano $\pi : X - 2Y + 1 = 0$ rispetto al piano $\pi' : 2X - Z = 0$, basta osservare che il punto generico di π è $P_{s,t}(2t - 1, t, s)$, la retta $\perp$ a π' per $P_{s,t}$ è $r : \begin{cases} x = 2t - 1 + 2\alpha \\ y = t \\ z = s - \alpha \end{cases} \Longrightarrow r \cap \pi'$ è ottenuto ponendo $2(2t - 1 + 2\alpha) - (s - \alpha) = 0$ ossia $\alpha = \frac{s-4t+2}{5}$ da cui $x = \frac{10t-5+2s-8t+4}{5}, y = t, z = \frac{5s-s+4t-2}{5}$ $\therefore$ $x = \frac{2t+2s-1}{5}, y = t, z = \frac{4t+4s-2}{5}$, infine dall'uguaglianza $(\frac{x+2t-1}{2}, \frac{y+t}{2}, \frac{z+s}{2}) = (\frac{2t+2s-1}{5}, t, \frac{4t+4s-2}{5})$ si ottiene $5X + 10Y - 5 = 4Y + 4s - 2$ e $5Z + 5s = 8Y + 8s - 4$, da cui $\frac{5X+6Y-3}{4} = s = \frac{5Z-8Y+4}{3}$ e quindi $3X + 10Y - 4Z - 5 = 0$.

6.7.3 Comune $\perp$ a due rette sghembe

Proposizione 6.7.4 *Date due rette sghembe* s *e* s'[18] $\exists!$ *retta incidente e* $\perp$ *a entrambe, denotata* $r^{\perp}_{s,s'}$.

Dim. Siccome $s \nparallel s'$ anche $v_s \nparallel v_{s'} \Longrightarrow u := v_s \times v_{s'}$ è $\perp$ a entrambi $\Longrightarrow$ il piano contenente s e $\parallel u$ e il piano contenente s' e $\parallel u$ si intersecano in una retta r ortogonale sia a s che a s', ossia $r = r^{\perp}_{s,s'}$.

Osservazione 6.7.5 La retta $r^{\perp}_{s,s'}$ può essere anche individuato imponenedo alla retta congiungente un punto di s con uno di s', di essere $\perp$ a entrambe.

Esempio 6.7.6 Date $r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ e $s : \begin{cases} X - Y = 0 \\ X - Z + 1 = 0 \end{cases}$, provare che r e s sono sghembe e determinare la $\perp$ comune.

[15] Ossia, Q sia il punto medio del segmento di estremi A e A'.
[16] Ossia, P_A sia il punto medio del segmento di estremi A e A'.
[17] Ossia, P_A sia il punto medio del segmento di estremi A e A'.
[18] Ossia non complanari!

Scelti $A(0,1,1), B(1,0,3) \in r, C(-1,-1,0), D(0,0,1 \in s)$ si ha

$$(B-A).(C-A)\times(D-A)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Usiamo i due metodi delineati sopra:

- essendo $v_r = (1,-1,2), v_s = (1,1,1) \Longrightarrow$ un vettore direzionale della $\perp$ comune è $u = (1,-1,2)\times(1,1,1) = (-3,1,2)$ e il piano contenente r e $\parallel (-3,1,2)$ è $\pi : (t-3s, 1-t+s, 1+2t+2s), (t,s) \in \mathbb{R}^2$, ossia $\pi : 2X+4Y+Z-5=0$, il piano contenente s e $\parallel (-3,1,2)$ è $\pi' : (\tau-3s, \tau+s, \tau+2s+1), (\tau, s) \in \mathbb{R}^2$, ossia $\pi' : X-5Y+4Z-4=0$ pertanto $r^{\perp}_{s,s'} : \begin{cases} 2X+4Y+Z-5=0 \\ X-5Y+4Z-4=0 \end{cases}.$

- La generica retta incidente sia r che s ha equazioni:

$$\rho : \frac{x-t}{\tau-t} = \frac{y-1+t}{\tau-1+t} = \frac{z-1-2t}{\tau+1-1-2t} \quad \text{e}$$

  $\rho \perp r$ dà: $\tau - t - \tau + 1 - t + 2\tau - 4t = 0 \Longrightarrow \ldots,$

  $\rho \perp s$ dà: $\tau - t + \tau - 1 + t + \tau - 2t = 0 \Longrightarrow \ldots,$

  che dànno $r^{\perp}_{s,s'} : \begin{cases} 14X+21Z-41=0 \\ 14X+42Y-32=0 \end{cases},$

  come si verifica se le 'due' soluzioni sono compatibili?.

6.7.4 Distanze

Definizione 6.7.7 *1. La* distanza tra due punti *A e B è la lunghezza del segmento di estremi A e B*[19].

2. La distanza di un punto P da una retta r *è la distanza di P dalla sua proiezione ortogonale su r.*

3. La distanza di un punto P da un piano π *è la distanza di P dalla sua proiezione ortogonale su π.*

4. La distanza tra due rette sghembe *è la distanza tra i due punti intersezioni delle due rette con la comune $\perp$.*

Osservazione 6.7.8 1. Dati su una retta r due punti $A \neq B \Longrightarrow$

$$d(P,r) = \frac{|(P-A)\times(B-A)|}{|B-A|},$$

[19]Ossia, il modulo del vettore applicato $B-A$ o $A-B$.

se $A \in r$ e $C - A \perp r \Longrightarrow$

$$d(P, r) = \frac{|(P - A) \times (C - A)|}{|C - A|},$$

se $r : aX + bY + c = 0$ è una retta del piano e $P(x_0, y_0)$, essendo $(a, b) \perp r \Longrightarrow$

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2. Dati $A \in \pi$ e $C - A \perp \pi \Longrightarrow$

$$d(P, \pi) = \frac{|(P - A).(C - A)|}{|C - A|},$$

se $aX + bY + cZ + d = 0$ e $P(x_0, y_0, z_0)$, essendo $(a, b, c) \perp \pi \Longrightarrow$

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

3. Date due rette sghembe r e s, $d(r, s)$ è la distanza di un qualunque $P \in r$ dal piano per $s \parallel r$;

   un altro modo consiste nel dare $A \in r, B \in s, u$ vettore direzionale di r e v vettore direzionale di $s \Longrightarrow$

$$d(r, s) = \frac{|(A - B).u \times v|}{|u \times v|}.$$

6.7.5 Asse di un segmento

Definizione 6.7.9 *L'* asse di un segmento di estremi *A e B*[20] *è il luogo dei punti P equidistanti da A e B*[21].

Esempio 6.7.10 *L'asse del segmento di estremi $A(1, 0, 0)$ e $B(0, 1, 1)$ è il piano π luogo dei punti $P(x, y, z)$ tali che $d(P, A) = d(P, B)$ ossia tali che* $(X - 1)^2 + Y^2 + Z^2 = X^2 + (Y - 1)^2 + (Z - 1)^2 \therefore -2X + 1 = -2Y + 1 - 2Z + 1 \therefore \pi : 2X - 2Y - 2Z + 1 = 0$.

Definizione 6.7.11 *Date nel piano due rette $r \neq s$ incidenti, il luogo dei punti equidistanti da esse è una coppia di rette tra loro $\perp$, dette* rette bisettrici degli angoli individuati da *r e s.*

[20] Con A e B punti del piano o dello spazio.

[21] Siccome l'equazione

$$d(P, A) = d(P, B)$$

è lineare, si tratta di una retta del piano e di un piano dello spazio.

6.8 Circonferenze

Definizione 6.8.1 1. *Dati un punto C di un piano π e $\rho \in \mathbb{R}_+$, la* circonferenza di centro C e raggio ρ *è il luogo (denotato $\gamma(C, \rho)$) dei $P \in \pi$ tali che*

$$d(P, C) = \rho;$$

2. *Dati un punto C dello spazio e $\rho \in \mathbb{R}_+$, la* sfera di centro C e raggio ρ *è il luogo (denotato $\varsigma(C, \rho)$) dei $P \in \pi$ tali che*

$$d(P, C) = \rho.$$

Osservazione 6.8.2 1. Se $C(\alpha, \beta) \Longrightarrow \gamma(C, \rho)$ ha equazione:

$$(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 = \rho^2,$$

2. Se $C(\alpha, \beta, \gamma) \Longrightarrow \varsigma(C, \rho)$ ha equazione:

$$(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 + (Z - \gamma)^2 = \rho^2,$$

svolgendo i calcoli si ottiene rispettivamente:
$X^2 + Y^2 - 2\alpha X - 2\beta Y + \alpha^2 + \beta^2 - \rho^2 = 0,$
$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2\alpha X - 2\beta Y - 2\gamma Z + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \rho^2 = 0.$

Consideriamo ora il luogo dei punti del piano e dello spazio le cui coordinate soddisfano:

$$X^2 + Y^2 + aX + bY + c = 0, \tag{6.19}$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + aX + bY + cZ + d = 0, \tag{6.20}$$

completando i quadrati si ottiene:
$(X + \frac{a}{2})^2 + (Y + \frac{b}{2})^2 + c - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} = 0,$
$(X + \frac{a}{2})^2 + (Y + \frac{b}{2})^2 + (Z + \frac{c}{2})^2 + d - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{4} = 0,$
da cui, ponendo $\sigma = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$, e $\tilde{\sigma} = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d$, si ottiene:

$$(X + \frac{a}{2})^2 + (Y + \frac{b}{2})^2 = \sigma, \tag{6.21}$$

$$(X + \frac{a}{2})^2 + (Y + \frac{b}{2})^2 + (Z + \frac{c}{2})^2 = \tilde{\sigma}. \tag{6.22}$$

Ponendo inoltre: $C(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ e $\tilde{C}(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2})$, si ha che:

se $\sigma > 0$ (risp. $\tilde{\sigma} > 0$), (6.21) (risp. (6.22)) rappresenta la circonferenza (risp. la sfera) di centro C (risp. $\tilde{C}$) e raggio σ (risp. $\tilde{\sigma}$,)

se $\sigma = 0$ (risp. $\tilde{\sigma} = 0$), (6.21) (risp. (6.22)) rappresenta il punto C (risp. $\tilde{C}$),

se $\sigma < 0$ (risp. $\tilde{\sigma} < 0$), (6.21) (risp. (6.22)) rappresenta l'insieme $\emptyset$.

3. Date nel piano una retta r e una circonferenza $\gamma = \gamma(C, \rho)$:

   – r è *esterna a* γ se $d(C, r) > \rho \therefore \gamma \cap r = \emptyset$,

   – r è *tangente a* γ se $d(C, r) = \rho \therefore \gamma \cap r$ consiste in un singolo punto,

   – r è *secante a* γ se $d(C, r) < \rho \therefore \gamma \cap r$ consiste in due punti distinti.

4. Dati nello spazio un piano π e una sfera $\varsigma = \varsigma(\tilde{C}, \tilde{\rho})$:

   – π è *esterno a* ς se $d(\tilde{C}, \pi) > \tilde{\rho} \therefore \varsigma \cap \pi = \emptyset$,

   – π è *tangente a* ς se $d(\tilde{C}, \pi) = \tilde{\rho} \therefore \varsigma \cap \pi$ consiste in un singolo punto,

   – r è *secante a* ς se $d(\tilde{C}, \pi) < \tilde{\rho} \therefore \varsigma \cap \pi$ consiste in una circonferenza.

5. Nel piano r è tangente a $\gamma(C, \rho)$ in un punto P se $P \in \gamma \cap r \cap r_{CP}$ con $r \perp r_{CP}$.

6. Nello spazio π è tangente a $\varsigma(\tilde{C}, \tilde{\rho})$ in un punto P se $P \in \varsigma \cap \pi \cap r_{CP}$ con $\pi \perp r_{CP}$.

Esempio 6.8.3 1. Scrivere la circonferenza γ passante per i punti $A(1, 1)$, $B(1, 3)$ e $C(3, 1)$.

Imponendo che i tre punti soddisfino (6.19) otteniamo:

$1 + 1 + a + b + c = 0,$

$1 + 9 + a + 3b + c = 0,$

$9 + 1 + 3a + b + c = 0$

da cui $2a - 2b = 0$, $2 + 2a + c = 0$ e $10 + 3a + a - 2 - 2a = 0$

$\therefore a = -4, b = -4, c = 6$ e quindi $\gamma : \ X^2 + Y^2 - 4X - 4Y + 6 = 0.$

2. Provare che $\gamma : \begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 - 2X - 4Y - 4 = 0 \\ 3X - 4Y + 15 = 0 \end{cases}$, è una circonferenza.

Completando i quadrati della prima equazione si ottiene:

$(X - 1)^2 + (Y - 2)^2 + Z^2 = 9$ ossia $\varsigma((1, 2, 0), 3)$,

posto $\pi : \ 3X - 4y + 15 = 0$, si ha $d(\pi, (1, 2, 0)) = \frac{|3-8+15|}{\sqrt{25}} = 2 < 3$ $\therefore \gamma$ è una circonferenza e π è secante ς.

6.9 Curve e Superficie

Rette e circonferenze sono esempi di *curve*, piani e superficie sferiche sono esempi di *superficie*. Considerando i concetti di curva e di superficie come intuitivi, accenneremo alla loro rappresentazione analitica, in particolare considereremo coni, cilindri e superficie di rotazione, per studiare problemi di intersezione e di proiezione.

Notazione 6.9.1 *1.* I punti descritti da equazioni

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in I^{22} \tag{6.23}$$

costituiscono

(sotto opportune ipotesi di regolarità per le funzioni $x(t), y(t), z(t)$), *una curva* $\mathcal{C}$ dello spazio e sono dette *equazioni parametriche di* $\mathcal{C}$. Si scrive anche:

$$\mathcal{C} : \ (x(t), y(t), z(t)), \ t \in I \subseteq \mathbb{R}.$$

Nel piano la rappresentazione parametrica di una curva $\mathcal{C}$ è $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, oppure $\mathcal{C} : \ (x(t), y(t)), \ t \in I \subseteq \mathbb{R}$.

2. I punti descritti da equazioni

$$\begin{cases} x = x(t,u) \\ y = y(t,u) \\ z = z(t,u) \end{cases}, \ (t,u) \in D^{23} \tag{6.24}$$

costituiscono (sotto opportune ipotesi di regolarità per le funzioni $x(t,u), y(t,u), z(t,u)$), una *superficie* $\mathcal{S}$.

Indicata anche $\mathcal{S} : \ (x = x(t,u), y(t,u), z(t,u)), \ (t,u) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$.

3. Le linee ottenute ponendo $t =$ *costante* oppure $u =$ *costante* sono dette *linee coordinate della superficie* $\mathcal{S}$.

4. L'insieme dei punti $P(x, y, z)$ dello spazio soddisfacenti un'equazione:

$$f(X, Y, Z) = 0^{24} \tag{6.25}$$

'costituisce' una *superficie.*

[22] I un intervallo di $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}$ stesso.
[23] D un 'dominio' di $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^2$ stesso.
[24] Sotto opportune condizioni di regolarità per la funzione $f(X, Y, Z)$.

5. L'intersezione di due superficie, ossia l'insieme dei punti $P(x, y, z)$ dello spazio soddisfacenti un sistema di equazioni:

$$\begin{cases} f(X, Y, Z) = 0 \\ g(X, Y, Z) = 0 \end{cases} \tag{6.26}$$

'costituisce' una *curva dello spazio.*

Di solito è possibile passare da una rappresentazione parametrica, di una curva o una superficie, a una cartesiana *(anche se non sempre in modo elementare)* eliminando il parametro o i parametri. Di solito è invece piú complicato *(se non impossibile)* passare da rappresentazioni cartesiane a parametriche.

Osservazione 6.9.2 Se $\mathcal{C} : (x(t), y(t), z(t)),\ t \in I \subseteq \mathbb{R}$ è una curva e $\mathcal{S} : f(X, Y, Z) = 0$ è una superficie, si ha:

$$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S} \iff \text{vale } f(x(t), y(t), z(t)) = 0, \forall\ t \in I.$$

Definizione 6.9.3 *Una curva $\mathcal{C}$ dello spazio è* piana *se $\exists$ un piano che la contiene, altrimenti $\mathcal{C}$ è* gobba.

Osservazione 6.9.4 1. $\mathcal{C} : (x(t), y(t), z(t)),\ t \in I \subseteq \mathbb{R}$ è piana $\iff$ $\exists a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $(a, b, c) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ tali che

$$ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0\, \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

2. Per verificare se una curva $\mathcal{C}$ è piana si può anche procedere come segue:
   - si prendono tre punti $A, B, C \in \mathcal{C}$ non allineati,
   - si scrive il piano π da essi individuato,
   - si verifica se $\mathcal{C}$ è contenuta in π.

3. Rette e circonferenze sono curve piane.

Esempio 6.9.5 1. La curva $\mathcal{C} : (t^2 + 1, t^3 - t, 2t^2 + t - 1),\ t \in \mathbb{R}$ non è piana infatti:

$a(t^2 + 1) + b(t^3 - t) + (2t^2 + t - 1) + d = 0\ \forall t \in \mathbb{R}$

dà $bt^3 + (a + 2c)t^2 + (-b + c)t + a - c + d = 0\ \forall t \in \mathbb{R}$, ossia

$$\begin{cases} b = 0 \\ a + 2c = 0 \\ -b + c = 0 \\ a - c + d = 0 \end{cases} \iff a = b = c = d = 0$$

2. La curva $\mathcal{C}:\ (t^2+t^3, t^3-1, t^2+3),\ t\in\mathbb{R}$ è piana infatti:

   $a(t^2+t^3)+b(t^3-1)+(t^2+3)+d=0\ \forall t\in\mathbb{R}$ dà:

   $(a+b)t^3+(a+c)t^2-b+3c+d=0\ \forall t\in\mathbb{R}$, ossia $\begin{cases} a+b=0 \\ a+c=0 \\ b-3c-d=0 \end{cases} \iff$

   $a=-b, a=-c, 2a=d \implies \pi:\ X-Y-Z+2=0$ è il piano della curva.

Definizione 6.9.6 *Una* superficie rigata *è una superficie* $\mathcal{S}$ *tale che*

$$\forall\, P\in\mathcal{S}\quad \textit{passa una retta } r_P\subset\mathcal{S},$$

una superficie doppiamente rigata *è una superficie* $\mathcal{S}$ *tale che*

$$\forall\, P\in\mathcal{S}\quad \textit{passano due rette } r_P, s_P\subset\mathcal{S}.$$

Osservazione 6.9.7 Una superficie $\mathcal{S}$ che ha una rappresentazione parametrica del tipo:

$$\begin{cases} x=\xi(t)+u\alpha(t) \\ y=\eta(t)+u\beta(t) \\ z=\zeta(t)+u\gamma(t) \end{cases} \tag{6.27}$$

è una rigata, infatti, $\forall\,\bar{t}\in\mathbb{R}$, (6.27) rappresenta una retta $r_{\bar{t}}$ che sta sulla superficie $\mathcal{S}$, se $P\in\mathcal{S}$ corrisponde ai valori $\bar{t},\bar{u}$ dei parametri $\implies r_{\bar{t}}$ è la retta per P contenuta in $\mathcal{S}$.

Esempio 6.9.8 Provare che $\mathcal{S}:\ (t+u, t^2, tu)$ è una superficie rigata e trovarne un'equazione cartesiana.

Chiaramente $\mathcal{S}$ è della forma (6.27). Eliminando i parametri si ottiene: $(Z+Y)^2=X^2Y$.

6.10 Cilindri

Definizione 6.10.1 *Un* cilindro *è una superficie luogo di rette* $\parallel$ *a un vettore fissato, dette* generatrici*, una* direttrice *del cilindro è una curva giacente sul cilindro e intersecante tutte le generatrici.*

Osservazione 6.10.2 1. Data $\mathcal{C}:\ (x(t), y(t), z(t))\ t\in I\subseteq\mathbb{R}$, una rappresentazione parametrica del cilindro che ha $\mathcal{C}$ come direttrice e generatrici $\parallel$ al vettore (l,m,n) è

$$\begin{cases} x=x(t)+lu \\ y=y(t)+mu\ , \\ z=z(t)+nu \end{cases} \tag{6.28}$$

in (6.28) t =costante rappresenta una generatrice, mentre u =costante rappresenta una direttrice.

2. Sotto opportune ipotesi di regolarità un'equazione $f(X, Y) = 0$ nello spazio rappresenta un cilindro con generatrici $\|$ all'asse z[25].

   Infatti, se $P_0(x_0, y_0, z_0)$ è tale che $f(x_0, y_0) = 0$, si ha chiaramente che $\forall\, P \in r:\ (x_0, y_0, z_0 + t),\ t \in \mathbb{R}$ giace su $f(X, Y) = 0$.

   Piú in generale, se $u = (a, b, c), u' = (a', b', c')$ con $u \nparallel u'$, di solito

$$f(aX + bY + cZ, a'X + b'Y + c'Z) = 0$$

   è la rappresentazione di un cilindro con generatrici $\|$ al vettore $v = u \times u'$.

Esempio 6.10.3 1. L'equazione $e^{X+Y} = 1$ rappresenta lo stesso piano che $X + Y = 0$.

2. L'equazione $X^2 + Y^2 = -1$ rappresenta l'insieme $\emptyset$, se X, Y possono assumere solo valori reali; una circonferenza (del piano complesso[26]), se invece X, Y possono assumere valori complessi.

6.10.1 Proiezione di una curva lungo una direzione

Dati una curva $\mathcal{C}$, un piano π e un vettore $v \nparallel \pi$, la *proiezione di* $\mathcal{C}$ *su* π *lungo la direzione di* v[27] è la curva intersezione tra π e il cilindro $\mathcal{S}$ avente $\mathcal{C}$ come direttrice e come generatrici rette $r \parallel v$.

Osservazione 6.10.4 Se $\mathcal{C}\ :\ \begin{cases} f(X, Y, Z) = 0 \\ g(X, Y, Z) = 0 \end{cases}$, una rappresentazione cartesiana del cilindro che proietta $\mathcal{C}$ ortogonalmente al piano xy può essere ottenuta eliminando Z dalle due equazioni.

Esempio 6.10.5 Verificare che la proiezione ortogonale sul piano xy della curva $\mathcal{C} : \begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 = 0 \\ X^2 - Z^2 - 2Y + 1 = 0 \end{cases}$ è $\mathcal{C}' : \begin{cases} 2X^2 + Y^2 - 2Y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

6.11 Coni

Definizione 6.11.1 *Dicesi* cono *una superficie luogo di rette (* generatrici del cono*) che passano tutte per uno stesso punto* V *(*vertice del cono*) e incontrano tutte (ciascuna in un sol punto) una curva una* $\mathcal{C}$ *(*direttrice del cono*).*

[25] Analogamente $f(X, Z) = 0$ rappresenta un cilindro con generatrici $\|$ all'asse y ed $f(Y, Z) = 0$ rappresenta un cilindro con generatrici $\|$ all'asse x.

[26] Ossia l'insieme dei $P(z, w)$, $z, w \in \mathbb{C}$, da non confondere con il piano di Argand-Gauss che costituisce un 'modello' della retta complessa.

[27] Se $v \perp \pi$ ritroviamo la proiezione ortogonale.

Osservazione 6.11.2 Dati una curva $\mathcal{C}: (x(t), y(t), z(t))\ t \in I \subseteq \mathbb{R}$, e un punto $V(x_0, y_0, z_0)$, una rappresentazione parametrica del cono, di direttrice $\mathcal{C}$ e vertice V, è

$$\begin{cases} x = x_0 + (x(t) - x_0)u \\ y = y_0 + (y(t) - y_0)u \\ z = z_0 + (z(t) - z_0)u \end{cases}, \tag{6.29}$$

in (6.29) t =costante rappresenta una generatrice, mentre u =costante rappresenta una direttrice.

Notazione 6.11.3 Una funzione $f(X, Y, Z)$ è detta *omogenea di grado* $d \in \mathbb{N}^*$ se $\forall\, t \in \mathbb{R}$ si ha:

$$f(tX, tY, tZ) = t^d f(X, Y, Z), \tag{6.30}$$

n.b. Una funzione polinomiale è omogenea se e solo se tutti i monomi del polinomio sono omogenei dello stesso grado.

Osservazione 6.11.4

1. Un'equazione $f(X, Y, Z) = 0$, con $f(X, Y, Z)$ funzione omogenea, è in generale la rappresentazione cartesiana di un cono con vertice $O(0, 0, 0)$.

   Discende infatti da (6.30) che se $f(X, Y, Z)$ è omogenea e $\tilde{P}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ soddisfa $f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = 0$, allora $\forall\, P_t \in r : (t\tilde{x}, t\tilde{y}, t\tilde{z})$, risulta $f(P_t) = 0$.

2. Se f è una funzione omogenea nelle variabili $(X-x_0, Y-y_0, Z-z_0)$ per qualche $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \Longrightarrow$ l'equazione $f(X-x_0, Y-y_0, Z-z_0) = 0$ rappresenta un cono di vertice $V(x_0, y_0, z_0)$.

Definizione 6.11.5 *Dati una curva $\mathcal{C}: (x(t), y(t), z(t)),\ t \in I \subseteq \mathbb{R}$, e un punto $P \notin \mathcal{C}$, l'intersezione fra il cono $\mathcal{S}$ di vertice P e direttrice $\mathcal{C}$ con un piano $\pi : aX + bY + cZ + d = 0$, non contenente $\mathcal{C}$ è detta* proiezione di $\mathcal{C}$ da P su π.

6.12 Superficie di rotazione

Definizione 6.12.1 *Data una retta r, si dice* superficie di rotazione di asse r *ogni superficie luogo di circonfernze aventi centro su r e giacenti ciascuna su un piano $\perp$ a r.*

Osservazione 6.12.2 Se $\mathcal{C}: (x(t), y(t), z(t)),\ t \in I \subseteq \mathbb{R}$, le circonferenze della superficie ottenuta facendo ruotare $\mathcal{C}$ attorno a una retta r possono essere determinate intersecando, $\forall\, P_t \in \mathcal{C}$, il piano π_{rt}, passante per P_t e $\perp$ a r, con la sfera Σ_{rt}, di centro un punto $C \in r$ e raggio $\rho = d(C, P_t)$.

Esempio 6.12.3 Trovare un'equazione cartesiana della superficie ottenuta dalla rotazione di $\mathcal{C}: (t, t^2, t - t^2)\ t \in \mathbb{R}$ attorno alla retta $r : X = Y = Z$.

Si ha $v_r = (1, 1, 1), \pi_{rt} : X+Y+Z = t+t^2+t-t^2 \therefore \pi_{rt} : X+Y+Z = 2t$, inoltre, posto $C = O(0, 0, 0)$, si ha

$d(C, P_t) = \sqrt{t^2 + t^4 + t^2 + t^4 - 2t^3} = \sqrt{2t^2(t^2 - t + 1)}$ e quindi

$\varsigma_{rt} : X^2 + Y^2 + Z^2 = 2t^2(t^2 - t + 1)$ da cui, eliminando il parametro t, $\varsigma_{rt} : 8(X^2+Y^2+Z^2) = (X+Y+Z)^2[(X+Y+Z)^2 - 2(X+Y+Z)+4]$.

6.13 Coordinate polari nel piano

Definizione 6.13.1 *Fissata nel piano una semiretta orientata* (asse polare) ℓ, *di origine* O (polo), *per ogni* $P \neq O$ *è individuata una coppia di numeri reali*

$\rho = d(P, O)$,

ϑ *angolo del* raggio vettore OP *con* ℓ (anomalia*)*

(ρ, ϑ) *sono dette* coordinate polari di P.

Proposizione 6.13.2 *A ogni sistema di coordinate polari si associa in modo canonico un sistema di coordinate cartesiane orientato positivamente e viceversa.*

Dim. A un sistema di coordinate polari (O, ℓ) si associa il sistema di coordinate cartesiane ortogonali $\sigma(O; x, y)$ che ha come asse x la retta contenente ℓ, orientata come ℓ, e come asse y la retta $\perp$ a x passante per O.
Viceversa, a un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $\sigma(O; x, y)$ si associa il sistema di coordinate polari (O, ℓ) che ha la semiretta positiva dell'asse x, come asse polare ℓ, e l'origine O di $\sigma(O; x, y)$, come polo O .

Osservazione 6.13.3 Le *formule di passaggio da coordinate polari a coordinate cartesiane* sono:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$$

mentre quelle da *coordinate cartesiane a coordinate polari* sono:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \vartheta = \arctan\frac{x}{y} \end{cases} .$$

6.14 Coordinate cilindriche e polari nello spazio

Definizione 6.14.1 *Fissato nello spazio un sistema di coordinate cartesiane ortogonali* $\sigma(O; x, y, z)$, *per ogni* $P \neq O$, *posto* $\rho = d(P, O)$, *e* ϑ *l'angolo che la proiezione del* raggio vettore OP *sul piano* xy *forma con l'asse* x *le* coordinate cilindriche *di* P *sono:*

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \\ z = z \end{cases} .$$

Definizione 6.14.2 *Fissato nello spazio un sistema di coordinate cartesiane ortogonali* $\sigma(O; x, y, z)$, *per ogni* $P \neq O$, *posto* $\rho = d(P, O)$, φ *l'angolo che la proiezione del* raggio vettore OP *sul piano* xy *forma con l'asse* x *e* ϑ *l'angolo che il raggio vettore* OP *forma con l'asse* z *le* coordinate polari *di* P *sono:*

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \sin \vartheta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = \rho \cos \vartheta \end{cases} .$$

Chapter 7

Spazi Vettoriali

Siano $\emptyset \neq V$ un insieme, $\mathbf{k}$ un corpo commutativo, V un $\mathbf{k}$-spazio vettoriale, ossia un insieme dotato di un'operazione interna, detta *addizione,* e un'operazione esterna, detta *moltiplicazione per scalari,* legate dagli assiomi $SV1 \div SV8$ di Def. 4.2.1.

7.1 Esempi

Abbiamo già osservato che sono $\mathbf{k}$-spazi vettoriali:

$\mathbf{k}^n$,

$M_{m,n}(\mathbf{k})$,

l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo,

l'insieme dei vettori geometrici del piano o dello spazio,

l'anello $P_n := \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ dei polinomi nelle variabili $X_1, \ldots, X_n$,

l'insieme $P_n^{[m]}$ dei polinomi di grado $\leq m$ (di P_n) unito il polinomio nullo 0,

in particolare, $\mathbb{C}^n$ è sia $\mathbb{C}$-spazio vettoriale, che $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, che $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale.

Esempio 7.1.1 L'insieme $\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale rispetto alle operazioni:
$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$
$(\lambda f)(x) := \lambda f(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}),$
come pure i seguenti sottinsiemi di $\mathcal{C}(\mathbb{R})$:

$\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, l'insieme delle funzioni reali continue,

$\mathcal{C}^i(\mathbb{R})$, l'insieme delle funzioni reali derivabili con derivata continua fino all'ordine i,

$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, l'insieme delle funzioni reali derivabili di ogni ordine[1].

Proposizione 7.1.2 *Se V è un $\mathbf{k}$-spazio vettoriale, 0_V è l'identità additiva di V e $0_\mathbf{k}$ è l'identità additiva di $\mathbf{k}$, si ha:*

1. $\forall\, u \in V, \quad 0_\mathbf{k} u = 0_V,$
2. $\forall\, \lambda \in \mathbf{k}, \quad \lambda 0_V = 0_V,$
3. $\forall\, u \in V, \quad (-1_\mathbf{k})u = -u,$
4. *se* $u \in V, \lambda \in \mathbf{k}$ *soddisfano* $\lambda u = 0_V$, *allora* $\lambda = 0_\mathbf{k}$ *oppure* $u = 0_V$.

Dim. 1. Essendo $0_\mathbf{k} + 0_\mathbf{k} = 0_\mathbf{k}$, per $SV6$ si ha:

$$0_\mathbf{k} u + 0_\mathbf{k} u = (0_\mathbf{k} + 0_\mathbf{k})u = 0_\mathbf{k} u \Longrightarrow 0_\mathbf{k} u = 0_V;$$

2. si prova in modo simile a 1. essendo infatti $0_V + 0_V = 0_V$, per $SV7$ si ha:

$$\lambda 0_V + \lambda 0_V = \lambda(0_V + 0_V) = \lambda 0_V \Longrightarrow \lambda 0_V = 0_V;$$

3. basta osservare che $0_V = 0_\mathbf{k} u = (-1_\mathbf{k} + 1_\mathbf{k})u = (-1_\mathbf{k})u + 1_\mathbf{k} u$; 4. basta osservare che $\lambda \neq 0_\mathbf{k} \Longrightarrow 0_V = \lambda^{-1}(\lambda u) = (\lambda^{-1}\lambda)u = 1_\mathbf{k} u = u$.

7.2 Sottospazi

Definizione 7.2.1 *Un sottinsieme $\emptyset \neq W \subset V$, con V $\mathbf{k}$-spazio vettoriale, è detto* sottospazio vettoriale di V *se è spazio vettoriale rispetto alle leggi di composizione di V.*

Proposizione 7.2.2 *Dato un $\mathbf{k}$-spazio vettoriale V, $\forall\, W \subset V$ sono condizioni equivalenti:*

1. *W è sottospazio di V,*
2. $\forall\, v_1, v_2 \in W \Longrightarrow v_1 + v_2 \in W$ *e* $\forall\, v \in W, \lambda \in \mathbf{k} \Longrightarrow \lambda v \in W,$
3. $\forall\, v_1, v_2 \in W, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{k} \Longrightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in W.$

Dim. L'implicazione 1. $\Longrightarrow$ 2. è ovvia; per quanto riguarda 2. $\Longrightarrow$ 3., da $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2 \in W$ per 2. si ha: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in W$; per quanto riguarda 3. $\Longrightarrow$ 2., la prima condizione di 2. è 3. con $\lambda_1 = \lambda_2 = 1_\mathbf{k}$, la seconda condizione di 2. è 3. con $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = 0_\mathbf{k}$; per quanto riguarda 2. $\Longrightarrow$ 1., la prima condizione di 2. dice che W è chiuso rispetto all'addizione di V mentre la seconda condizione di 2. dice che W è chiuso rispetto alla moltiplicazione esterna di V, gli assiomi $SV1 \div SV8$ di Def. 4.2.1 valgono quindi automaticamente.

[1] Lo stesso vale per $\mathcal{C}(I), \mathcal{C}^0(I), \mathcal{C}^i(I), \mathcal{C}^\infty(I)$, $\forall\, I \subset \mathbb{R}$ intervallo (I aperto per $\mathcal{C}^i(I), \mathcal{C}^\infty(I)$).

Esempio 7.2.3 1. $T_n^s(\mathbf{k}) := \{A \in M_n(\mathbf{k}) : T$ è triangolare superiore$\}$ è un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbf{k})$, infatti, date $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$, con $a_{ij} = b_{ij} = 0 \ \forall j > i$, valgono sia $a_{ij} + b_{ij} = 0 \ \forall j > i$ che $\lambda a_{ij} = 0 \ \forall j > i \ \therefore A + B, \lambda A \in T_n^s$.

2. $D_n^0(\mathbf{k}) := \{A \in M_n(\mathbf{k}) : d(A) = 0\}$ non è un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbf{k})$, si ha infatti $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in D_n^0$ ma $A + B = I_2 \notin D_n^0$.

3. Mentre l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è un sottospazio di $\mathbf{k}^n$, l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare qualsiasi non è un sottospazio di $\mathbf{k}^n$.

4. $I := \{z \in \mathbb{C} : Re(z) = 0\} = \{z = a + ib : \ a = 0\}$ non è sotto-$\mathbb{C}$-spazio vettoriale di $\mathbb{C}$, piú precisamente I è chiuso solo rispetto all'addizione mentre $z = i \in I, \lambda = i \in \mathbb{C}$ dànno $i^2 = -1 \notin I$; per contro, I è sotto-$\mathbb{R}$-spazio vettoriale di $\mathbb{C}$, infatti $\forall z \in I, \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda z \in I$ essendo $Re(\lambda z) = \lambda Re(z) = 0$.

5. Dato un $\mathbf{k}$-spazio vettoriale V, $\forall v \in V$ l'insieme

$$< v > := \{\lambda v : \ \lambda \in \mathbf{k}\}$$

è sotto-$\mathbf{k}$-spazio vettoriale, detto *sottospazio generato da* v, infatti $\forall \lambda v, \mu v \in < v >$ si ha $\lambda v + \mu v = (\lambda + \mu)v \in < v >$, e similmente $\forall \alpha \in \mathbf{k}, \lambda v \in < v > \Longrightarrow \alpha(\lambda v) = (\alpha\lambda)v \in < v >$.

6. Dati un $\mathbf{k}$-spazio vettoriale V e due sottospazi $U, W \subseteq V$, $U \cap W \subset V$ è sottospazio, si ha infatti:

   $\forall x, y \in U \cap W$, si ha $x + y \in U, x + y \in W \Longrightarrow x, y \in U \cap W$, similmente $\forall \lambda \in \mathbf{k}, x \in U \cap W$, si ha $\lambda x \in U, \lambda x \in W \Longrightarrow \lambda x \in U \cap W$; il risultato si estende chiaramente a intersezioni arbitrarie di sottospazi vettoriali.

7. Dati un $\mathbf{k}$-spazio vettoriale V e due sottospazi $U, W \subseteq V$, $U \cup W \subset V$ è sottospazio solo se $U \subset W$ o $W \subset U$, per esempio:

   siano $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 0\}, W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 0\} \Longrightarrow U \cup W$ non è sottospazio vettoriale (e.g. $(1, 0), (0, 1) \in U \cup W$ ma $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin U \cup W$).

8. I sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$ sono $0_{\mathbb{R}^2}$, le rette passanti per l'origine e $\mathbb{R}^2$ stesso;

   i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ sono $0_{\mathbb{R}^3}$, le rette passanti per l'origine, i piani passanti per l'origine e $\mathbb{R}^3$ stesso.

7.3 Dipendenza lineare

7.3.1 Sistemi di generatori e basi

Definizione 7.3.1 *Dati* $v_1, \ldots, v_r \in V, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbf{k}$, *il vettore*

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$$

è detto combinazione lineare[2] di $v_1, \ldots, v_r \in V$ a coefficienti $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbf{k}$.

Proposizione 7.3.2 *Dato un sottinsieme* $S \subset V$, *l'insieme* $\mathcal{L}(S)$ *di tutte le c.l. (finite) di elementi di* S *è un sottospazio vettoriale di* V, *detto* sottospazio generato da S, *mentre* S *è detto* sistema di generatori di $\mathcal{L}(S)$.

Dim. $\forall\, u, u' \in \mathcal{L}(S)$ si ha $u = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i s_i, u' = \sum\limits_{j=1}^{r} \mu_j t_j, \lambda_i, \mu_j \in \mathbf{k}, s_i, t_j \in S$ e quindi

$$u + u' = \lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_r s_r + \mu_1 t_1 + \cdots + \mu_r t_r \in \mathcal{L}(S)$$

inoltre, $\forall\, \lambda \in \mathbf{k}, u \in \mathcal{L}(S)$ si ha

$$\lambda u = \lambda \sum_{i=1}^{r} \lambda_i s_i = \sum_{i=1}^{r} (\lambda \lambda_i) s_i \in \mathcal{L}(S).$$

Osservazione 7.3.3

1. $\mathcal{L}(S)$ è l'intersezione di tutti i sottospazi di V contenenti S, infatti se $U \subset V$ è un sottospazio contenente $S \Longrightarrow \mathcal{L}(S) \subset U$ e ogni sottospazio $U \subset V$ contenente S necessariamente contiene $\mathcal{L}(S)$;

2. $\mathcal{L}(S)$ è il minimo sottospazio di V contenente S;

3. se $S = \{v\}$ per qualche $v \in V \Longrightarrow$ anziché $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(\{v\})$ si scrive semplicemente $\mathcal{L}(v)$ e vale $\mathcal{L}(v) =< v >$;

4. Se in $\mathbf{k}^n$ poniamo (vedi Es. 2.2.1) $e_i := (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ si ha
$$\mathbf{k}^n = \mathcal{L}(\{e_1, \ldots, e_n\})$$
infatti $\forall\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{k}^n$ si ha:
$$(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i;$$

5. Fissato nello spazio un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $\sigma(O; x, y, z)$, se $0_{\mathbb{R}^3} \neq u = (l_1, l_2, l_3), l_i \in \mathbb{R} \Longrightarrow \mathcal{L}(u)$ rappresenta la retta per O di vettore direzionale u (vedi (6.15));

   se $0_{\mathbb{R}^3} \neq v = (m_1, m_2, m_3), m_i \in \mathbb{R}$ e $u \times v \neq 0_{\mathbb{R}^3} \Longrightarrow \mathcal{L}(\{u, v\})$ rappresenta il piano per O di vettore direzionale $u \times v$ (vedi (6.9));

[2] Abbreviata c.l..

6. Il $\mathbf{k}-$ spazio vettoriale $\mathbf{k}[X]$, dei polinomi in una indeterminata, non ha un insieme finito di generatori infatti, $\forall f \in \mathbf{k}[X]$ ha un certo grado $d \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, vedi Def. 3.4.1 e vale $\deg(f+g) \leq \max(\deg f, \deg g)$[3] poiché $\mathbf{k}[X]$ contiene polinomi di grado ℓ, $\forall \ell \in \mathbb{N}$, non può essere $\mathbf{k}[X] = \mathcal{L}\{f_1, \dots, f_s\}$ per qualche $f_i \in \mathbf{k}[X], 1 \leq i \leq s$, in quanto, posto $d := \max\{\deg f_i\}$, si ha $\deg f \leq d$, $\forall f \in \mathcal{L}\{f_1, \dots, f_s\}$.

   L'insieme $\{X^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un insieme di generatori di $\mathbf{k}[X]$ infatti $\forall f \in \mathbf{k}[X]$ si ha $f = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X_d \in \mathcal{L}(\{X^n\}_{n \in \mathbb{N}})$.

Definizione 7.3.4 *1. Un insieme (arbitrario) di vettori $A = \{v_i\}_{i \in I}$ di uno spazio vettoriale V è un* sistema di generatori per V *se ogni $v \in V$ può scriversi come combinazione lineare di un numero finito di vettori di A*[4].

2. Un sistema minimale di generatori *di V è un sottinsieme $A \subset V$ tale che $V = \mathcal{L}(A)$ e $\mathcal{L}(B) \subsetneqq V$, $\forall B \subsetneqq A$.*

3. Uno spazio vettoriale che ha un insieme finito di generatori è detto di tipo finito

Esercizio 7.3.5 a) Dire se i seguenti insiemi sono sistemi di generatori per $\mathbb{R}^3$

1. $E_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$;
2. $A = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1), (2,4,4)\}$;
3. $B = A \cup \{(-1,0,1)\}$;
4. $C = B \cup \{(2,2,2)\}$.

b) Caratterizzare i sistemi minimali di generatori di uno spazio vettoriale V.

Definizione 7.3.6 *Dati uno spazio vettoriale V e un sottinsieme $S = \{v_1, \dots, v_r\} \subset V$ si dice che S è* linearmente indipendente *o che i vettori $v_1, \dots, v_r \in V$ sono* linearmente indipendenti[5] *se $\nexists$ alcun sottinsieme proprio $T \subset S$ tale che $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(S)$. Altrimenti si dice che S è* linearmente dipendente *o che i vettori di S sono* linearmente dipendenti[6].

Proposizione 7.3.7 *Dati un $\mathbf{k}$-spazio vettoriale V e un sottinsieme $S = \{v_1, \dots, v_r\} \subset V$, S è un sistema di vettori l.i. se e solo se l'equazione*

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0_V \tag{7.1}$$

ha solo la soluzione (nulla) $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0_{\mathbf{k}}$.

[3] Per esempio, se $f(X) = 1 + X - X^2, g(X) = X^2 + X \Longrightarrow (f+g)(X) = 2X + 1$.
[4] Se cioè vale: $V = \mathcal{L}(A)$.
[5] Abbreviato l.i..
[6] Abbreviato l.d..

Dim. Se $\exists\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)\neq 0_{\mathbf{k}^r}$ soluzione di (7.1) $\Longrightarrow \exists i\in\{1,\ldots,r\}$ tale che $\lambda_i\neq 0 \Longrightarrow T_i:=\{v_1,\ldots,\widehat{v_i},\ldots,v_r\}\subset V$ soddisfa $\mathcal{L}(T_i)=\mathcal{L}(S)$. Chiaramente $\mathcal{L}(T_i)\subset\mathcal{L}(S)$, vale anche $\mathcal{L}(S)\subset\mathcal{L}(T_i)$ infatti

$$v_i=-(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}v_1+\cdots+\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}v_{i-1}+\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}v_{i+1}+\cdots+\frac{\lambda_r}{\lambda_i}v_r).$$

Supponiamo viceversa che $T\subset S$ e $\mathcal{L}(T)=\mathcal{L}(S)$. Possiamo supporre $T=\{v_2,\ldots,v_r\}\subset V$, essendo per ipotesi $S\subset\mathcal{L}(T)$ si ha $v_1=\sum_{i=2}^{r}\lambda_i v_i$ per opportuni $\lambda_2,\ldots,\lambda_r\in\mathbf{k}$ e quindi

$$1_{\mathbf{k}}v_1-\lambda_2v_2+\cdots-\lambda_rv_r=0_V\ \therefore\ (1_{\mathbf{k}},-\lambda_2,\ldots,\lambda_r)\neq 0_{\mathbf{k}^r}$$

è soluzione non banale di (7.1).

Osservazione 7.3.8
1. Un singolo $v\in V$ è l.i $\Longleftrightarrow$ $v\neq 0_V$;
2. due vettori nonnulli $u,v\in V$ sono l.i. $\Longleftrightarrow$ $u\neq\lambda v$, $\forall\,\lambda\in\mathbf{k}$;
3. Se $S\subset V$ è un insieme di vettori l.i. $\Longrightarrow \forall T\subset S$ è tale;
4. Se $S\subset V$ è un insieme di vettori l.d. $\Longrightarrow \forall T\supset S$ è tale.

Definizione 7.3.9
1. *Un insieme (arbitrario) di vettori $A=\{v_i\}_{i\in I}$ di uno spazio vettoriale V è* libero *se ogni sottinsieme finito di A è costituito da vettori l.i..*
2. *Un sottinsieme $S=\{v_1,\ldots,v_r\}\subset V$, S di uno spazio vettoriale di tipo finito è detto* base di V *se:*
   (a) *$V=\mathcal{L}(S)$ (i.e. S è un sistema di generatori di V),*
   (b) *S è un insieme libero.*

Osservazione 7.3.10
1. In uno spazio vettoriale di tipo finito $\nexists$ sottinsiemi liberi infiniti;
2. In uno spazio vettoriale V un sottinsieme $S\subset V$ è una base $\Longleftrightarrow$ è un sistema minimale di generatori di V;
3. ogni sottinsieme $S\subset V$ di vettori l.i. è una base di $\mathcal{L}(S)$.

Proposizione 7.3.11 *Dato $S=\{v_1,\ldots,v_s\}\subset V$, sono fatti equivalenti:*
1. *S è base di V,*
2. *$\forall\ v\in V$ si scrive in modo unico come c.l. dei vettori di S,*
3. *S è un insieme massimale[7] di vettori l.i..*

[7] Significa che S è un insieme di vettori l.i che non è contenuto propriamente in nessun insieme di vettori l.i. di V.

Dim. Per quanto riguarda 1. $\Longrightarrow$ 2. :

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_s v_s \Longrightarrow 0_V = (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \cdots + (\lambda_s - \mu_s) v_s$$

e quindi $\lambda_i = \mu_i$, $\forall\, 1 \leq i \leq s$ (essendo S base); quanto a 2. $\Longrightarrow$ 3., si ha in particolare che 0_V si scrive in modo unico come c.l. (a coefficienti tutti nulli) di elementi di $\Longrightarrow S$ è un insiema di vettori l.i., $\Longrightarrow \forall\, v \neq v_i, 1 \leq i \leq s$ l'insieme $T = S \cup \{v\}$ non è l.i. (infatti da $v = 1v$ e $v = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i v_i$ si ricava una c.l. nulla a coefficienti non tutti nulli di elementi di T); per quanto riguarda 3. $\Longrightarrow$ 1., se S non fosse un sistema di generatori di $V \Longrightarrow \exists v \in V \setminus \mathcal{L}(S)$, ma allora, per 3. $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s + \lambda v = 0_V \Longrightarrow \lambda = 0_{\mathbf{k}}$ poiché $v \notin \mathcal{L}(S)$ e quindi $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0_V \therefore V = \mathcal{L}(S)$.

Esempio 7.3.12 $E_n := \{e_1, \ldots, e_n\} \subset \mathbf{k}^n$ è una base di $\mathbf{k}^n$ detta *base canonica di* $\mathbf{k}^n$*.*

7.3.2 Coordinate

Definizione 7.3.13 *Data una base* $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ *di uno spazio vettoriale* V, $\forall\, v \in V$ *le* coordinate di v rispetto a F *sono gli* n *scalari* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{k}$[8] *tali che*

$$v = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n.$$

Esempio 7.3.14

1. Si verifica facilmente che le 'componenti' di ciascun $v \in \mathbf{k}^n$ coincidono con le coordinate rispetto alla base canonica;

2. Dati $F = \{(1,1), (2,-1)\} \subset \mathbb{R}^2$ e $u = (3,1) \in \mathbb{R}^2$, le coordinate di v rispetto a F si trovano risolvendo l'equazione vettoriale:

$$\alpha(1,1) + \beta(2,-1) = (3,1)$$

ossia il sistema lineare $\begin{cases} \alpha + 2\beta = 3 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3\alpha = 5 \\ 3\beta = 2 \end{cases}$, che dà $(\frac{5}{3}, \frac{2}{3})$

Definizione 7.3.15 *Date una base* $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ *di uno spazio vettoriale* V *e un's-upla ordinata* $S = (v_1, \ldots, v_s)$ *di vettori di* V*, la* matrice associata a S rispetto alla base F, *denotata* M_S^F*, è la matrice* $n \times s$ *la cui* i*-esima colonna è costituita dalle coordinate di* v_i *rispetto a* F*.*

Notazione 7.3.16 *Simbolicamente:*

$S = (v_1, \ldots, v_s)$ *è una 'matrice'* $1 \times s$, $F = (f_1, \ldots, f_n)$ *è una 'matrice'* $1 \times n$.

Corollario 7.3.17 *Con le notazioni e convenzioni precedenti* $\forall\, v \in V$,

$$v = F M_v^F, \ \ S = F M_S^F\,[9].$$

[8] Univocamente determinati per Prop. 7.3.11.

[9] Prodotto righe per colonne di matrici.

Dim. Da $v = \lambda_1 f_1 + \cdots \lambda_n f_n$ chiaramente $(f_1, \ldots, f_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, mentre da $v_i = \lambda_{i1} f_1 + \cdots \lambda_{in} f_n, 1 \leq i \leq s$ si ottiene

$$S = (v_1, \ldots, v_s) = (f_1, \ldots, f_n)\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{ns} \end{pmatrix}.$$

Teorema 7.3.18 *Siano* $S = (v_1, \ldots, v_s) \subset \mathbf{k}^n$, $v_i = (a_{1i}, \ldots, a_{ni}), E = E_n$ *la base canonica di* $\mathbf{k}^n$,

1. $\{v_1, \ldots, v_s\}$ *è sistema di generatori di* $\mathbf{k}^n \iff \rho(M_S^E) = n$;
2. $\{v_1, \ldots, v_s\}$ *è insieme di vettori l.i. di* $\mathbf{k}^n \iff \rho(M_S^E) = s$[10];
3. $\{v_1, \ldots, v_s\}$ *è base di* $\mathbf{k}^n \iff s = n \quad e \quad d(M_S^E) \neq 0$.

Dim. Per quanto riguarda 1., si ha $M_S^E = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{ns} \end{pmatrix} \Longrightarrow$ se $v = (b_1, \ldots, n_n) \in \mathbf{k}^n$, si ha $v \in \mathcal{L}(\{v_1, \ldots, v_s\}) \iff \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbf{k}$ con $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s$ questo significa che $\exists$ almeno una soluzione del sistema:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + \ldots + a_{1s}X_s = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}X_1 + \ldots + a_{ns}X_s = b_s \end{cases} \qquad (\star)$$

e, dal teorema di Rouché-Capelli sappiamo che ciò accade se e solo se $\rho(A|b) = \rho(A)$; dire che $\{v_1, \ldots, v_s\}$ è sistema di generatori di $\mathbf{k}^n$ significa che il sistema $(\star)$ ha soluzione per ogni $(b_1, \ldots, n_n) \in \mathbf{k}^n \iff \rho(A) = n$[11]. Per quanto riguarda 2., $\{v_1, \ldots, v_s\}$ l.i. $\iff \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s = 0_{\mathbf{k}^n}$ ha solo la soluzione nulla, ossia, il sistema omogeneo associato a $(\star)$ soddisfa $\rho(A) = s$. Infine, 3. discende da 1. e da 2..

Corollario 7.3.19 *Con le stesse notazioni:*

1. *il massimo numero di vettori l.i. in* S *è* $\rho(M_S^E)$;
2. $\forall\, S' = \{v_{i1}, \ldots, v_{i_\rho}\} \subset S$ *tale che* $\rho(M_{S'}^E) = \rho(M_S^E)$ *è base di* $\mathcal{L}(S)$;
3. *tutte le basi di* $\mathbf{k}^n$ *constano di* n *vettori.*

Dim. Poiché gli altri due fatti sono conseguenza immediata del Teor. 7.3.18, basta provare solo 2., verificando che $\forall\, v \in S \setminus S' \Longrightarrow v \in \mathcal{L}(S')$. Se infatti $\exists\, v \in S \setminus S', v \notin \mathcal{L}(S') \Longrightarrow \rho(M_{S'}^E) < \rho(M_S^E)$.

[10] Nel qual caso $s \leq n$!

[11] n.b. n è il numero delle equazioni!

Corollario 7.3.20 *Siano $W \subset \mathbf{k}^n$ un sottospazio ed $S = \{v_1, \dots, v_s\}$ una sua base, $\exists\, n-s$ vettori $v_{s+1}, \dots, v_n \in \mathbf{k}^n$ tali che $\{v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n\}$ sia una base di $\mathbf{k}^n$ (in particolare come $v_{s+1}, \dots, v_n$ possono essere scelti $e_{i_{s+1}}, \dots, e_{i_n} \in E_n$) e si dice che $v_{s+1}, \dots, v_n$* completano S a base di $\mathbf{k}^n$.

Dim. Sia $v_i = (a_{1i}, \dots, a_{ni})$, $\forall\, 1 \leq i \leq s$, poiché S è l.i. si ha $\rho(M_S^E) = s$, per comodità possiamo supporre che un minore di ordine s nonnullo sia quello individuato dalle prime s righe, cosicché

$$d\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{s+11} & \cdots & a_{s+1s} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Esempio 7.3.21 Sia $S = \{v_1, v_2, v_3\}$, con $v_1 = (1,2,1), v_2 = (2,1,2), v_3 = (1,-1,1)$.

1. Si prova che S non è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ osservando che $\rho(M_S^E) = 2$,

2. osservando che v_1 e v_3 sono l.i. si può completare $S' = \{v_1, v_3\}$ a base di $\mathbb{R}^3$, per esempio con e_3;

3. si descrive $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(S')$ osservando che ogni suo vettore si scrive in modo unico come combinazione di v_1 e v_3, ossia

$$\mathcal{L}(S) \ni v = (\alpha + \beta, 2\alpha - \beta, \alpha + \beta)$$

$\therefore$ nello spazio $\mathcal{L}(S)$ rappresenta il piano $\pi : x - z = 0$.

7.3.3 Cambio di base e dimensione

Lemma 7.3.22 *Siano $F = \{f_1, \dots, f_r\}, G = \{g_1, \dots, g_{r'}\}$, due basi di un sottospazio $W \subset \mathbf{k}^n$ ed $S = (v_1, \dots, v_s)$ un's-upla ordinata di vettori di W, si ha:*

1. $M_S^{F'} = M_F^{F'} M_S^F$;

2. $r = r'$;

3. $M_{F'}^F = [(M_F^{F'})^{-1}]$[12];

4. $\rho(M_S^F) = \rho(M_S^{F'})$.

[12]Le due matrici $M_{F'}^F$ e $M_F^{F'}$, che esprimono rispettivamente i vettori di F' rispetto alla base F e i vettori di F rispetto alla base F', sono dette *matrici di cambio di base,* da F a F' e da F' a F.

Dim. 1. : Essendo $F'M_S^{F'} = S = FM_S^F$ ed $F = F'M_F^{F'}$, si ha:

$$F'M_S^{F'} = F'M_S^{F'}M_S^F,$$

da cui la tesi poiché F' una base $\Longrightarrow$ ogni vettore si scrive in modo unico; 2. : si ha chiaramente $r \leq r'$ ed $r' \leq r$; 3. : da $F = F' \cdot M_F^{F'}$, $F' = F \cdot M_{F'}^F$ si ha:

$$F = FM_{F'}^F M_F^{F'} \text{ e } F' = F'M_F^{F'}M_{F'}^F \Longrightarrow I_r = M_{F'}^F M_F^{F'} = F'M_F^{F'}M_{F'}^F;$$

infine, 4. è conseguenza di 1. e 3..

Osservazione 7.3.23 Ogni sottospazio $W \subset \mathbf{k}^n$ ha una base costituita da un numero finito di elementi (essendo una base F di W un insieme l.i. di vettori di $\mathbf{k}^n$ si ha $\#F \leq n$) e tutte le basi di W hanno lo stesso numero di elementi (segue da Teor. 7.3.22.2.).

Definizione 7.3.24 *La* dimensione *di un sottospazio* $W \subset \mathbf{k}^n$ *è il numero di elementi di una qualsiasi base di* W.

Esempio 7.3.25
1. $\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{k}^n = n$;
2. se $W \subset \mathbf{k}^n$ e $\dim_{\mathbf{k}} W = n \Longrightarrow W = \mathbf{k}^n$;
3. $\dim_{\mathbf{k}} < 0_{\mathbf{k}^n} >= 0$.

7.4 Applicazioni lineari

7.4.1 Definizione

Definizione 7.4.1
1. *Un'* applicazione lineare *od* omomorfismo di spazi vettoriali *è un'applicazione* $\varphi : V \longrightarrow V'$ *tale che* $\forall\, u, v \in V, \lambda \in \mathbf{k}$:
   (a) $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$[13],
   (b) $\varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$.
2. *Un omomorfismo* $\varphi : V \longrightarrow V$ *è detto* endomorfismo.

Osservazione 7.4.2 Un'applicazione $\varphi : V \longrightarrow V'$ è lineare $\Longleftrightarrow$ $\forall\, u, v \in V, \lambda, \mu \in \mathbf{k}$ vale $\varphi(\lambda u + \mu v) = \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v)$.

Esempio 7.4.3
1. $\varphi : V \longrightarrow V'$ tale che $\varphi(v) = 0_{V'}$, $\forall\, v \in V$ è lineare;
2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\varphi(x, y) = (y, x)$ è lineare;
3. $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\varphi(x, y, z) = (x - y, y - z, x + y - z + 1)$ non è lineare;

[13] Da $0_V = 0_V + 0_V$, si ricava in particolare che $\varphi(0_V) = 0_{V'}$, infatti $\varphi(0_V) + \varphi(0_V) = \varphi(0_V + 0_V) = \varphi(0_V)$.

4. $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che $\varphi(z) = \bar{z}$ è lineare su $\mathbb{R}$ (ma non su $\mathbb{C}$);
5. se $I = [a, b]$, $\varphi : \mathcal{C}^0(I) \longrightarrow \mathbb{R}$, definita da $f(x) \mapsto \int_a^b f(x)dx$ è lineare;
6. l'insieme $Hom_{\mathbf{k}}(V, V') := \{\varphi : V \longrightarrow V' : \varphi$ è lineare $\}$ è uno spazio vettoriale rispetto all'addizione e alla moltiplicazione esterna,

   definite $\forall \varphi, \psi \in Hom_{\mathbf{k}}(V, V'), \lambda \in \mathbf{k}, v \in V$ da:
   - $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$;
   - $(\lambda\varphi)(v) := \lambda\varphi(v)$;
7. lo spazio vettoriale degli endomorfismi di V in sé è denotato $End_{\mathbf{k}}(V)$.

Proposizione 7.4.4 *Un'applicazione* $\varphi : \mathbf{k}^n \longrightarrow \mathbf{k}^m$ *definita da:*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$$

è lineare $\iff$ *le* y_i *sono funzioni lineari omogenee delle* x_i.

Dim. Sia $\varphi(e_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}, \forall e_i \in E_n$, essendo $(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ si ha che φ è lineare $\iff$

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = \\ = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n). \end{aligned} \tag{7.2}$$

7.4.2 Omomorfismi e matrici associate

D'ora in avanti spazio vettoriale significa sottospazio di $\mathbf{k}^n$ (eventualmente $\mathbf{k}^n$ stesso). Se $\varphi \in Hom_{\mathbf{k}}(V, V')$ ed $S = (v_1, \ldots, v_s)$ è un's-upla di vettori di $V, \varphi(S)$ indica l's-upla di vettori di $V', (\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_s))$.
Se $F = \{f_1, \ldots, f_s\}$ è una base di V, i suoi elementi sono pensati ordinati, ossia, F è pensata come s-upla.

Proposizione 7.4.5 *Siano* V, V' *spazi vettoriali,* $F = \{f_1, \ldots, f_d\}$ *una base di* V *e* $G = \{g_1, \ldots, g_{d'}\}$ *una base di* $V' \Longrightarrow$

$$\exists \text{ c.b.u. tra } Hom_{\mathbf{k}}(V, V') \text{ e } M_{d,d'}(\mathbf{k}).$$

Dim. Data F, si ha che $Hom_{\mathbf{k}}(V, V') \ni \varphi \mapsto (\varphi(f_1), \ldots, \varphi(f_d)) \in V'^d$, d'altra parte, data G, ogni d-upla di vettori di $V', S' = (v'_1, \ldots, v'_d) \mapsto M^G_{S'}$ ed entrambe le corrispondenze sono biunivoche, pertanto, ponendo

$$\varphi \mapsto M^G_{\varphi(F)}$$

si ottiene una c.b.u. tra $Hom_{\mathbf{k}}(V, V')$ e $M_{d,d'}(\mathbf{k})$, come affermato.

Definizione 7.4.6 *Nelle ipotesi di Prop. 7.4.5,* $M^G_{\varphi(F)}$ *è detta* matrice associata a φ relativamente a F e G[14].

Proposizione 7.4.7 *Nelle ipotesi di Prop. 7.4.5, sia* $S = (v_1, \ldots, v_s)$ *si ha:*

1. $\varphi(S) = GM^G_{\varphi(F)}M^F_S$,
2. $M^G_{\varphi(S)} = M^G_{\varphi(F)}M^S_F$.

Dim. Poiché $\varphi(S) = GM^G_{\varphi(S)}$, 2. segue da 1., essendo G una base; è inoltre chiaro che basta verificare 1. per $S = \{v\}$. Sia

$$v = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_d v_d = M^F_v \Longrightarrow \varphi(v) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \varphi(f_i) = \varphi(F)M^F_v.$$

D'altra parte $\varphi(F) = GM^G_{\varphi(F)}$ implica la tesi.

Proposizione 7.4.8 *Siano* $V, V', V"$ *spazi vettoriali di basi rispettive* F, G, H *e* $\varphi \in Hom_{\mathbf{k}}(V, V'), \psi \in Hom_{\mathbf{k}}(V', V")$, *allora*

$$\psi \circ \varphi \in Hom_{\mathbf{k}}(V, V") \text{ e vale } M^H_{\psi\circ\varphi(F)} = M^H_{\psi(G)} \circ M^G_{\varphi(F)}.$$

Dim. Osserviamo subito che $\forall\, u, v \in V, \lambda, \mu \in \mathbf{k}$ si ha:

$$(\psi\circ\varphi)(\lambda u+\mu v) = \psi(\varphi(\lambda u+\mu v)) = \psi(\lambda\varphi((u)+\mu\varphi(v)) = \lambda(\psi\circ\varphi)(u)+\mu(\psi\circ\varphi)(v).$$

Si ha inoltre:

$$M^H_{\psi\circ\varphi(F)} = M^H_{\psi(\varphi(F))} = M^H_{\psi(G)}M^G_{\varphi(F)}.$$

Esempio 7.4.9 Dato $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ individuato da $M^{E_2}_{\varphi(E_3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, per determinare $\varphi(v)$, con $v = (2, 2, 3)$, notiamo che

$$v = 2e_1 + 2e_2 + 3e_3 \Longrightarrow \varphi(v) = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

7.4.3 Nucleo e Immagine

Definizione 7.4.10 *Dato* $\varphi \in Hom_{\mathbf{k}}(V, V')$,

- im$\varphi := \{v' \in V' :\ \exists\, v \in V, \varphi(v) = v'\}$ *è detto* immagine di φ;
- ker$\varphi := \{v \in V :\ \varphi(v) = 0_{V'}\}$ *è detto* nucleo di φ[15].

[14] Osserviamo in particolare che nel caso si abbia $V = V'$, con F base del dominio ed F' base del codominio, la matrice associata a $Id_V \in End_{\mathbf{k}}(V)$, relativamente a F ed F', risulta essere precisamente la matrice del cambio di base $M^{F'}_F$.

[15] Osserviamo esplicitamente che per come sono stati definiti im$\varphi \subset V'$ e ker$\varphi \subset V$ sono solo sottinsiemi.

Proposizione 7.4.11 *Dato* $\varphi \in Hom_{\mathbf{k}}(V, V')$,

1. $\mathrm{im}\varphi$ *è sottospazio di* V';

2. $\ker\varphi$ *è sottospazio di* V.

Dim. Per quanto riguarda 1. : $\forall u', v' \in \mathrm{im}\varphi, \lambda, \mu \in \mathbf{k}$ si ha $\lambda u' + \mu v' \in \mathrm{im}\varphi$ infatti $\lambda u' + \mu v' = \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v) = \varphi(\lambda u + \mu v)$ con $\lambda u + \mu v \in V$. Per quanto riguarda 2. : $\forall u, v \in \ker\varphi, \lambda, \mu \in k$ si ha $\lambda u + \mu v \in \ker\varphi$ infatti $\varphi(\lambda u + \mu v) = \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v) = \lambda 0_{V'} + \mu 0_{V'} = 0_{V'}$.

Proposizione 7.4.12 *Dato* $\varphi \in Hom_{\mathbf{k}}(V, V')$,

1. φ *è surgettivo* $\iff \mathrm{im}\varphi = V' \iff \dim_{\mathrm{k}} \mathrm{im}\varphi = \dim_{\mathrm{k}} V'$;

2. φ *è iniettivo* $\iff \ker\varphi = 0_V \iff \dim_{\mathrm{k}} \ker\varphi = 0$.

Dim. Chiaramente vale 1.. Per quanto riguarda 2. è ancora chiaro che φ iniettivo $\Longrightarrow$ $ker\varphi = 0_V$, proviamo che vale anche il viceversa se φ non è iniettiva $\Longrightarrow$ $\exists u \neq v \in V$ tali che $\varphi(u) = \varphi(v)$ ossia $\varphi(u - v) = 0_{V'}$ con $u - v \neq 0_V$ $\therefore$ $\ker\varphi \neq 0_V$.

Osservazione 7.4.13 Risulta da (7.2) che $\forall\, \varphi \in Hom_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}^n, \mathbf{k}^m)$, $\ker\varphi$ è l'insieme delle $n-$uple $(x_1, \ldots, x_n), x_i \in \mathbf{k}$ che sono soluzione del sistema lineare:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + \cdots + a_{1n}X_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}X_1 + \cdots + a_{mn}X_n = 0 \end{cases},$$

la cui matrice dei coefficienti è $A = M^{E_m}_{\varphi(E_n)}$. Viceversa, l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite, può essere pensato come nucleo di un omomorfismo di $\mathbf{k}^n$ in $\mathbf{k}^m$.

Pertanto, studiare i nuclei degli omomorfismi $\varphi \in Hom_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}^n, \mathbf{k}^m)$ è la stessa cosa che studiare gli spazi vettoriali delle soluzioni dei sistemi lineari omogenei. Piú precisamente: Se $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbf{k})$ è la matrice dei coefficienti di un sistema lineare omogeneo Σ, se $V \subset \mathbf{k}^n$ è il sottospazio di $\mathbf{k}^n$ costituito dalle soluzioni di Σ e $\rho = \rho(A) \Longrightarrow \dim_{\mathrm{k}} V = n - \rho$.

Teorema 7.4.14 *Dati due spazi vettoriali* V, V' *e* $\varphi \in Hom_{\mathbf{k}}(V, V')$, *si ha:*

$$\dim_{\mathrm{k}} V = \dim_{\mathrm{k}} \ker\, \varphi + \dim_{\mathrm{k}} \mathrm{im}\, \varphi.$$

Dim. Sia $n = \dim_{\mathrm{k}} V$, poiché $\ker\, \varphi \subset V$ si ha $\dim_{\mathrm{k}} \ker\, \varphi \leq n$, siano $s = \dim_{\mathrm{k}} \ker\, \varphi$ e $\{v_1, \ldots, v_s\} \subset V$ una base di $\ker\, \varphi$. Completiamo $\{v_1, \ldots, v_s\}$ a base $B = \{v_1, \ldots, v_s, v_{s+1}, \ldots, v_n\}$ di V, per provare la tesi basta far vedere che $\{\varphi(v_{s+1}), \ldots, \varphi(v_n)\}$ è una base di $\mathrm{im}\, \varphi$. Ora, $\forall\, w \in$

imφ si ha

$$\begin{aligned} w &= \varphi(v) = \varphi(a_1v_1 + \cdots + a_sv_s + a_{s+1}v_{s+1} + \ldots + a_nv_n) = \\ &= \sum_{i=1}^{s} a_i\varphi(v_i) + \sum_{j=1}^{n-s} a_{s+j}\varphi(v_{s+j}) = 0_{V'} + \sum_{j=1}^{n-s} a_{s+j}\varphi(v_{s+j}) = \\ &= \sum_{j=1}^{n-s} a_{s+j}\varphi(v_{s+j}), \end{aligned}$$

pertanto risulta im$\varphi = \mathcal{L}(\varphi(v_{s+1}), \ldots, \varphi(v_n))$, ossia, $\{\varphi(v_{s+1}), \ldots, \varphi(v_n)\}$ è un insieme di generatori. Se vale $\sum_{j=1}^{n-s} c_j\varphi(v_{s+j}) = 0_{V'}$ si ha $0_{V'} = \varphi(\sum_{j=1}^{n-s} c_jv_{s+j}) \therefore \sum_{j=1}^{n-s} c_jv_{s+j} \in \ker\varphi \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n-s} c_jv_{s+j} = \sum_{i=1}^{s} d_iv_i$ si ha quindi: $d_1v_1 + \cdots + d_sv_s - c_1v_{s+1} + \ldots - c_nv_n = 0_V$ che, essendo B base di V, dà $d_1 = \ldots d_s = c_1 = \ldots = c_{n-s} = 0_{\mathbf{k}}$, ossia $\{\varphi(v_{s+1}), \ldots, \varphi(v_n)\}$ è l.i..

Corollario 7.4.15 *$\varphi \in Hom_{\mathbf{k}}(V, V)$ è iniettivo $\Longleftrightarrow$ è surgettivo.*

Corollario 7.4.16 *Se $\varphi \in Hom_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}^n, \mathbf{k}^m)$ e $\rho = \rho(M^{E_m}_{\varphi(E_n)})$, si ha:*

$$\dim_{\mathrm{k}} ker\varphi = n - \rho \quad e \quad \dim_{\mathrm{k}} im\varphi = \rho.$$

7.4.4 Isomorfismi

Definizione 7.4.17 *Un omomorfismo bigettivo $\varphi \in Hom_{\mathbf{k}}(V, V')$ è detto* isomorfismo.

Corollario 7.4.18 *Dati due spazi vettoriali V, V' e una base F di V, un $\varphi \in Hom_{\mathbf{k}}(V, V')$ è isomorfismo $\Longleftrightarrow$ $\varphi(F)$ è base di V'.*

Proposizione 7.4.19 *Siano V, V' due spazi vettoriali di basi rispettive F, G, $\varphi \in Hom_{\mathbf{k}}(V, V')$ un isomorfismo e $\varphi^{-1} : V' \longrightarrow V$ l'applicazione inversa $\Longrightarrow \varphi^{-1}$ è isomorfismo e $M^F_{\varphi^{-1}(G)} = (M^G_{\varphi(F)})^{-1}$.*

Dim. Osserviamo che $M^G_{\varphi(F)}$ è una matrice quadrata invertibile, se $\psi : V' \longrightarrow V$ è l'omomorfismo individuato da:

$$M^F_{\psi(G)} := (M^G_{\varphi(F)})^{-1},$$

si ha

$M^G_{(\varphi\circ\psi)(G)} = M^G_{\varphi(F)}M^F_{\psi(G)} = I_{\dim_{\mathrm{k}} V'}$ e $M^F_{(\psi\circ\varphi)(F)} = M^F_{\psi(G)}M^G_{\varphi(F)} = I_{\dim_{\mathrm{k}} V}$,

ossia $\psi \circ \varphi = id_V$ e $\psi \circ \varphi = id_{V'}$.

Definizione 7.4.20 *1. Due spazi vettoriali V, V' sono detti* isomorfi[16] *se $\exists$ un isomorfismo $\varphi : V \longrightarrow V'$*[17].

2. Un endomorfismo che sia isomorfismo è detto automorfismo *e $Aut_{\mathbf{k}}(V)$ denota l'insieme degli automorfismi di V in sé.*

Osservazione 7.4.21 Discende da Prop. 7.4.19 che $\forall \varphi \in End_{\mathbf{k}}(V)$ e base F di V risulta $\varphi \in Aut_{\mathbf{k}}(V) \iff d(M^F_{\varphi(F)}) \neq 0$, se $\varphi \in Aut_{\mathbf{k}}(V) \Longrightarrow \varphi^{-1} \in Aut_{\mathbf{k}}(V)$ e $M^F_{\varphi^{-1}(F)} = (M^F_{\varphi(F)})^{-1}$.

Teorema 7.4.22 *Dati V spazio vettoriale, $\varphi \in End_{\mathbf{k}}(V)$, F e G basi di V si ha:*

$$M^G_{\varphi(G)} = M^G_F M^F_{\varphi(F)} M^F_{\varphi(G)}.$$

Dim. Da Prop. 7.4.7 abbiamo che $M^G_{\varphi(G)} = M^G_{\varphi(F)} M^F_G$, dal Lem. 7.3.22 abbiamo che $M^G_{\varphi(F)} = M^G_F M^F_{\varphi(F)}$.

Esempio 7.4.23 Siano $\varphi \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ individuato da $M^{E_2}_{\varphi(E_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, e sia $F = \{f_1, f_2\}$ con $f_1 = (2,1), f_2 = (3,1)$, calcolare $M^F_{\varphi(F)}$.

Risulta $\varphi \in Aut_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ in quanto $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ e $M^F_{\varphi(F)} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$ infatti, essendo $M^{E_2}_F = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M^F_{E_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, da $M^F_{\varphi(F)} = M^F_{E_2} M^{E_2}_{\varphi(E_2)} M^{E_2}_F$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Notiamo incidentalmente che $M^{E_2}_{\varphi^{-1}(E_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Per verificare l'esattezza dei conti possiamo osservare che $5(2,1)-3(3,1) = (1,2) = 2(0,1)+(1,0) = \varphi(2,1)$ e $8(2,1)-5(3,1) = (1,3) = 3(0,1)+(1,0) = \varphi(3,1)$.

7.5 Spazi euclidei

7.5.1 Prodotto scalare

Definizione 7.5.1 *Un* prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V *è un'applicazione $V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, $(u,v) \mapsto u.v$ tale che $\forall u, v, w \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ valgano:*

[16] In simboli $V \simeq V'$.

[17] Osserviamo che in particolare risulta $\dim_{\mathrm{k}} V = \dim_{\mathrm{k}} V'$, vale anche il viceversa ossia se $\dim_{\mathrm{k}} V = \dim_{\mathrm{k}} V'$ allora $V \simeq V'$ e in particolare $\dim_{\mathrm{k}} V = n \iff V \simeq k^n$.

1. $u.v = v.u$, simmetria,

2. $(\lambda u + \mu v).w = \lambda(u.w) + \mu(v.w)$ linearità

3. $u.u \geq 0$ *e* $u.u = 0 \iff u = 0_V$ positività.

Uno spazio vettoriale reale dotato di prodotto scalare è detto spazio euclideo.

Esempio 7.5.2 1. Il *prodotto scalare standard* di $\mathbb{R}^n$, è

$$(a_1, \ldots, a_n).(b_1, \ldots, b_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

2. Se $I = [a, b]$, su $\mathcal{C}^0(I)$ è definito il prodotto scalare $f.g := \int_a^b f(t)g(t)dt$.

Definizione 7.5.3 *In uno spazio euclideo V:*
il modulo di un vettore v *è il numero reale* $|v| := \sqrt{v.v}$,
la distanza di due vettori u, v *è definita ponendo* $d(u, v) := |u - v|$.

Osservazione 7.5.4 Per ogni coppia di vettori u, v vale la *diseguaglianza di Cauchy-Schwarz:*

$$|u.v| \leq |u||v|.$$

Definizione 7.5.5 1. L' *angolo di due vettori* è definito via:
$\cos \widehat{uv} := \frac{u.v}{|u||v|}$,

2. l' *ortogonalità tra due vettori* u, v è definita via:
$u \perp v \iff u.v = 0$[18],

3. un vettore $u \in \mathbb{R}^n$ è *ortogonale a un sottinsieme* $S \subset \mathbb{R}^n$ se $u \perp v,\ \forall\, v \in S$ e si scrive $u \perp S$,

4. L'insieme $\{u \in \mathbb{R}^n : u \perp S\}$ è detto *ortogonale di* S ed è denotato $S^\perp$.

7.5.2 Ortogonalità e proiezioni

In questo § tutti gli spazi vettoriali sono reali e $\mathbb{R}^n$ è pensato dotato di un prodotto scalare $\cdot$.

Proposizione 7.5.6 *Se* $S = \{v_1, \ldots, v_s\} \subset \mathbb{R}^n$ *e* $v \perp v_i\ \forall v \in S \Longrightarrow v \perp \mathcal{L}(S)$, *inoltre,* $\forall\, S \subset \mathbb{R}^n$, $S^\perp$ *è un sottospazio di* $\mathbb{R}^n$[19].

[18] Due vettori $u = (a_1, \ldots, a_n), v = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ si dicono *ortogonali* se $u.v = 0$ e si scrive $u \perp v$.

[19] Anche se S è solo un insieme!

Dim. Notiamo che $\forall\, u \in \mathcal{L}(S) \implies u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s \implies v.u = 0$; inoltre $\forall\, u, w \in S^\perp, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \implies \lambda u + \mu v \in S^\perp$ infatti, $\forall\, v \in S$ si ha $v.(\lambda u + \mu w) = \lambda v.u + \mu v.w = 0 + 0 = 0$.

Definizione 7.5.7 *Un insieme finito di vettori* $S = \{v_1, \ldots, v_s\} \subset \mathbb{R}^n$ *dicesi* ortonormale *se*

$$v_i.v_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Proposizione 7.5.8 *I vettori di un insieme ortonormale sono l.i..*

Dim. Se $S = \{v_1, \ldots, v_s\} \subset \mathbb{R}^n$ è ortonormale e $\lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_s v_s = 0_{\mathbb{R}^n}$, risulta $0 = v_i.(\lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_s v_s) = \lambda_i, \forall\, 1 \leq i \leq s$.

Teorema 7.5.9 *Dato* $V \subset \mathbb{R}^n$, *una base* F *di* V *è ortonormale*[20] $\iff$

$$M^F_{E_n} = (M^{E_n}_F)^{-1} = {}^t M^{E_n}_F.$$

Dim. Se $F = \{f_1, \ldots, f_r\}$ con $f_\ell = (a_{1\ell}, \ldots, a_{n\ell}) \implies M^{E_n}_F = (a_{ij})$ e ${}^t M^{E_n}_F = (a_{ji})$. Posto $A := (f_i.f_j) = {}^t M^{E_n}_F M^{E_n}_F$, vale

$$A = I_r \iff F \text{ è ortonormale.}$$

Definizione 7.5.10 *La* proiezione ortogonale di un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ su un versore f *è* $(v.f)f$.

Osservazione 7.5.11 La proiezione ortogonale di v su f è l'unico vettore di $< f >$, che sia componente di v, se v è scritto come somma di componenti ortogonali, infatti

$$v = (v - (v.f)f) + (v.f)f$$

con $(v - (v.f)f).f = v.f - v.f = 0$.

Lemma 7.5.12 *Dati una b.o.n* $\{f_1, \ldots, f_r\}$ *di* $V \subset \mathbb{R}^n$ *e* $u \in \mathbb{R}^n$, *scrivendo* $u = v + v'$ *con* $v \in V$ *e* $v' \in V^\perp$, *risulta* $v = \sum\limits_{i=1}^{r} (u.f_i)f_i$.

Dim. Si ha $v = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i f_i \implies v' = u - v = u - \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i f_i$, essendo $v'.f_i = 0, \forall\, 1 \leq i \leq r$ e $\lambda_j f_j.f_i = \lambda_i, \forall\; 1 \leq j \leq r$ si ha $(u.f_i) - \lambda_i = 0, \forall 1 \leq i \leq r$.

Definizione 7.5.13 *Dati una b.o.n.* $\{f_1, \ldots, f_r\}$ *di* $V \subset \mathbb{R}^n$ *e* $u \in \mathbb{R}^n$, *la* proiezione ortogonale di u su V[21] *è*

$$pr_V(u) := v = \sum_{i=1}^{r} (u.f_i)f_i.$$

Osservazione 7.5.14 Dati una b.o.n. $\{f_1, \ldots, f_r\}$ di $V \subset \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^n$, si ha che $u - pr_V(u) \in V^\perp$.

[20] L'espressione base ortonormale sarà abbreviata b.o.n..
[21] Indicata $pr_V(u)$.

7.5.3 Processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt

Diamo ora un metodo per determinare b.o.n. di uno spazio euclideo V.

Teorema 7.5.15 (Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt) *Siano $V \subset \mathbb{R}^n$ uno spazio euclideo e $\{f_1, \dots, f_r\}$ una sua base. Poniamo:*
$- f'_1 := vers(f_1)$,
$- f'_2 := vers(f_2 - pr_{\mathcal{L}(f'_1)}(f_2))$,
....
$- f'_r := vers(f_r - pr_{\mathcal{L}(f'_1,\dots,f'_{r-1})}(f_r))$.
Allora $F' = \{f'_1, \dots, f'_r\}$ è b.o.n. di V.

Dim. Poiché $f'_2 \perp f'_1, f'_3 \perp f'_1, f'_3 \perp f'_2$, eccetera F' è un insieme di r vettori l.i. in uno spazio $r-$dimensionale.

Teorema 7.5.16 *Sia $V \subset \mathbb{R}^n$ uno spazio euclideo, $\forall\, u \in \mathbb{R}^n$ si scrive in modo unico nella forma*

$$u = v + w \qquad con\; v \in V \;\; e\, w \in V^\perp.$$

Dim. Che si possa scrivere $u = v + w$ con $v \in V$ e $w \in V^\perp$, discende dal Lem. 7.5.12 e dal fatto che V ammetta b.o.n., quanto all'unicità, se $u = v + w = v' + w'$ con $v, v' \in V$ e $w, w' \in V^\perp$, si ha $v - v' = w - w' \in V \cap V^\perp = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Corollario 7.5.17 *Siano $V \subset \mathbb{R}^n$ uno spazio euclideo, $u \in \mathbb{R}^n$, $F = \{f_1, \dots, f_r\}$ una base di V e $G = \{g_1, \dots, g_{n-r}\}$ una base di $V^\perp$, si ha*

1. *$F \cup G$ è base di $\mathbb{R}^n$,*
2. *se $u = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i + \sum_{j=1}^{n-r} \mu_j g_j \Longrightarrow pr_V(u) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i$,*
3. *$\dim_k V + \dim_k V^\perp = n$,*
4. *$(V^\perp)^\perp = V$.*

Esempio 7.5.18 Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1 = (1,1,0,0), v_2 = (1,0,0,-1), v_3 = (1,2,0,1)$ e sia $u = (0,0,0,1)$, determinare la proiezione orogonale di u su V.
Si ha: $V^\perp = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = x_1 - x_4 = x_1 + 2x_2 + x_4 = 0\} \Longrightarrow$ una base di $V^\perp$ è $\{w_1 = (1,-1,0,1), w_2 = (0,0,1,0)\}$, pertanto una base di $\mathbb{R}^4$ è $F = \{v_1, v_2, w_1, w_2\}$. Se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sono le coordinate di u rispetto a $F \Longrightarrow pr_V(u) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, ora $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sono le soluzioni del sistema: $\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 0 \\ X_1 - X_3 = 0 \\ X_4 = 0 \\ -X_2 + X_3 = 1 \end{cases}$ e quindi $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$, perciò $pr_V(u) = \frac{1}{3}(1,1,0,0) + \frac{-2}{3}(1,0,0-1) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3})$.

Un altro metodo per rispondere consiste nel costruire una b.o.n. a partire da S, pertanto, essendo S l.d. e $\{v_1, v_2\}$ l.i.:

$- f_1 := vers(v_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0,0) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0)$,

$- f_2 := vers(v_2 - (v_2.f_1)f_1) = vers((1,0,0,-1) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0)) = vers(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0, -1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}}(1,-1,0,-2) = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{6}})$ e quindi

$pr_V(u) = (u.f_1)f_1 + (u.f_2)f_2 = 0f_1 + (\frac{2}{\sqrt{6}})f_2 = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3})$.

7.6 Applicazioni geometriche

Diamo ora alcuni riscontri geometrici dei concetti algebrici sviluppati lungo il capitolo.

7.6.1 Interpretazione geometrica dell' ortogonalità

Definizione 7.6.1 *Se uno spazio euclideo $V \subset \mathbb{R}^n$ è dato mediante una sua base, si dice che V è rappresentato* in forma parametrica*; se è dato come spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo, si dice che V è rappresentato* in forma cartesiana.

Osservazione 7.6.2 Il passaggio da una forma cartesiana a una parametrica si fa utilizzando Oss. 7.4.13; vediamo ora come si fa a passare da una forma parametrica a una cartesiana. Se $V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_s)$ si ha $V^{\perp} = \{u : u.v_1 = \cdots = u.v_s = 0\}$, ossia $\begin{cases} u.v_1 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ u.v_s = 0 \end{cases}$ che, $u = (x_1, \dots, x_n)$, è precisamante un sistema lineare omogeneo nelle incognite $x_1, \dots, x_n$, sia $\{w_1, \dots, w_t\}$ una base dello spazio delle soluzioni del sistema, ossia una base di $V^{\perp}$. Risulta $(V^{\perp})^{\perp} = \{w : w.w_1 = \cdots = w.w_t = 0\}$, essendo $(V^{\perp})^{\perp} = V$ si conclude.

Esempio 7.6.3

1. Rappresentare in forma cartesiana il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da
$$S = \{v_1 = (1,1,1,1), v_2 = (1,0,-1,-1), v_3 = (2,1,0,0), v_4 = (0,1,2,2)\}.$$
Una base di $\mathcal{L}(S)$ è per esempio $\{v_1, v_2\}$, quindi $V^{\perp} = \{(x,y,z,t) : x+y+z+t = x-z-t = 0\}$ e una base di $V^{\perp}$ è data da w_1, w_2 con $w_1 = (1,-2,0,1), w_2 = (1,-2,1,0)$. Pertanto, V è lo spazio delle soluzioni del sistema $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$.

2. Dati due sottospazi $W_1, W_2 \subset V$ di rispettive rappresentazioni cartesiane $A_1\mathbf{X} = \mathbf{0}_{\mathbf{k}^t}$ e $A_2\mathbf{X} = \mathbf{0}_{\mathbf{k}^s}$, con $A_1 \in M_{t,n}(\mathbf{k}), A_2 \in M_{s,n}(\mathbf{k}), \Longrightarrow$ per Oss. 4.3.5.3. il sottospazio $W_1 \cap W_2$ ha rappresentazione cartesiana $A\mathbf{X} = \mathbf{0}_{\mathbf{k}^{t+s}}$, con $A = \binom{A_1}{A_2} \in M_{t+s,n}(k)$.

7.6.2 Cambi di coordinate nel piano (e nello spazio)

Tutto ciò che diremo esplicitamente per il piano può, con le ovvie modifiche, essere letto nello spazio.

Notazione 7.6.4 Dati nel piano due vettori $u_1 \nparallel u_2$ e un punto O,

$$\sigma(O; u_1, u_2)$$

denota il sistema di riferimento i cui assi coordinati sono le rette individuate da O e dai due vettori[22].

Definizione 7.6.5 *Un sistema di riferimento $\sigma(O'; u'_1, u'_2)$ è detto:*

- ottenuto da $\sigma(O; u_1, u_2)$ per traslazione *se* $u'_1 = u_1$ *e* $u'_2 = u_2$;
- ottenuto da $\sigma(O; u_1, u_2)$ per cambio di base *se* $O' = O$.

Proposizione 7.6.6 *Assegnati nel piano un punto A e due sistemi di riferimento $\sigma(O; u_1, u_2)$, $\sigma(O'; u'_1, u'_2)$, (x, y) e (x', y') denotino rispettivamente le coordinate di A nei due riferimenti. Inoltre, posto $F = \{u_1, u_2\}, F' = \{u'_1, u'_2\}$, sia $P = M^F_{F'}$, si ha che:*

1. *se $O'(a, b)$ in $\sigma(O; u_1, u_2)$ e $\sigma(O'; u'_1, u'_2)$ è ottenuto da $\sigma(O; u_1, u_2)$ per traslazione, si ha:*
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix};$$
2. *se $\sigma(O'; u'_1, u'_2)$ è ottenuto da $\sigma(O; u_1, u_2)$ per cambio di base, si ha:*
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Dim. Dimostriamo solo 2. perché 1. è già stato fatto in Es. 2.1.6. Posto $u = P - O$, si ha $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^F_u$, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M^{F'}_u$, poiché $M^F_u = M^F_{F'} \cdot M^{F'}_u$ si ha la tesi.

Teorema 7.6.7 *Con le stesse ipotesi di Prop. 7.6.6, si ha:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Dim. Siano $\sigma" := (\sigma(O'; u_1, u_2))$ e $A(x", y")$ in $\sigma"$, essendo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x" \\ y" \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x" \\ y" \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ si ha la tesi.

Osservazione 7.6.8 Discende dal Teor. 7.6.7 che ogni trasformazione di coordinate cartesiane del piano si compone di una traslazione e di un cambio di base.

[22] Le rette in questione sono orientate come u_1, u_2, e hanno come segmenti unitari quelli rappresentati da u_1, u_2.

7.7 Trasformazioni di coordinate cartesiane

Quanto visto nel piano (e nello spazio) può essere generalizzato astrattamente.

Definizione 7.7.1 *Una matrice* $P \in M_n(\mathbb{R})$ *è detta* ortogonale reale *se* $P = M_F^{E_n}$*, con* F *b.o.n.*[23] *di* $\mathbb{R}^n$*.*

Proposizione 7.7.2 *Se* $P \in M_n(\mathbb{R})$ *si ha* $d(P) = \pm 1$*.*

Dim. Si ha $P^{-1} =^t P$ e $d(^tP) = d(P)$, poiché $PP^{-1} = I_n$ si ha $d(P^2) = \pm 1$.

Definizione 7.7.3 *Una matrice ortogonale reale* $P \in M_n(\mathbb{R})$ *è detta* speciale *se* $d(P) = 1$*.*

Proposizione 7.7.4 *Siano* $P \in M_n(\mathbb{R})$ *e* $\varphi \in End(\mathbb{R}^n)$ *con* $M_{\varphi(E_n)}^{E_n} = P$*, sono fatti equivalenti:*

1. *P è ortogonale,*
2. $v_1.v_2 = \varphi(v_1).\varphi(v_2),\ \forall\, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$,
3. $|v| = |\varphi(v)|,\ \forall\, v \in \mathbb{R}^n$.

Dim. 1. $\Longrightarrow$ 2. Per la linearità di φ basta provare che

$$e_i.e_j = \varphi(e_i).\varphi(e_j),\ \forall\, 1 \leq i, j \leq n,$$

e questo segue dall'ortogonalit'a di P;
2. $\Longrightarrow$ 3. basta porre $v = v_1 = v_2$;
3. $\Longrightarrow$ 2. poiché:
$2(v_1.v_2) = |v_1 + v_2|^2 - |v_1|^2 - |v_2|^2$,
$2(\varphi(v_1).\varphi(v_2)) = |\varphi(v_1 + v_2)|^2 - |\varphi(v_1)|^2 - |\varphi(v_2)|^2$,
si ha la tesi;
2. $\Longrightarrow$ 1. da $\varphi(e_i).\varphi(e_j) = e_i.e_j$ discende che P è ortogonale.

Proposizione 7.7.5 *Un cambio di base mediante matrici ortogonali (speciali) lascia invariate le distanze (e gli angoli orientati).*

Dim. Detta P la matrice del cambiamento di base sia $\varphi \in End(\mathbb{R}^n)$ tale che $P = M_{\varphi(E_n)}^{E_n}$, siano inoltre $A, B \in \mathbb{R}^n$ due punti, σ il riferimento di partenza e σ' quello di arrivo, $u = A - O, v = B - O, \delta := d(A, B)$ calcolata in σ e $\delta' := d(A, B)$ calcolata in σ', si ha:

$$\delta = |u - v| = |\varphi(u - v)| = |\varphi(u) - \varphi(v)| = \delta'.$$

Definizione 7.7.6 *Una trasformazione di coordinate cartesiane che lasci invariate distanze e angoli orientati è detta* isometria *o* movimento[24]*.*

[23] Osserviamo esplicitamente che E_n è b.o.n. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

[24] I movimenti 'sono' tutte e sole le trasformazioni di coordinate cartesiane che si compongono di traslazioni e di cambi di base mediante matrici ortogonali speciali.

Esercizio 7.7.7

1. Provare che $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\varphi(x, y) = (4x, 2y)$ non è un'isometria.
2. Provare che $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\varphi(x, y) = (y, x)$ è un'isometria.

Chapter 8

Geometria Proiettiva

8.1 Introduzione

Nella *geometria euclidea* si studiano le proprietà delle figure che sono invarianti per movimenti.

Nella *geometria elementare* si studiano anche le le proprietà delle figure che non dipendono dalle distanze o dalle grandezze delle figure, ma solo dalla loro forma e proporzione *(proprietà di similitudine)*, mantenute, oltre che dai movimenti anche dalle *omotetie*[1] e dai cambiamenti di coordinate ottenuti componendo un numero finito di movimenti e omotetie.

Nella *geometria proiettiva* si studiano le proprietà delle figure che sono invarianti per *proiezione*. Semplici esempi mostrano che per usare correttamente lo strumento delle proiezioni occorre ampliare lo spazio $\mathbb{R}^3(\mathbb{R}^n)$ aggiungendo quei punti che i fondatori della geometria proiettiva chiamarono *punti all'infinito*[2]. La prima trattazione sistematica dei concetti fondamentali della geometria proiettiva è relativamente recente e dovuta a J.V. Poncelet (1788-1867).
È bene notare esplicitamente che, sebbene sia stato subito chiaro che l'ambiente in cui si operava era diverso dallo spazio ordinario, ai suoi inizi la geometria proiettiva fu vista soprattutto come uno strumento per sintetizzare i diversi problemi della geometria euclidea.

8.2 Prime definizioni e proprietà

Diamo la definizione astratta delle nozioni di geometria proiettiva, deducendone le proprietà piú salienti. Salvo avviso contrario d'ora in poi V sarà uno spazio vettoriale reale di dimensione $n+1, n \geq 0$.

[1] Cambi di base corrispondenti a matrici della forma $P = cI$, $c \in \mathbb{R}$.

[2] n.b. le prime proprietà invarianti per proiezione e lo stesso concetto di punto all'infinito sono già presenti nella *teoria prospettica* dei maestri del Rinascimento (italiano).

Definizione 8.2.1 *1. Lo* spazio proiettivo individuato da V *è l'insieme dei sottospazi vettoriali di dimensione* 1 *di* V *ed è denotato*

$$\mathbb{P}(V).$$

2. La dimensione di $\mathbb{P}(V)$ *è* $\dim_{\mathbb{R}} V - 1$[3].

3. Un punto $\xi \in \mathbb{P}(V)$ *è un sottospazio* $L \subset V$, *con* $\dim_{\mathbb{R}} L = 1$.

Osservazione 8.2.2 1. Ogni $v \in V \setminus \{0_V\}$ genera il sottospazio 1-dimensionale $L := \mathcal{L}(\{v\}) =< v >= \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$ e $< v >$, se considerato come punto di $\mathbb{P}(V)$, sarà indicato $[v]$;

2. due vettori $v, w \in V \setminus \{0_V\}$ definiscono lo stesso punto $[v] \in \mathbb{P}(V)$, ossia $[v] = [w] \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^*$ tale che $w = \lambda v$;

3. se $\dim_{\mathbb{R}} V = 1 \Longrightarrow \mathbb{P}(V)$ è ridotto a un solo punto.

Definizione 8.2.3 *1. Una* retta proiettiva (reale) *è uno spazio proiettivo (reale) di dimensione* 1,

2. Un piano proiettivo (reale) *è uno spazio proiettivo (reale) di dimensione* 2, *eccetera.*

Osservazione 8.2.4 Segue dalla definizione che $\mathbb{P}(V)$ è l'insieme quoziente $V \setminus \{0_V\}/\sim$, dove $\sim$ è la relazione di equivalenza: $v \sim v'$ se $v = \lambda v'$ con $\lambda \in \mathbb{R}^*$[4].

In particolare

Definizione 8.2.5 *Se* $V = \mathbb{R}^{n+1} \Longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$, *è detto* $n-$spazio proiettivo numerico (reale) *ed è denotato* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.

Notazione 8.2.6 $\forall\, 0^n_{\mathbb{R}} \neq (x_0, x_1, \ldots, x_n)\mathbb{R}^{n+1}$ *il corrispondente punto di* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ *sarà denotato con* $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$[5].

8.3 Riferimenti Proiettivi

Definizione 8.3.1 *Dati* $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ *ed* $E = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ *una base di* V,

1. si dice che E definisce un sistema di coordinate omogenee su $\mathbb{P}$ *o un* riferimento proiettivo di $\mathbb{P}$, *denotato* $\varepsilon_0\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$*;*

2. se $V \setminus \{0_V\} \ni v = x_0\varepsilon_0 + x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n$, *gli scalari* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *sono detti* coordinate omogenee del punto $P = [v] \in \mathbb{P}$ rispetto al riferimento E *e scriveremo* $P[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *per denotare il punto* $P \in \mathbb{P}$ *di coordinate omogenee* $x_0, x_1, \ldots, x_n$;

[3] n.b. se $V =< 0_V > \Longrightarrow \mathbb{P}(V) = \emptyset$ e si pone $\dim\mathbb{P}(V) = -1$.
[4] Ricordiamo che $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
[5] Vale $[x_0, x_1, \ldots, x_n] = [y_0, y_1, \ldots, y_n] \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^*$ tale che $y_i = \lambda x_i\, \forall\, 0 \leq i \leq n$.

3. *gli* $(n+1)$ punti fondamentali del riferimento E *sono*

$$[\varepsilon_0] =: F_0[1,0,\dots,0],\dots,[\varepsilon_n] =: F_n[0,0,\dots,1],$$

mentre il punto unità *è*

$$U[1,1,\dots,1] := [\varepsilon_0+\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n].$$

Osservazione 8.3.2 Siccome, $\forall\, v \in V \setminus \{0_V\}$ e $\lambda \in \mathbb{R}^*$, si ha $[v]=[\lambda v]$ e $\lambda v = \sum_{i=0}^{n} \lambda x_i \varepsilon_i$, se $v = \sum_{i=0}^{n} x_i\varepsilon_i$ (rispetto alla base E data), si ha che le coordinate omogenee di un punto $P=[v]\in\mathbb{P}$, in un riferimento proiettivo dato, sono determinate solo a meno di un fattore di proporzionalità nonnullo da P[6]. Inoltre, se anziché E si considera la base proporzionale $H = \{\mu\varepsilon_0,\mu\varepsilon_1,\dots,\mu\varepsilon_n\}$ per qualche $\mu\in\mathbb{R}^*$, essendo $v=\sum_{i=0}^{n} x_i\varepsilon_i$ e $\mu v = \sum_{i=0}^{n} x_i(\mu\varepsilon_i)$, $\forall\, v \in V\setminus\{0_V\}$, le coordinate omogenee di $[v]=[\mu v]$ nei due riferimenti di $\mathbb{P}$ definiti rispettivamente da E ed H sono le stesse. Pertanto, due sistemi di coordinate omogenee sono considerati identici se sono definiti da basi proporzionali.

Definizione 8.3.3 *Nello spazio proiettivo numerico reale* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$:

1. *il riferimento proiettivo definito dalla base canonica* E_{n+1} *di* $\mathbb{R}^{n+1}$ *è detto* riferimento proiettivo standard;

2. $x_0,\dots,x_n$ *sono le coordinate omogenee di un punto* $P[x_0,\dots,x_n]$ *nel riferimento proiettivo standard e sono dette* coordinate omogenee standard di P.

8.4 Sottospazi

8.4.1 Definizione

Definizione 8.4.1 *Se* $W \subset V$ *è sottospazio vettoriale, lo spazio proiettivo* $\mathbb{P}(W)$ *è un sottinsieme di* $\mathbb{P}(V)$ *ed è detto* sottospazio proiettivo *o* sottospazio lineare *di* $\mathbb{P}(V)$.

Osservazione 8.4.2 1. $\mathbb{P}(V)$ è sottospazio proiettivo[7] di se stesso;

2. per Def. 8.2.1.3., si ha dim $\mathbb{P}(W)$ $=\dim_{\mathbb{R}} W - 1$.

Definizione 8.4.3 1. *Dato un sottospazio vettoriale* $W\subset V$, *il numero dim* $\mathbb{P}(V)-$ *dim* $\mathbb{P}(W)$ *è detto* codimensione di $\mathbb{P}(W)$ in $\mathbb{P}(V)$[8];

[6] Ossia, se nel riferimento $\varepsilon_0\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n$, le coordinate omogenee di un punto $P\in\mathbb{P}$ sono $x_0,x_1,\dots,x_n$, lo sono anche $\lambda x_0,\lambda x_1,\dots,\lambda x_n$, $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}^*$.

[7] Detto *improprio*.

[8] Vale: dim $\mathbb{P}(V)-$ dim $\mathbb{P}(W) = \dim_{\mathbb{R}}V - \dim_{\mathbb{R}}W$.

2. *i sottospazi proiettivi di codimensione* 1 *di uno spazio proiettivo* $\mathbb{P}(V)$ *sono detti* iperpiani di $\mathbb{P}(V)$.

8.4.2 Rappresentazione cartesiana

Proposizione 8.4.4 *Fissato nello spazio proiettivo* $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ *un sistema di coordinate omogenee* $E = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$, *un'equazione lineare omogenea*

$$a_0X_0 + a_1X_1 + \cdots + a_nX_n = 0 \tag{8.1}$$

nelle indeterminate $X_0, X_1, \ldots, X_n$, *con coefficienti* $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \neq 0_{\mathbb{R}^{n+1}}$ *è l'*equazione cartesiana *di un iperpiano di* $\mathbb{P}$.

Dim. L'equazione (8.1) rappresenta un sottospazio vettoriale $H \subset V$ di dimensione n, i punti $P = [v] \in \mathbb{P}$, le cui coordinate omogenee rispetto alla base E soddisfano (8.1), sono tutti e soli i quelli per cui $v \in H, v \neq 0_V$ $\therefore$ (8.1) è soddisfatta da tutti e soli i punti dell'iperpiano $\mathbb{H} := \mathbb{P}(H) \subset \mathbb{P}$ $\therefore$ ne è un'equazione cartesiana.

Osservazione 8.4.5 Essendo l'equazione (8.1) omogenea un'$(n+1)$-pla $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0_{\mathbb{R}^{n+1}}\}$ ne è una soluzione $\iff$ anche l'$(n+1)$-pla $(\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^*$ lo è, ha pertanto senso[9] dire se le coordinate omogenee di un punto $P \in \mathbb{P}$ soddisfano (8.1) o meno.

Definizione 8.4.6 *L'iperpiano di* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ *di equazione cartesiana*

$$x_i = 0,\ \forall\, X \leq i \leq n,$$

denotato $\mathbb{H}_i$, *è detto* i-esimo iperpiano coordinato[10].

Esempio 8.4.7 Ogni iperpiano di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ ha dimensione 0, ossia consiste in un sol punto; in particolare segnaliamo gli 'iperpiani' $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ dati dai punti fondamentali $\mathbb{H}_0 = \{[0,1]\}, \mathbb{H}_1 = \{[1,0]\}$.

Il risultato di Prop. 8.4.4 può essere generalizzato.

Proposizione 8.4.8 *Fissato nello spazio proiettivo* $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ *un sistema di coordinate omogenee* $\varepsilon_0\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$, *un sistema di equazioni lineari omogenee*

$$\begin{cases} a_{10}X_0 + a_{11}X_1 + \cdots + a_{1n}X_n = 0 \\ a_{20}X_0 + a_{21}X_1 + \cdots + a_{2n}X_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{t0}X_0 + a_{t1}X_1 + \cdots + a_{tn}X_n = 0 \end{cases} \tag{8.2}$$

nelle indeterminate $X_0, X_1, \ldots, X_n$, *è il* sistema di equazioni cartesiane *di un sottospazio proiettivo di* $\mathbb{P}$.

[9] Non ha invece senso chiedersi se un'equazione lineare non omogenea $a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ sia soddisfatta o meno da un punto di $\mathbb{P}$ in quanto se una $(n+1)$-pla la soddisfa non è detto che lo facciano anche tutte quelle proporzionali! Per esempio, data $X_1 - X_2 - 1 = 0, (0,2,1)$ ne è soluzione mentre $(0,4,2)$ no.

[10] $\mathbb{H}_i = \{[x_0, x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} : x_i = 0\}$.

Dim. Il sistema (8.2) individua un sottospazio vettoriale $W \subset V$, del quale (8.2) sono equazioni cartesiane. L'insieme dei punti $P = [v] \in \mathbb{P}$, le cui coordinate omogenee nella base data soddisfano (8.2), sono tutti e soli i quelli per cui $v \in W, v \neq 0_V \therefore$ (8.2) è soddisfatto da tutti e soli i punti del sottospazio $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P} \therefore$ ne costituisce le equazioni cartesiane.

Osservazione 8.4.9

1. Dette (a_{ij}) la matrice dei coefficienti e $\rho = \rho(A)$, si ha dim $W = n - \rho$ e quindi dim $\mathbb{P}(W) = \dim \mathbb{P} - \rho = n - \rho$, ossia $\mathbb{P}(W)$ ha codimensione ρ in $\mathbb{P}$.
2. Ogni sottospazio proiettivo $\mathbb{P}' \subset \mathbb{P}$ possiede equazioni cartesiane[11].
3. Poiché un punto di $\mathbb{P}^n, n \geq 1$ è essenzialmente una $(n+1)$-pla ordinata di numeri reali non tutti nulli[12] un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^n$ può essere visto come l'insieme delle soluzioni non banali[13] di un sistema di equazioni lineari omogenee in $n+1$ incognite, ossia:

   la geometria proiettiva dei sottospazi di $\mathbb{P}^n$ può essere interpretata come lo studio delle proprietà degli insiemi di soluzioni non banali dei sistemi di equazioni lineari omogenee in $n+1$ incognite.

Proposizione 8.4.10 *Se $\mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2) \subset \mathbb{P}$ sono due sottospazi proiettivi anche $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) \subset \mathbb{P}$ è tale e vale*

$$\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2).$$

Dim. Le equazioni cartesiane di $\mathbb{P}(W_1)$ e $\mathbb{P}(W_2)$ siano rispettivamente $A_1\mathbf{X} = \mathbf{0}, A_2\mathbf{X} = \mathbf{0}$, dove $A_1 \in M_{t,n+1}(\mathbb{R}), A_2 \in M_{s,n+1}(\mathbb{R})$. Si ha che $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) \subset \mathbb{P}$ è il luogo dei punti di $\mathbb{P}$ le cui coordinate omogenee soddisfano sia $A_1\mathbf{X} = \mathbf{0}$ che $A_2\mathbf{X} = \mathbf{0}$, ossia (vedi Es. 7.6.3) $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$ e $A\mathbf{X} = \mathbf{0}$, con $A = \begin{pmatrix} \frac{A_1}{A_2} \end{pmatrix} \in M_{t+s,n}(\mathbf{k})$. ne è rappresentazione cartesiana.

Osservazione 8.4.11 Si ha $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \emptyset \iff W_1 \cap W_2 =< 0_V >$ i.e. $A\mathbf{X} = \mathbf{0}$ ha solo la soluzione nulla.

8.4.3 Generatori

Definizione 8.4.12 *L'intersezione di tutti i sottospazi di $\mathbb{P}$ che contengono un dato sottinsieme $\emptyset \neq J \subset \mathbb{P}$ è detta* sottospazio generato[14] da J *e denotata* $L(J)$.

[11] n.b. il sistema di equazioni cartesiane di un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}$ non è unico infatti due sistemi di equazioni lineari (omogenee nelle $x_0, x_1, \ldots, x_n$), sono equazioni cartesiane dello stesso sottospazio $\iff$ sono equivalenti.

[12] Assegnati a meno di un fattore di proporzionalità nonnullo.

[13] Ognuna presa a meno di un fattore di proporzionalità nonnullo.

[14] Per Es. 7.2.3.6., $L(J)$ è un sottospazio di $\mathbb{P}$ e, per definizione, è il piú piccolo sottospazio di $\mathbb{P}$ contenente J.

Osservazione 8.4.13 1. $L(S) = S \iff S$ è sottospazio proiettivo.

2. Se $J = \{P_1, \dots, P_t\}$, $P_i \in \mathbb{P}$ anziché $L(\{P_1, \dots, P_t\})$ scriveremo
$$L(P_1, \dots, P_t)$$
e diremo che $P_1, \dots, P_t$ *generano* $L(P_1, \dots, P_t)$.

3. $\dim L(P_1, \dots, P_t) \leq t-1$, infatti, se $P_1 = [v_1], \dots, P_t = [v_t] \Longrightarrow L(P_1, \dots, P_t) = \mathbb{P}(\mathcal{L}\{v_1, \dots, v_t\})$ e $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{L}\{v_1, \dots, v_t\} \leq t$, se vale $\dim L(P_1, \dots, P_t) = t-1$, i punti $P_1, \dots, P_t$ sono detti *linearmente indipendenti*, altrimenti sono detti *linearmente dipendenti*.

Esempio 8.4.14 1. Due punti sono l.i. $\iff$ sono distinti[15];

2. tre punti sono l.i. $\iff$ non sono allineati[16];

3. segue dalla definizione che se i punti $P_1, \dots, P_t$ sono l.i., necessariamente $t \leq n+1$ e ogni sottinsieme di $\{P_1, \dots, P_t\}$ è costituito da punti l.i..

Definizione 8.4.15 *I punti* $P_1, \dots, P_t \in \mathbb{P}$ *si dicono* in posizione generale *se sono l.i.*[17] *oppure se* $t > n+1$ *e* $n+1$ *tra loro, comunque presi, sono l.i.*[18].

Osservazione 8.4.16 Poiché ogni sottospazio vettoriale $W \subset V$ ha una base (finita!), ogni sottospazio proiettivo $S \subset \mathbb{P}$ può essere generato da un numero finito (pari a $\dim S + 1$!) di suoi punti l.i..

8.4.4 Rappresentazione parametrica

Proposizione 8.4.17 *Siano* $S \subset \mathbb{P}$ *un sottospazio di dimensione* t *e siano* $[v_0], [v_1], \dots, [v_t] \in S$ *l.i.,* $\Longrightarrow \forall\, P \in S$ *si ha*
$$P = [\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_t v_t]$$
per opportuni $\lambda_0, \dots, \lambda_t \in \mathbb{R}$*, non tutti nulli e definiti a meno di un comune fattore di proporzionalità.*

Dim. Sia $S = \mathbb{P}(W)$, si ha $W = \mathcal{L}(v_0, v_1, \dots, v_t)$, inoltre $\forall\, w \in W$ sono univocamente determinate le sue componenti rispetto alla base $\{v_0, v_1, \dots, v_t\}$.

---

[15] Due punti $P \neq Q \in \mathbb{P}$ generano una retta $\therefore$ per due punti $P \neq Q \in \mathbb{P}$ passa un'unica retta: $L(P, Q)$.

[16] Tre punti non allineati $P, Q, R \in \mathbb{P}$ generano un piano $\therefore$ per tre punti non allineati $P, Q, R \in \mathbb{P}$ passa un unico piano: $L(P, Q, R)$.

[17] Nel qual caso, per Es. 8.4.14.3., si ha $t \leq n+1$.

[18] n.b. in quest'ultimo caso si ha $L(P_1, \dots, P_t) = \mathbb{P}$.

Osservazione 8.4.18 1. Posto $P_i = [v_i], 0 \le i \le t$ supponiamo che le componenti di v_i rispetto a una base $E = \{\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n\}$ di V siano $(p_{i0}, \dots, p_{in})$ e che sia $P = P[x_0, x_1, \dots, x_n] \in S$, si ha

$$\begin{cases} x_0 = \lambda_0 p_{00} + \lambda_1 p_{10} + \cdots + \lambda_t p_{t0} \\ x_1 = \lambda_0 p_{01} + \lambda_1 p_{11} + \cdots + \lambda_t p_{t1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \lambda_0 p_{0n} + \lambda_1 p_{1n} + \cdots + \lambda_t p_{tn} \end{cases} \tag{8.3}$$

(8.3) sono dette *equazioni parametriche del sottospazio S*. Osserviamo che esse dipendono oltre che dalla scelta dei punti P_i, che generano S, anche dalla scelta dei vettori $v_i \in V$, che li individuano, $\therefore$ dalla scelta delle coordinate omogenee dei P_i.

2. Per $t = 1$ si ottengono le *equazioni parametriche della retta* $L(P, Q)$

$$\begin{cases} x_0 = \lambda_0 p_{00} + \lambda_1 p_{10} \\ x_1 = \lambda_0 p_{01} + \lambda_1 p_{11} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \lambda_0 p_{0n} + \lambda_1 p_{1n} \end{cases} \tag{8.4}$$

8.4.5 Equazioni cartesiane di iperpiani

Se $\mathbb{P}$ è un piano proiettivo ed r è una sua retta data mediante due punti $P[p_0, p_1, p_2] \neq Q[q_0, q_1, q_2] \Longrightarrow r$ ha *equazione cartesiana:*

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{8.5}$$

il primo membro di (8.5) non è identicamente nullo perché $P \neq Q \Longrightarrow$ (8.5) è l'equazione di un iperpiano di $\mathbb{P}$ (cioè una retta!), questa retta contiene sia P che Q[19] pertanto è un'equazione cartesiana di $L(P, Q)$. Similmente si dimostra che se $\mathbb{P}$ è uno spazio proiettivo tridimensionale e

$P[p_0, p_1, p_2, p_3], Q[q_0, q_1, q_2, q_3], R[r_0, r_1, r_2, r_3]$ sono tre suoi punti non allineati $\Longrightarrow$ un'*equazione cartesiana* del piano $L(P, Q, R)$ è:

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{8.6}$$

[19]Sostituendo ordinatamente a X_0, X_1, X_2 le coordinate di P o Q il primo membro di (eq:rettapc) è il determinante di una matrice con due righe uguali e quindi è nullo.

8.5 Spazio congiungente

Definizione 8.5.1 *Se $S_1, S_2 \subset \mathbb{P}$ sono due sottospazi, il* sottospazio congiungente S_1 e S_2 *o* sottospazio somma di S_1 e S_2 *è il sottospazio $L(S_1 \cup S_2)$ (generato da $S_1 \cup S_2$ e denotato $L(S_1, S_2)$).*

Osservazione 8.5.2 Se $S_1 = \mathbb{P}(W_1), S_2 = \mathbb{P}(W_2)$ si ha

$$L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2),$$

infatti, $\forall$ sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(W) \supset S_1 \cup S_2$, si ha $\mathbb{P}(W) \supset \mathbb{P}(W_1 + W_2)$. Dal momento che W deve contenere sia W_1 che W_2 si ha $\mathbb{P}(W_1 + W_2) \subset L(S_1, S_2)$, d'altronde $W_1 + W_2 \supset W_1, W_1 + W_2 \supset W_2 \Longrightarrow \mathbb{P}(W_1 + W_2) \supset L(S_1, S_2)$.

8.5.1 La formula di Grassmann

Riportiamo ora un teorema sugli spazi vettoriali che ha notevoli riscontri geometrici.

Teorema 8.5.3 (Formula di Grassmann (1809-1877)) *Dati U, W sottospazi di un* **k***-spazio vettoriale V, si ha*

$$\dim_{\mathrm{k}} U + W = \dim_{\mathrm{k}} U + \dim_{\mathrm{k}} W - \dim_{\mathrm{k}} U \cap W.$$

Dim. Siano $r = \dim_{\mathrm{k}} U, s = \dim_{\mathrm{k}} W, d = \dim_{\mathrm{k}} U \cap W$ e $F = \{f_1, \ldots, f_d\}$ una base di $U \cap W$. Completiamo F a base $G = \{f_1, \ldots, f_d, g_1, \ldots, g_{r-d}\}$ di U e a base $H = \{f_1, \ldots, f_d, h_1, \ldots, h_{s-d}\}$ di W. Per provare il teorema basta provare che $G \cup H$ è una base di $U + W$. Chiaramente $G \cup H$ è sistema di generatori di $U + W$. Una relazione $\sum_{i=1}^{d} a_i f_i + \sum_{j=1}^{r-d} b_j g_j + \sum_{l=1}^{s-d} c_l h_l = 0$ implica

$$W \ni -\sum_{l=1}^{s-d} c_l h_l = \sum_{i=1}^{d} a_i f_i + \sum_{j=1}^{r-d} b_j g_j \in U, \tag{8.7}$$

ossia, entrambi i membri di (8.7) stanno in $U \cap W$. $\exists$ quindi $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbf{k}$ tali che $\sum_{i=1}^{d} a_i f_i + \sum_{j=1}^{r-d} b_j g_j = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i f_i = -\sum_{l=1}^{s-d} c_l h_l$ da cui:

- $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i f_i + \sum_{l=1}^{s-d} c_l h_l = 0$ e
- $\sum_{i=1}^{d} (a_i - \lambda_i) f_i + \sum_{j=1}^{r-d} b_j g_j = 0.$

Essendo H e G basi si ha: $\lambda_1 = \cdots = \lambda_d = c_1 = \cdots = c_{s-d} = 0$ come pure $a_1 - \lambda_1 = \cdots = a_d - \lambda_d = c_1 = \cdots = c_{s-d} = 0$ $\therefore$ $G \cup H \subset U + W$ è un insieme libero (di generatori).

Osservazione 8.5.4 Dati due sottospazi proiettivi $S_1, S_2 \subset \mathbb{P}$ tali che $S_1 = \mathbb{P}(W_1), S_2 = \mathbb{P}(W_2)$, con $W_1, W_2 \subset V$ sottospazi vettoriali, vale la *(formula di Grassmann proiettiva):*

$$\dim\, L(S_1, S_2) = \dim\, S_1 + \dim\, S_2 - \dim\, (S_1 \cap S_2),$$

che discende immediatamente dal Teor. 8.5.3 infatti $L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2)$ e $S_1 \cap S_2 = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$ e dal fatto che $\dim \mathbb{P}(\star) = \dim (\star) - 1$, $\forall$ spazio e sottospazio vettoriale $(\star)$, tenendo anche conto del fatto che $S_1 \cap S_2 = \emptyset \Longrightarrow \dim\, (S_1 \cap S_2) = -1$,

Definizione 8.5.5 *Due sottospazi* $\mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2) \subset \mathbb{P}$ *si dicono* incidenti *(risp.* sghembi) *se* $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) \neq \emptyset$ *(risp.* $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \emptyset$*) (in particolare un punto* $P \in \mathbb{P}$ *e un sottospazio* $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}$ *sono incidenti se* $P \in \mathbb{P}(W)$*).*

Esercizio 8.5.6

1. Dati $S_1 = r$ retta proiettiva e $S_2 = P \in \mathbb{P}$, si ha che $L(r, P)$ è un piano se $P \notin r$, la retta r stessa se $P \in r$.
2. Date due rette proiettive $S_1 = r_1, S_2 = r_2$, lo spazio congiungente $L(r_1, r_2)$ ha dimensione $3, 2, 1$ a seconda che r_1, r_2 siano sghembe, incidenti, coincidenti.

8.5.2 Sottospazi in posizione generale

Osservazione 8.5.7

1. In Oss. 8.5.4, si ha $\dim L(S_1, S_2) \leq \dim \mathbb{P}$, vale pertanto la diseguaglianza:

   $$\dim\, (S_1 \cap S_2) \geq \dim\, S_1 + \dim\, S_2 - \dim\, \mathbb{P},$$

   in particolare, se $\dim\, S_1 + \dim\, S_2 \geq \dim \mathbb{P} \Longrightarrow S_1$ e S_2 sono incidenti perché risulta necessariamente $\dim\, (S_1 \cap S_2) \geq 0$ e ciò accade se solo se $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, risulta quindi in particolare che due sottospazi proiettivi sghembi tra loro hanno dimensioni la cui somma non supera $\dim \mathbb{P} - 1$.
2. In un piano proiettivo due rette qualsiasi si incontrano in almeno un punto.
3. In uno spazio proiettivo 3-dimensionale una retta e un piano si incontrano in almeno un punto.
4. In uno spazio proiettivo 3-dimensionale due piani qualsiasi hanno in comune almeno una retta.

Definizione 8.5.8 *Se l'intersezione di due sottospazi proiettivi* $S_1, S_2 \subset \mathbb{P}$ *ha la minima dimensione possibile* $\Longrightarrow$ S_1 *e* S_2 *sono detti* in posizione generale.

Esempio 8.5.9

1. Due rette di $\mathbb{P}^2$ sono in posizione generale se sono distinte.

2. Due rette di $\mathbb{P}^3$ sono in posizione generale se sono sghembe.
3. Una retta r e un piano π di $\mathbb{P}^3$ sono in posizione generale se $r \not\subseteq \pi$, ecc.

8.6 Proiezioni

Definizione 8.6.1 *Dati un sottinsieme $J \subset \mathbb{P}$ e un punto $P \in \mathbb{P}$, il* cono proiettante J da P, *denotato $C_P(J)$, è l'unione di tutte le rette che contengono P e almeno un punto di J, ossia*

$$C_P(J) = \cup_{Q \in J} L(Q, P).$$

Proposizione 8.6.2 *Se $S \subseteq \mathbb{P}$ è sottospazio proiettivo $\Longrightarrow$*

$$C_P(S) = L(S, P),\ \forall P \in \mathbb{P}.$$

In particolare, se $S = \{Q\}$ e $P \neq Q \Longrightarrow C_P(S) = L(Q, P)$.

Dim. Risulta $L(Q, P) \subset L(S, P), \forall Q \in S$, inoltre, $\forall\, R \in L(S, P)$ la retta $L(R, P) \subset L(S, P)$.

Corollario 8.6.3 *Se $S_1, S_2 \subset \mathbb{P}$ sono sottospazi proiettivi si ha*

$$L(S_1, S_2) = \cup_{P \in S_2} C_P(S_1).$$

Definizione 8.6.4 *Dati un iperpiano $\mathbb{H} \subset \mathbb{P}$ e un punto $P \in \mathbb{P} \setminus \mathbb{H}$, la* proiezione di $\mathbb{P}$ su $\mathbb{H}$ di centro P *è l'applicazione*

$$\pi_{P,\mathbb{H}} : \mathbb{P} \setminus \{P\} \longrightarrow \mathbb{H} \text{ definita da } \pi_{P,\mathbb{H}}(Q) = L(P, Q) \cap \mathbb{H},\ \forall Q \in \mathbb{P} \setminus \mathbb{H}$$

e $\forall\, J \subset \mathbb{P}$ sottinsieme, l'immagine di J mediante $\pi_{P,\mathbb{H}}$, ossia $\pi_{P,\mathbb{H}}(J)$, è detta proiezione di J da P in $\mathbb{H}$.

Osservazione 8.6.5 L'applicazione $\pi_{P,\mathbb{H}}$ associa a un qualsiasi punto $Q \neq P \in \mathbb{P}$ il punto di intersezione di $\mathbb{H}$ con $L(P, Q)$, pertanto, $\forall\, J \subset \mathbb{P}$ sottinsieme tale che $P \notin J$, si ha

$$\pi_{P,\mathbb{H}}(J) = \mathbb{H} \cap C_P(J).$$

Esempio 8.6.6 Considerando in $\mathbb{P}^n$ l'iperpiano $\mathbb{H}_0 : X_0 = 0$ e il punto $P[1, 0, \ldots, 0] \notin \mathbb{H}_0 \Longrightarrow \forall Q[x_0, x_1, \ldots, x_n] \neq P$, si ha:

$$\pi_{P,\mathbb{H}_0}(Q) = [0, x_1, \ldots, x_n],$$

infatti la retta $L(P, Q)$ consiste nell'insieme dei punti $[\lambda + \mu x_0, \mu x_1, \ldots, \mu x_n]$ al variare di $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$, il punto $\pi_{P,\mathbb{H}_0}(Q) \in \mathbb{H}_0 \cap L(P, Q)$ si ottiene in corrispondenza di $[\lambda, \mu] = [-x_0, 1]$.

Osservazione 8.6.7 L'operazione di proiettare un sottinsieme $J \subset \mathbb{P}$ in un iperpiano è la versione geometrica astratta dell'operazione grafica di rappresentare un oggetto tridimensionale J su un piano $\mathbb{H}$ cosí come esso appare da un punto di osservazione $P \notin \mathbb{H}$[20].

[20] Si tratta precisamente della costruzione su cui si basa il disegno prospettico.

8.7 Interpretazioni geometriche

8.7.1 Costruzione geometrica di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

Gli spazi proiettivi sono stati introdotti come ampliamenti di spazi $\mathbb{R}^n$ mediante l'aggiunta di certi punti, detti *impropri*.

Illustriamo ora la costruzione geometrica (dovuta a G. Desargues (1593-1662) che è alla base di queste nozioni.

Osserviamo innanzi tutto che $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ può essere pensato come il fascio Φ_O, insieme delle rette di $\mathbb{R}^2$ passanti per l'origine $O(0,0)$ (per Es. 7.2.3.8. si ha evidentemente una c.b.u. tra gli elementi di Φ_O e i sottospazi 1-dimensionali di $\mathbb{R}^2$) e che, dato $P[x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il punto $P_\lambda(\lambda x_0, \lambda x_1) \in \mathbb{R}^2$ descrive la retta di Φ_O corrispondente al punto $P[x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

Consideriamo in particolare:

$$\mathbb{H}_0[0,1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \longleftrightarrow \tilde{r} : X_0 = 0 \in \Phi_O.$$

Sia $r : X_0 = 1 \subset \mathbb{R}^2, \Longrightarrow \forall\, P[x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \{\mathbb{H}_0\}$ la corrispondente retta di Φ_O risulta $\nparallel r$ e quindi incontra r in un unico punto.
Viceversa, $\forall\ \Xi(1, \xi) \in r$ individua un'unica retta di Φ_O (precisamente quella corrispondente al punto $[1, \xi] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \{\mathbb{H}_0\}$!), ossia:

$$\exists \text{ c.b.u. tra } r \text{ e } \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \{\mathbb{H}_0\} \ \therefore\ \exists \text{ c.b.u. tra } r \cup \{\mathbb{H}_0\} \text{ e } \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

In altre parole:
$\mathbb{H}_0$ *può essere pensato come un punto all'* ∞, *aggiunto a* r *per ottenere* $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$,
o, ancora:
la retta $\tilde{r} \in \Phi_O$, *corrispondente a* $\mathbb{H}_0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ *può essere pensata come posizione limite della retta di* Φ_O *corrispondente a* $[1, \xi] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ *quando* $|\xi| \to +\infty$ (n.b. questo significa che tanto $[1, \xi] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ con $\xi \to +\infty$ quanto $[1, \xi] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ con $\xi \to -\infty$ dànno luogo alla posizione limite $\tilde{r}$).

La costruzione di Desargues può essere fatta a partire da un qualsiasi punto $\mathbb{H} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ e da una retta di $\mathbb{R}^2$ non passante per l'origine e avente $\mathbb{H}$ come direzione.

8.7.2 Estensione a $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

La costruzione di Desargues può anche essere generalizzata a $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, $\forall\, n > 1$, pensando questa volta $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ come l'insieme delle rette di $\mathbb{R}^{n+1}$ passanti per $O_{\mathbb{R}^{n+1}} = O(0, 0, \ldots, 0)$ (in c.b.u. con l'insieme dei sottospazi 1-dimensionali di $\mathbb{R}^{n+1}$).
Piú precisamente:

il punto $[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n \leftrightarrow$ alla retta $\mathbb{R}^{n+1} \supset (\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n), \lambda \in \mathbb{R}$, n.b. i punti di questa retta, tranne $O(0, \ldots, 0)$, corrispondente a $\lambda = 0$, dànno le diverse $(n+1)$-ple di coordinate omogenee di $[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n$.

I punti $P \in \mathbb{H}_0 : X_0 = 0$ corrispondono alle rette di $\mathbb{R}^{n+1}$ che passano per $O(0, 0, \ldots, 0)$ e sono contenute nell'iperpiano di $\mathbb{R}^{n+1}$ avente equazione $X_0 = 0$.
Consideriamo ora l'iperpiano $H : X_0 = 1 \subset \mathbb{R}^{n+1}$, ossia l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^{n+1}$ della forma $(1, \xi_1, \ldots, \xi_n), \xi_i \in \mathbb{R}$.
Le rette di $\mathbb{R}^{n+1}$ passanti per $O(0, 0, \ldots, 0)$ e non contenute nell'iperpiano di $\mathbb{R}^{n+1}$ avente equazione $X_0 = 0$, sono $\nparallel H$, pertanto, ognuna di esse ha in comune con H un unico punto. Si ha cosí una c.b.u.

$$j_0 : H^{21} \longrightarrow \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{H}_0 \quad \text{definita da } j_0(1, \xi_1, \ldots, \xi_n) = [1, \xi_1, \ldots, \xi_n],$$

con $j_0^{-1}([x_0, \ldots, x_n]) = (1, \frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0})$. Ossia, j_0 induce una c.b.u.:

$$\mathbb{R}^n \cup \mathbb{H}_0 \longleftrightarrow \mathbb{P}^n.$$

Gli elementi di $\mathbb{H}_0$ sono le direzioni delle rette di $\mathbb{R}^n$, ossia, le rette per l'origine di $\mathbb{R}^n$ $\leftrightarrow$ sottospazi vettoriali 1-dimensionali di $\mathbb{R}^{n+1}$ contenuti nell'iperpiano vettoriale $X_0 = 0$.

Anche in questo caso $\mathbb{H}_0$ e H possono essere sostituiti da un iperpiano $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}^n$ e da un iperpiano di $\mathbb{R}^{n+1}$ avente *giacitura*[22] W e non passante per l'origine.

Anziché

$$j_0 : H \longrightarrow \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{H}_0 \quad \text{definita da } j_0(1, \xi_1, \ldots, \xi_n) = [1, \xi_1, \ldots, \xi_n],$$

con inversa

$$j_0^{-1} : \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{H}_0 \longrightarrow H \quad \text{definita da } j_0^{-1}([x_0, \ldots, x_n]) = (1, \frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0})$$

Possiamo scrivere $j_0 : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{H}_0$ e $j_0^{-1} : \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{H}_0 \longrightarrow \mathbb{A}^n$ giustificando cosí il fatto che j_0 e j_0^{-1} sono dette rispettivamente:
applicazione di passaggio a coordinate omogenee[23],
applicazione di passaggio a coordinate non omogenee[24];
i punti di $\mathbb{H}_0$ sono detti *punti impropri* o *all'∞*,
quelli di $\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{H}_0$ sono detti *punti propri,*
$\mathbb{H}_0$ è detto *iperpiano improprio* o *all'∞ rispetto a x_0*;
sottolineiamo infine che le $n+1$ coordinate omogenee di un punto proprio $P[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{H}_0$ non sono determinate univocamente, ma sono determinati univocamente gli n rapporti $\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}$.

[21] Identificando H con $\mathbb{R}^n$ via la c.b.u. $(y_1, \ldots, y_n) \leftrightarrow (1, y_1, \ldots, y_n)$
[22] Ossia $\parallel$ all'iperpiano per l'origine corrispondente a W.
[23] Rispetto a x_0.
[24] Rispetto a x_0.

In particolare, in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ il punto $\mathbb{H}_0[0,1]$ è denotato talvolta ∞ e $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ è identificato con $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ via

$$j_0 : \mathbb{A}^1 = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{H}_0 \quad \text{definita da } j_0(x) = [1, x],$$

(o, in altri termini, al punto $\mathbb{H}_0$ si associa la coordinata non omogenea ∞).

Se, anziché $\mathbb{H}_0$ si considera uno qualsiasi degli iperpiani coordinati

$$\mathbb{H}_i : \; X_i = 0, 1 \leq i \leq n,$$

si ottengono le applicazioni

$$j_i : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{H}_i, \; j_i(y_0, \ldots, \widehat{y_i}, \ldots, y_n) = [y_0, \ldots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \ldots, y_n],$$

con inversa

$$j_i^{-1} : \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{H}_i \longrightarrow \mathbb{A}^n, \; j_i^{-1}([y_0, \ldots, y_i, \ldots, y_n]) = (\frac{y_0}{y_i}, \ldots, \frac{y_n}{y_i}),$$

j_i è l'applicazione di passaggio a coordinate omogenee mentre j_i^{-1} è quella di passaggio a coordinate non omogenee rispetto a x_i, come prima i punti di $\mathbb{H}_i$ sono detti impropri mentre gli altri sono detti propri e $\mathbb{H}_i$ è detto iperpiano improprio rispetto a x_i.

8.7.3 Modello di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

L'identificazione di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ con l'insieme Φ_0 delle rette per l'origine di $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \ni P = [u] \longleftrightarrow r : \; (O + tu, \, t \in \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

(tenendo conto dell'equazione della la sfera $\varsigma^n_{O,1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (di centro O e raggio 1)),

$$\varsigma^n_{O,1} := \{x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\},$$

induce un'applicazione surgettiva

$$\varkappa : \varsigma^n_{O,1} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

definita da:

$$varsigma^n_{O,1} \ni x \longmapsto \varkappa(x) = \text{ retta per } O \text{ contenente } x$$

ora, siccome ogni retta per O incontra $\varsigma^n_{O,1}$ in due punti simmetrici rispetto a O[25], x e $-x$, $\varkappa^{-1}(r)$ consta di 2 punti di $\varsigma^n_{O,1}$, $\forall\, r \in \mathbb{P}^n$.

[25] Cioè *antipodali* o *diametralmente opposti.*

Ossia, $\mathbb{P}^n$ è in c.b.u. con l'insieme delle coppie di punti antipodali $\{x,-x\}$ di $\varsigma^n_{O,1}$,

$$\therefore\ \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \text{ può essere pensato come } \varsigma^n_{O,1}/\sim$$

dove $x \sim y \iff \begin{cases} x = y & \text{oppure} \\ x = -y \end{cases}$.

In particolare $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, pensato come $\varsigma^2_{O,1}/\sim$ è una

'mezza tazza con mezzo bordo'.

8.8 Chiusura proiettiva

Se

- $y_1, \ldots, y_n$ indicano le coordinate di un punto variabile di $\mathbb{R}^n$,
- $x_0, x_1, \ldots, x_n$ indicano le coordinate omogenee di un punto variabile di $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$,

siccome

$$H:\ a_1Y_1 + \cdots + a_nY_n + a_0 = 0 \tag{8.8}$$

definisce un iperpiano di $\mathbb{R}^n$,
l'applicazione $j_0 : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{H}_0$ trasforma i punti di H nei punti propri dell'iperpiano

$$\mathbb{H}:\ a_1X_1 + \cdots + a_nX_n + a_0X_0 = 0\ \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \tag{8.9}$$

piú precisamente,
se $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ soddisfa (8.8) $\Longrightarrow j_0(y_1, \ldots, y_n)$[26] $\in \mathbb{P}^n$ soddisfa (8.9),
viceversa,
se $[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{H}$ è un punto proprio[27] $\Longrightarrow j_0^{-1}[x_0, \ldots, x_n]$[28] $\in H$.

Definizione 8.8.1 *L'iperpianp proiettivo $\mathbb{H}$ di equazione (8.9) è detto* chiusura proiettiva *o* proiettificazione *dell'iperpiano affine H di equazione (8.8) e i punti di $\mathbb{H} \setminus j_0(\mathbb{A}^n)$ sono detti* punti impropri di H *o* $\mathbb{H}$.

Proposizione 8.8.2 *Dato un sottospazio affine $S \subset \mathbb{R}^n$ di equazioni cartesiane:*

$$\begin{cases} a_{11}Y_1 + \cdots + a_{1n}Y_n + a_{10} = 0 \\ a_{21}Y_1 + \cdots + a_{2n}Y_n + a_{20} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{t1}Y_1 + \cdots + a_{tn}Y_n + a_{t0} = 0 \end{cases}, \tag{8.10}$$

[26] Ricordiamo che $j_0(y_1, \ldots, y_n) = [1, y_1, \ldots, y_n]$!
[27] Ossia $x_0 \neq 0$.
[28] Ricordiamo che $j_0^{-1}[x_0, \ldots, x_n] = (\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0})$.

l'applicazione j_0 *trasforma i punti di* S *nei punti propri del sottospazio proiettivo* $\tilde{S} \subset \mathbb{P}^n$ *di equazioni cartesiane:*

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + \cdots + a_{1n}X_n + a_{10}X_0 = 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}X_n + a_{20}X_0 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{t1}X_1 + \cdots + a_{tn}X_n + a_{t0}X_0 = 0 \end{cases}, \tag{8.11}$$

detto chiusura proiettiva *o* proiettificazione *di* S*.*

Osservazione 8.8.3 1. Se $n = 1$ i soli sottospazi affini propri sono i punti (=iperpiani) e ogni iperpiano affine $S \subset \mathbb{A}^1$ è un punto $\Longrightarrow$ $\tilde{S} = j_0(S)$ è un punto proprio di $\mathbb{P}^1$ e l'unico punto improprio di $\mathbb{P}^1$ non è punto improprio di alcun sottospazio affine proprio di $\mathbb{A}^1$;

2. se $n = 2$ i sottospazi affini sono i punti e le rette(=iperpiani!), come sopra la chiusura proiettiva di un punto proprio è il punto stesso.

   Sia $r : aX + bY + c = 0 \subset \mathbb{A}^2, \Longrightarrow j_0$ trasforma i punti di r nei punti propri di $\tilde{r} : aX_1 + bX_2 + cX_0 = 0 \subset \mathbb{P}^2$ (chiusura proiettiva di $j_0(r)$, $\tilde{r}$ consiste nei 'punti di $j_0(r)$ (propri!) e nel punto $[0, -b, a]$[29] $\in \tilde{r} \cap \mathbb{H}_0$). D'altra parte, ogni retta di $\mathbb{P}^2$, diversa dalla retta impropria, ossia, definita da un'equazione $aX_1 + bX_2 + cX_0 = 0$ con $(a, b) \neq (0, 0)$, è la chiusura proiettiva di una retta r del piano affine (di equazione $aX + bY + c = 0$).

   In tal modo, le rette di $\mathbb{P}^2$ passanti per un punto proprio $j_0(Q)$, per qualche $Q \in \mathbb{A}^2$, sono le chiusure proiettive delle rette che appartengono a $\Phi_Q \subset \mathbb{A}^2$, il fascio proprio di centro Q, quelle passanti per un punto improprio $[0, l, m]$ sono tutte, meno una (la retta impropria di equazione $x_0 = 0$), le chiusure proiettive delle rette di $\Phi_{(l,m)} \subset \mathbb{A}^2$, il fascio improprio di direzione (l, m)[30], la retta impropria $x_0 = 0$ non è la chiusura proiettiva di alcuna retta del piano affine;

3. se $n = 3$, i sottospazi affini sono i punti, le rette e i piani(=iperpiani!).

   Se $\pi : aX + bY + cZ + d = 0 \subset \mathbb{A}^3$ e $\tilde{\pi} : aX_1 + bX_2 + cX_3 + dX_0 = 0 \subset \mathbb{P}^3$ è la chiusura proiettiva di $j_0(\pi)$, i punti impropri di $\tilde{\pi}$ sono quelli della retta proiettiva $\tilde{\pi} \cap \mathbb{H}_0$, ossia i punti $[0, l, m, n]$ con (l, m, n) soluzione non banale di $aX + bY + cZ = 0$ (equazione omogenea associata all'equazione di π).

   Se invece $r : \begin{cases} aX + bY + cZ + d = 0 \\ a'X + b'Y + c'Z + d' = 0 \end{cases} \subset \mathbb{A}^3$ e $\tilde{r} : \begin{cases} aX_1 + bX_2 + cX_3 + dX_0 = 0 \\ a'X_1 + b'X_2 + c'X_3 + d'X_0 = 0 \end{cases} \subset \mathbb{P}^3$ è la chiusura proiettiva di $j_0(r)$, il punto improprio di $\tilde{r}$ è $[0, \lambda, \mu, \nu]$ con (λ, μ, ν) vettore direzionale di r (n.b. $[0, \lambda, \mu, \nu]$ è il punto improprio comune ai due piani proiettivi che individuano $\tilde{r}$).

[29] Osserviamo che $(-b, a)$ è un vettore direzionale di r!

[30] Consistente nell'insieme delle rette $\parallel$ con vettore direzionale (l, m).

Ogni piano proiettivo $\mathbb{P}^3 \supset \mathfrak{p} \neq \mathbb{H}_0$ è la chiusura proiettiva $\tilde{\pi}$ di un piano π dello spazio affine; ogni retta proiettiva $\mathbb{P}^3 \supset \mathfrak{r} \not\subseteq \mathbb{H}_0$ è la chiusura proiettiva $\tilde{r}$ di una retta r dello spazio affine e i piani di $\mathbb{P}^3$ contenenti $\mathfrak{r}$ sono tutti e soli i proiettificati dei piani del fascio Φ_r, ogni piano proiettivo $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{r} \subset \mathbb{H}_0, \mathfrak{p} \neq \mathbb{H}_0$ è la chiusura proiettiva $\tilde{\pi}$ di un piano π dello spazio affine appartenente al fascio improprio di direzione corrispondente a $\mathfrak{r}$ (la retta impropria data).

8.9 Sistemi lineari

Definizione 8.9.1 *Dato un sottospazio proiettivo proprio $S \subset \mathbb{P}$ con* dim $S = h \leq n-1$, *il* sistema lineare degli iperpiani di centro S *è*

$$\Lambda_1(S) := \{\mathbb{H} \subset \mathbb{P},\ dim\ \mathbb{H} = n-1, S \subset \mathbb{H}\}.$$

In particolare, se dim $S = n-2 \Longrightarrow \Lambda_1(S)$ *è detto* fascio di iperpiani (di centro S).

Esempio 8.9.2

1. Se $\mathbb{P}$ è un piano ed $S = P \in \mathbb{P}$ è un punto, si ha dim $\mathbb{P} = 2$, dim $S = 0 = 2-2$ e $\Lambda_1(S)$ è il fascio delle rette passanti per P; se invece $S = \mathfrak{r} \subset \mathbb{P}$ è una retta si ha dim $\Lambda_1(S) = 0$[31].

2. Se $\mathbb{P}$ è uno spazio proiettivo 3-dimensionale ed $S = \mathfrak{r} \subset \mathbb{P}$ è una retta, si ha dim $\mathbb{P} = 3$, dim $S = 1 = 3-2$ e $\Lambda_1(S)$ è il fascio dei piani di asse $\mathfrak{r}$; se $S = P \in \mathbb{P}$, si ha dim $\mathbb{P} = 3$, dim $S = 0 \neq 3-2$, $\Lambda_1(S)$ è detto *stella di piani per P* e vale dim $\Lambda_1(S) = 2$, se invece $S = \mathfrak{p} \subset \mathbb{P}$ è un piano si ha dim $\Lambda_1(S) = 0$.

3. Se $\mathbb{P}$ è un piano ed $S = P \in \mathbb{P}, \forall\, \mathfrak{l} \in \Lambda_1(S)$ può esprimersi come c.l. di due rette $\mathfrak{r} \neq \mathfrak{s} \ni P$.

   Se $\mathfrak{r}:\ a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 = 0, \mathfrak{s}:\ b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2 = 0 \Longrightarrow$ ogni altra retta di $\Lambda_1(S)$ ha equazione:

   $\lambda(a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2) + \mu(b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2) = 0,\ [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

8.10 Cambiamenti di coordinate

In questo § supporremo sempre $V = \mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{P} = \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \therefore$ dim $\mathbb{P} = n$, $E = \{\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n\}, H = \{\eta_0, \ldots, \eta_n\}$ basi di V, con $\varepsilon_0 \cdots \varepsilon_n$, $\eta_0 \cdots \eta_n$ riferimenti proiettivi corrispondenti.
Se $A = M_E^H \in Gl_{n+1}(\mathbb{R})$ è la matrice del cambio di base (da H a E) e $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ ha, rispettivamente, coordinate $x_0, x_1, \ldots, x_n$ relativamente a E e $y_0, y_1, \ldots, y_n$ relativamente a H, ossia vale $v = \sum_{i=0}^{n} x_i\varepsilon_i = \sum_{j=0}^{n} y_j\eta_j$, si ha:

$$y = Ax, \tag{8.12}$$

[31]Infatti $\Lambda_1(S)$ ha $\mathfrak{r}$ come unico elemento.

posto $[v] = P \in \mathbb{P}$ e interpretando ${}^t x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ come $n+1$-upla di coordinate omogenee di P nel riferimento $\varepsilon_0 \cdots \varepsilon_n$, si ha che una $n+1$-upla di coordinate omogenee di P nel riferimento $\eta_0 \cdots \eta_n$ è ${}^t y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$. Sostituendo x con una $n+1$-upla proporzionale λx[32], $\lambda \in \mathbb{R}^*$ da (8.12) si ottiene λy[33]. Osserviamo che A non è univocamente determinata dai riferimenti proiettivi $\varepsilon_0 \cdots \varepsilon_n$ e $\eta_0 \cdots \eta_n$, che individuano le corrispondenti basi di $\mathbb{R}^{n+1}$ solo a meno di un fattore di proporzionalità. Una diversa scelta delle basi sostituisce ad A una matrice αA, per qualche $\alpha \in \mathbb{R}^*$, fornendo $y = \alpha A x$, equivalente a $y = Ax$. Si ha pertanto la seguente:

Proposizione 8.10.1 *Dati due riferimenti proiettivi* $\varepsilon_0 \cdots \varepsilon_n$ *e* $\eta_0 \cdots \eta_n$ *di* $\mathbb{P}$, $\exists A \in Gl_{n+1}(\mathbb{R})$ (individuata a meno di un fattore di proporzionalità nonnullo) *tale che se si ha* $P[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *in* $\varepsilon_0 \cdots \varepsilon_n$ *e* $P[y_0, y_1, \ldots, y_n]$ *in* $\eta_0 \cdots \eta_n$*, le coordinate* x *e* y *sono legate dalla relazione* $y = Ax$ *di (8.12), detta* formula del cambiamento di coordinate omogenee.

Esempio 8.10.2 In $\mathbb{P} = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ consideriamo i riferimenti proiettivi $\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\eta_0\eta_1\eta_n$ associati rispettivamente alla base canonica E_3 e alla base $H = \{\eta_0, \eta_1, \eta_3\}$ con $\eta_0 = (1,2,1), \eta_1 = (1,0,1), \eta_3 = (1,1,1)$. Siccome $A = M_H^E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in Gl_3(\mathbb{R})$ risulta $A^{-1} = M_E^H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e infatti $(x,y,z) = \frac{y}{2}(1,2,1) + \frac{2x-y}{2}(1,0,1) + \frac{2z-2x}{2}(0,0,1)$.

8.11 Isomorfismi proiettivi e proiettività

8.11.1 Definizioni e prime proprietà

Definizione 8.11.1 *Dati* $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V), \mathbb{P}' = \mathbb{P}(V')$ *un'applicazione bigettiva* $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}'$ *è detta* isomorfismo proiettivo *di* $\mathbb{P}$ *su* $\mathbb{P}'$ *se*

$$\exists\, \varphi \in \mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}(V, V') \text{ tale che } f([v]) = [\varphi(v)],\ \forall\, [v] \in \mathbb{P},$$

l'isomorfismo proiettivo f *è detto* indotto da φ, *due spazi proiettivi* $\mathbb{P}, \mathbb{P}'$ *sono detti* isomorfi *se tra loro* $\exists$ *un isomorfismo proiettivo.*

Osservazione 8.11.2
1. Ogni $\varphi \in \mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}(V, V')$ induce un isomorfismo proiettivo $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}'$.
2. L'isomorfismo proiettivo è relazione di equivalenza tra spazi proiettivi, infatti $\forall$ spazio proiettivo $\mathbb{P}$, $Id_{\mathbb{P}} : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ è l'isomorfismo proiettivo indotto da $Id_V \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(V)$; se $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}'$ è l'isomorfismo proiettivo indotto da $\varphi \in \mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}(V, V') \Longrightarrow f^{-1} : \mathbb{P}' \longrightarrow \mathbb{P}$ è l'isomorfismo proiettivo indotto da $\varphi^{-1} \in \mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}(V', V)$; inoltre se $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}'$ e $g : \mathbb{P}' \longrightarrow \mathbb{P}$" sono gli isomorfismi proiettivi indotti rispettivamente

[32] Che dà un'altra $n+1$-upla di coordinate omogenee di P!
[33] Che a sua volta rappresenta ancora P!

da $\varphi \in \mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}(V, V')$ e $\psi \in \mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}(V', V")$ $\Longrightarrow g \circ f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}"$ è l'isomorfismo proiettivo indotto da $(\psi \circ \varphi) \in \mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}(V, V")$ giacché risulta $(g \circ f)[v] = g(f([v])) = g([\varphi(v)]) = [\psi(\varphi(v))] = [(\psi \circ \varphi)(v)]$.

3. Spazi proiettivi isomorfi hanno la stessa dimensione e piú precisamente, poiché per ogni $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V con $\dim_{\mathbb{R}} V = n + 1$, si ha $V \simeq \mathbb{R}^{n+1}$, per ogni spazio proiettivo n-dimensionale $\mathbb{P}$ risulta $\mathbb{P} \simeq \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ si ha quindi anche che spazi proiettivi della stessa dimensione sono isomorfi.

Definizione 8.11.3 *Una* proiettività, *è un isomorfismo proiettivo f di $\mathbb{P}$ in sé, i punti* fissi *di una proiettività f sono i $P \in \mathbb{P}$ tali che $f(P) = P$.*

8.11.2 Autovettori e punti fissi

Prima di procedere oltre, introduciamo alcune nozioni dalla teoria degli spazi vettoriali.

Definizione 8.11.4 *Dati un* $\mathbf{k}$*-spazio vettoriale V, e un $\varphi \in End_{\mathbf{k}}(V)$ un vettore $v \in V$ è detto* autovettore *per φ se $v \neq 0_V$ ed $\exists$ uno scalare $\lambda \in \mathbf{k}$ tale che $\varphi(v) = \lambda v$, nel qual caso $\lambda \in \mathbf{k}$ è detto* autovalore di φ, relativo all'autovettore v.

Esempio 8.11.5

1. Se $\varphi = Id_V \Longrightarrow \forall\, v \neq 0_V$ è autovettore di φ con autovalore 1.
2. Se $\varphi = 0 \Longrightarrow \forall\, v \neq 0_V$ è autovettore di φ con autovalore 0.
3. Se $\ker\varphi \neq 0_V \Longrightarrow \forall\, 0_V \neq v \in \ker\varphi$ è autovettore di φ con autovalore 0.
4. Determinare gli eventuali autovettori e autovalori di $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ definito da $\varphi(x, y) = (y, x)$.

Proposizione 8.11.6 *L'autovalore relativo a un autovettore v è univocamente determinato.*

Dim. Se $\lambda v = \varphi(v) = \mu v$ per qualche $\lambda, \mu \in \mathbf{k}$, da $(\lambda - \mu)v = 0_V$ si ricava $\lambda = \mu$ in quanto per definizione $v \neq 0_V$.

Esempio 8.11.7 L'endomorfismo $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ con $M^{E_2}_{\varphi(E_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ non ha autovettori.
Infatti, essendo $\varphi(x, y) = (-y, x)$, se $\exists\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ autovettore di φ, si avrebbe $(-y, x) = \varphi(x, y) = \lambda(x, y)$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}^*$, ossia $\begin{cases} -y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases} \Longrightarrow y = -\lambda^2 y$ ossia, $y(1 + \lambda^2) = 0 \Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow x = 0$ contro l'ipotesi $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

Proposizione 8.11.8 *Se* $\forall\, v \in V \setminus \{0_V\}$ *è autovettore di* $\varphi \in End_{\mathbf{k}}(V) \Longrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbf{k}$ *tale che* $\varphi = \lambda Id_V$.

Dim. Se $\dim_{\mathrm{k}} V = 1$, l'asserzione è ovvia in quanto ogni $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(V) \Longrightarrow \varphi = \lambda Id_V$[34]; supponiamo allora $\dim_{\mathrm{k}} V \geq 2$ e che $E = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ sia una base di V, per ipotesi esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{k}$ tali che $\varphi(\varepsilon_j) = \lambda_j \varepsilon_j$. Siano $1 \leq i \neq j \leq n$ e sia $v_{ij} := \varepsilon_i + \varepsilon_j$, per ipotesi $\exists\, \lambda_{ij} \in \mathbf{k}$ tale che

$$\varphi(v_{ij}) = \lambda_{ij} v_{ij} = \lambda_{ij}\varepsilon_i + \lambda_{ij}\varepsilon_j$$

d'altra parte, per linearità,

$$\varphi(v_{ij}) = \varphi(\varepsilon_i + \varepsilon_j) = \varphi(\varepsilon_i) + \varphi(\varepsilon_j) = \lambda_i\varepsilon_i + \lambda_j\varepsilon_j,$$

dall'eguaglianza $(\lambda_{ij} - \lambda_i)\varepsilon_i + (\lambda_{ij} - \lambda_j)\varepsilon_j = 0_V$, essendo E base, deduciamo $\lambda_{ij} = \lambda_i = \lambda_j$ e quindi $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n \therefore$ la tesi.

Proposizione 8.11.9 *Una proiettività* $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$, *individuata da un* $\varphi \in Aut_{\mathbb{R}}(V)$ *è individuata anche da* $\ell\varphi$, $\forall \ell \in \mathbb{R}^*$. *Viceversa, se* $\psi \in Aut_{\mathbb{R}}(V)$ *induce una proiettività* $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$, *individuata da un* $\varphi \in Aut_{\mathbb{R}}(V) \Longrightarrow \psi = \ell\varphi$ *per qualche* $\ell \in \mathbb{R}^*$.

Dim. Si ha $[(\ell\varphi)(v)] = [\ell\varphi(v)] = [\varphi(v)] = f(v), \forall\, v \in V \setminus \{0_V\}$, inoltre, siccome $\forall\, v \in V$ si ha $[\varphi(v)] = f([v]) = [\psi(v)]$, si ha anche che $\exists\, \ell_v \in \mathbb{R}^*$ tale che $\varphi(v) = \ell_v \psi(v)$. Mentre a priori ℓ_v dipende da $v \in V$, in realtà è lo stesso per tutti, infatti si ha:

$$\psi^{-1}(\varphi(v)) = \psi^{-1}(\ell_v\psi(v)) = \ell_v v,\ \forall\, v \in V \setminus \{O_V\},$$

ossia, ogni $v \in V \setminus \{O_V\}$ è autovettore di $\psi^{-1} \circ \varphi$ e questo, per Prop. 8.11.8, significa proprio che $\psi^{-1} \circ \varphi = \ell Id_V$, per qualche $\ell \in \mathbb{R}^*$.
In altre parole:

l'automorfismo che induce una proiettività è individuato solo a meno di un fattore di proporzionalità nonnullo.

Osservazione 8.11.10

1. $Id_{\mathbb{P}}$ è la proiettività 'individuata' da Id_V;
2. l'inversa f^{-1} di una proiettività 'individuata' da un automorfismo φ è una proiettività 'individuata' da φ^{-1};
3. la composizione $g \circ f$ di due proiettività f, g 'individuate' rispettivamente da $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{k}}(V)$ è una proiettività 'individuata' da $\psi \circ \varphi \Longrightarrow$

   le proiettività di $\mathbb{P}$ costituiscono un *gruppo di trasformazioni*[35], detto *gruppo proiettivo di* $\mathbb{P}$ e denotato $PGL(\mathbb{P})$, in particolare, il gruppo proiettivo di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è denotato $PGL_{n+1}(\mathbb{R})$ ed è detto *gruppo lineare proiettivo di ordine* $n + 1$.

[34] Infatti, $\dim_{\mathrm{k}} V = 1 \iff V \simeq \mathbf{k}$, possiamo quindi supporre $V = \mathbf{k}$, nel qual caso, posto $\lambda = \varphi(1_{\mathbf{k}})$, vale $\varphi(v) = \varphi(1_{\mathbf{k}} v) = v\varphi(1_{\mathbf{k}})$.

[35] Le proiettività sono in particolare bigezioni di $\mathbb{P}$ e i gruppi di trasformazioni di un insieme X sono i sottogruppi del gruppo $\Sigma(X)$ delle applicazioni bigettive di X in sé.

Proposizione 8.11.11 *Associando a ogni $\varphi \in Aut_{\mathbb{R}}(V)$ la corrispondente proiettività di $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$, si ottiene un omomorfismo surgettivo*

$$\pi : \quad Aut_{\mathbb{R}}(V) \longrightarrow PGL(\mathbb{P}).$$

Osservazione 8.11.12 Poiché $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(V)$ soddisfa

$$\pi(\varphi) = Id_{\mathbb{P}} \iff \varphi = \ell Id_V \text{ per qualche } \ell \in \mathbb{R}^*,$$

$$\ker \pi := \{\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(V) : \pi(\varphi) = Id_{\mathbb{P}}\} = \{\ell Id_V : \ell \in \mathbb{R}^*\}$$

è sottogruppo di $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(V)$ e vale $ker\pi \simeq \mathbb{R}^*$.

Definizione 8.11.13 *Dati un riferimento proiettivo $\varepsilon_0 \cdots \varepsilon_n$ in uno spazio proiettivo $\mathbb{P}$ e una proiettività $f \in PGL(\mathbb{P})$, $\forall \varphi \in Aut_{\mathbb{R}}(V)$ che induce f, si dice che la matrice $A := M^E_{\varphi(E)} \in Gl_{n+1}(\mathbb{R})$*[36] definisce f rispetto al riferimento proiettivo $\varepsilon_0 \cdots \varepsilon_n$.

Teorema 8.11.14 *Siano $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V), \mathbb{P}' = \mathbb{P}(V')$ due spazi proiettivi n-dimensionali, $P_0, \ldots, P_n, P_{n+1}$ e $Q_0, \ldots, Q_n, Q_{n+1}$ due $(n+2)$-uple ordinate di punti in posizione generale, rispettivamente di $\mathbb{P}$ e di $\mathbb{P}'$, $\exists!$ isomorfismo proiettivo*

$$f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}' \textit{ tale che } f(P_i) = Q_i, \, \forall 0 \leq i \leq n+1.$$

Dim. *(Esistenza)* Sia $P_i = [v_i], Q_i = [w_i], \forall\, 0 \leq i \leq n+1$. L'ipotesi di posizione generale per entrambe le $(n+2)$-uple[37] fa sí che $\{v_0, \ldots, v_n\}$ e $\{w_0, \ldots, w_n\}$ siano basi di V e V' rispettivamente. Si ha quindi:

$$v_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i, \;\; w_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \mu_j w_j, \;\; \lambda_0, \ldots, \lambda_n, \mu_0, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}^*. \quad (8.13)$$

Sostituendo eventualmente $\lambda_i v_i$ a v_i e $\mu_j w_j$ a w_j, possiamo supporre che in (8.13) tutti i coefficienti siano 1, ossia valga:

$$v_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} v_i, \;\; w_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} w_j. \quad (8.14)$$

inoltre, essendo $\{v_0, \ldots, v_n\}$ base di V e $\{w_0, \ldots, w_n\}$ base di V', $\exists!\, \varphi \in \mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}(V, V')$ tale che $\varphi(v_i) = w_i, \forall\, 0 \leq i \leq n$ e, per linearità, anche $\varphi(v_{n+1}) = w_{n+1}$, pertanto, l'isomorfismo proiettivo f indotto da φ ha le proprietà volute.
Unicità Sia $f' : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}'$ un altro isomorfismo proiettivo con le stesse proprietà, allora $g := f'^{-1} \circ f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ è una proiettività soddisfacente

[36] Ricordiamo che tale matrice non è univocamente determinata, infatti $B \in Gl_{n+1}(\mathbb{R})$ definisce f (nel riferimento proiettivo $\varepsilon_0 \cdots \varepsilon_n$) $\iff B = \lambda A$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

[37] Ossia, comunque si scelgano $n+1$ punti da ciascuna, i vettori corrispondenti generano uno spazio di dimensione $n+1$.

$g(P_i) = P_i, \forall\, 0 \leq i \leq n$, detto $\chi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(V)$ l'automorfismo associato risulta $\chi(v_i) = \alpha_i v_i$, $\forall\, 0 \leq i \leq n+1$ per qualche $\alpha_i \in \mathbb{R}^*$.
In particolare, $\alpha_{n+1}v_{n+1} = \chi(v_{n+1}) = \chi(\sum\limits_{i=0}^{n} v_i) = \sum\limits_{i=0}^{n} \chi(v_i) = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i v_i$ d'altronde si ha anche $\alpha_{n+1}v_{n+1} = \alpha_{n+1}\sum\limits_{i=0}^{n} v_i = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_{n+1}v_i$, risulta quindi

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{n+1} \therefore \chi(v_i) = \alpha_0 v_i \,\forall\, 0 \leq i \leq n+1 \therefore \chi = \alpha_0 Id_V$$

da cui $g = Id_{\mathbb{P}} \therefore f' = f$.

Corollario 8.11.15 *Una proiettività che lasci fissi $n+2$ punti in posizione generale è l'identità.*

Corollario 8.11.16 1. *Si determina (in modo inivoco) una proiettività di una retta proiettiva assegnando i trasformati di* 3 *punti distinti.*

2. *Una proiettività di un piano proiettivo è determinata assegnando i trasformati di* 4 *punti a* 3 *a* 3 *non allineati.*

Proposizione 8.11.17 *Sia $f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$ la proiettività individuata da un automorfismo $\varphi \in Aut_{\mathbb{R}}(V)$, i punti fissi di f sono tutti e soli quelli della forma $P = [v]$ con v autovettore di φ*[38].

Dim. Sia $P = [v]$, essendo $f(P) = [\varphi(v)]$, si ha $f(P) = P \iff [\varphi(v)] = [v] \iff \varphi(v) = \lambda v$, per qualche $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Osservazione 8.11.18 1. Si dimostra che ogni proiettività di uno spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}$ possiede almeno un punto fisso.

2. Si dimostra che ogni proiettività di uno spazio proiettivo reale $\mathbb{P}$ di dimensione pari possiede almeno un punto fisso.

3. La proiettività $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, definita da $[x_0, x_1] \mapsto [-x_1, x_0]$, non ha punti fissi.

8.11.3 Proiettività e sottospazi

Proposizione 8.11.19 *Una proiettività $f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$, individuata da un automorfismo $\varphi \in Aut_{\mathbb{R}}(V)$, trasforma un sottospazio $S = \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$ nel sottospazio $f(S) = \mathbb{P}(\varphi(W))$.*

Dim. Poiché $W \simeq \varphi(W)$, f induce un isomorfismo di S su $f(S)$.

Definizione 8.11.20 1. *Due sottinsiemi o* figure *F, F' di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}$ si dicono* proiettivamente equivalenti *se $\exists\, f \in PGL(\mathbb{P})$ tale che $f(F) = F'$.*

[38] L'esistenza di autovettori di φ è equivalente all'esistenza di punti fissi di f.

2. *Le proprietà comuni a tutte le figure proiettivamente equivalenti a una data figura F sono dette* proprietà proiettive di F.

Proposizione 8.11.21 *Due sottospazi proiettivi $S, S' \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ tali che dim S = dim S' sono proiettivamente equivalenti.*

Dim. Siano $S = \mathbb{P}(W), S' = \mathbb{P}(W')$, con $\dim_{\mathbb{R}} W = \dim_{\mathbb{R}} W' \Longrightarrow \exists \varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(V)$, tale che $\varphi(W) = W' \Longrightarrow f(S) = S'$, con $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ proiettività associata a φ.

Proposizione 8.11.22 *Due sottinsiemi di $\mathbb{P}$, ciascuno costituito da $r \leq \dim \mathbb{P} + 2$ punti in posizione generale, sono proiettivamente equivalenti.*

Dim. È una conseguenza immediata di Teor. 8.11.14.

Si pone quindi il problema di
caratterizzare le classi di equivalenza proiettiva di r-uple di punti di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}$, per $r > \dim \mathbb{P} + 2$.

Il problema ha risposta positiva per le quaterne di punti in posizione generale di una retta proiettiva.

8.12 Birapporto

Definizione 8.12.1 *Dati quattro punti P_1, P_2, P_3, P_4 di una retta proiettiva $\mathbb{P}$, con P_1, P_2, P_3 punti distinti*[39]*, il* birapporto *di P_1, P_2, P_3, P_4 è:*

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) := \frac{y_1}{y_0} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

se $P_4[y_0, y_1]$ nel riferimento proiettivo che ha P_1, P_2 come punti fondamentali e P_3 come punto unità.

Proposizione 8.12.2 *Dato un riferimento proiettivo nel quale i quattro punti assegnati hanno coordinate omogenee $[\lambda_i, \mu_i]$, $1 \leq i \leq 4$, si ha:*

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix}}. \tag{8.15}$$

Osservazione 8.12.3 1. Considerando coordinate non omogenee

$$z_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i}$$

dei quattro punti $P_i, 1 \leq i \leq 4$, si ha:

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)} \tag{8.16}$$

[39] n.b. non si fa nessuna ipotesi su P_4.

infatti (8.15) dà

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{(\lambda_1\mu_4 - \lambda_4\mu_1)(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2)}{(\lambda_2\mu_4 - \lambda_4\mu_2)(\lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_1)},$$

da cui, dividendo numeratore e denominatore per $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$, si ottiene (8.16) (n.b. ciò ha senso solo se $z_i \neq \infty$, $\forall 1 \leq i \leq 4$).

2. Vale inoltre:

   – $\beta(P_1, P_2, P_3, P_1) = 0$,
   – $\beta(P_1, P_2, P_3, P_2) = \infty$,
   – $\beta(P_1, P_2, P_3, P_3) = 1$.

Teorema 8.12.4 *Date su due rette proiettive $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V), \mathbb{P}' = \mathbb{P}(V')$ due quaterne di punti $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}$ e $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in \mathbb{P}'$, con $\{P_1, P_2, P_3\}$ e $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ terne di punti distinti, $\exists$ isomorfismo proiettivo*

$$f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}' \text{ tale che } f(P_i) = Q_i,\ \forall 1 \leq i \leq 4$$

se e solo se

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4).$$

Dim. Per Teor. 8.11.14 $\exists!$ isomorfismo proiettivo $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}'$ con $f(P_i) = Q_i$, $\forall 1 \leq i \leq 3$. Siano $P_i = [v_i], Q_i = [w_i], v_i \in V, w_i \in V', 1 \leq i \leq 4$ e supponiamo f indotta da $\varphi \in \mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}(V, V')$ tale che $\varphi(v_i) = w_i$ per $i = 1, 2, 3$. Se $P_4[y_0, y_1]$ nel riferimento proiettivo di $\mathbb{P}$ definito dai punti $P_1, P_2, P_3 \Longrightarrow f(P_4)[y_0, y_1]$ nel riferimento proiettivo di $\mathbb{P}'$ definito dai punti Q_1, Q_2, Q_3, ossia $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, f(P_4))$. Ora, $f(P_4) = Q_4 \iff Q_4[y_0, y_1]$ nel riferimento proiettivo di $\mathbb{P}'$ definito dai punti Q_1, Q_2, Q_3, nel qual caso $\beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \frac{y_1}{y_0} = \beta(P_1, P_2, P_3, P_4)$.

Esempio 8.12.5 Siano $P_i[\lambda_i, \mu_i], 1 \leq i \leq 4$ punti propri. Si ha:
$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(P_4, P_3, P_2, P_1) = \beta(P_2, P_1, P_4, P_3) = \beta(P_3, P_4, P_1, P_2)$.

Osservazione 8.12.6
1. Il birapporto di 4 punti di una retta è legato all'ordine dei punti, ma le 24 permutazioni dei punti non conducono a birapporti tutti distinti. Infatti, il birapporto non cambia quando si scambiano tra loro 2 punti qualsiasi dei 4 e contemporaneamente anche i rimanenti 2 sono scambiati fra loro.

2. I birapporti candidati a essere distinti sono:

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4), \beta(P_1, P_3, P_4, P_2), \beta(P_1, P_4, P_2, P_3),$$

$$\beta(P_1, P_2, P_4, P_3), \beta(P_1, P_3, P_2, P_4), \beta(P_1, P_4, P_3, P_2).$$

3. Da (8.16) discende che:

- due birapporti differenti per lo scambio dei 2 ultimi elementi[40] hanno prodotto pari a 1,
- due birapporti differenti per lo scambio di 2 medi[41] hanno somma pari a 1.

4. Posto $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta$ si ha
   - $\beta(P_1, P_2, P_4, P_3) = \frac{1}{\beta}$,
   - $\beta(P_1, P_3, P_2, P_4) = 1 - \beta$,
   - $\beta(P_1, P_3, P_4, P_2) = \frac{1}{1-\beta}$,
   - $\beta(P_1, P_4, P_3, P_2) = \frac{\beta}{1-\beta}$,
   - $\beta(P_1, P_4, P_2, P_3) = \frac{\beta-1}{\beta}$.
5. Per alcuni valori di β i birapporti distinti sono in numero minore di 6, precisamente:
   - $\beta = \frac{1}{\beta} \Longrightarrow \beta^2 = 1, \beta = \pm 1$, da cui $\begin{cases} (-1, 2, \frac{1}{2}) & \text{se } \beta = -1 \\ (1, 0, \infty) & \text{se } \beta = 1 \end{cases}$;
   - $\beta = 1 - \beta \Longrightarrow 2\beta = 1, \beta = \frac{1}{2}$, da cui $(-1, 2, \frac{1}{2})$;
   - $\beta = \frac{\beta}{1-\beta} \Longrightarrow \beta^2 - \beta = \beta, \beta(\beta - 2) = 0$ da cui $\begin{cases} (-1, 2, \frac{1}{2}) & \text{se } \beta = 2 \\ (1, 0, \infty) & \text{se } \beta = 0 \end{cases}$;
   - $\beta = \frac{1}{1-\beta}, -\beta^2 + \beta = 1, \beta = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ da cui $(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2})$;
   - $\beta = \frac{\beta-1}{\beta}, \beta^2 - \beta + 1 = 0, \beta = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ da cui $(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2})$;

.

Definizione 8.12.7 *Se P_1, P_2, P_3, P_4 in un certo ordine hanno birapporto uguale a -1 la quaterna di punti è detta* armonica.

8.13 Gruppi di trasformazioni

A ognuna delle geometrie studiate abbiamo visto essere associato un 'gruppo di trasformazioni' in corrispondenza del quale si introducono relazioni di equivalenza tra figure e due figure equivalenti possono essere considerate come diversi rappresentanti di una stessa entità nella geometria considerata.

Ciascuna geometria consiste nello studio delle proprietà che sono invarianti per equivalenza (ossia comuni a tutte le figure di una stessa classe di equivalenza) in tal modo il gruppo di trasformazioni dello spazio determina le proprietà geometriche che si vogliono studiare.

[40] O dei primi 2, in quanto i due scambi sono equivalenti.
[41] O di 2 estremi, in quanto i due scambi sono equivalenti.

Piú precisamente, come asserito nel *Programma di Erlangen (1872)* di F. Klein, possiamo considerare un qualsiasi gruppo di trasformazioni $\mathcal{G}$ dello spazio e associare a esso una *geometria* che definiremo come l'insieme delle proprietà e delle grandezze che sono invarianti rispetto a tutte le trasformazioni di $\mathcal{G}$.

Proposizione 8.13.1 *Se $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ è un sottogruppo, ogni proprietà o quantità invariante rispetto a $\mathcal{G}$ lo è anche rispetto a $\mathcal{G}'$*[42].

Esempio 8.13.2 In $\mathbb{R}^n$ l'insieme delle applicazioni

$$T_{B,\mathsf{c}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{definita da } x \mapsto y = Bx + \mathsf{c}$$

con $\mathsf{c} =^t (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n, B = (b_{jh}) \in Gl_n(\mathbb{R})$ è detto *gruppo delle affinità* e denotato $\mathrm{Aff}_n(\mathbb{R})$.

Consideriamo $j_0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{H}_0$ e poniamo
$-x' =^t (1, x_1, \ldots, x_n)$,
$-y' =^t (1, y_1, \ldots, y_n)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_1 & b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} \in Gl_{n+1}(\mathbb{R}), \qquad y' = Ax'$$

la proiettività $f : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ definita dalla matrice A trasforma in sé $\mathbb{H}_0$ e $\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{H}_0$, inoltre $T_{B,\mathsf{c}} = f|\mathbb{R}^n = j_0^{-1} \circ f \circ j_0 \Longrightarrow \mathrm{Aff}_n(\mathbb{R})$ può essere considerato come sottogruppo di $PGL_{n+1}(\mathbb{R})$[43] e ogni proprietà proiettiva è anche una proprietà affine, ma non viceversa[44].

8.14 Cenni sulle curve proiettive piane

Siano $\mathbb{P} = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, $f(X_0, X_1, X_2) \in \mathbb{R}[X_0, X_1, X_2], \deg f \geq 2$, come per il caso lineare, vedi 8.4.5, ha senso chiedersi se le coordinate omogenee di un $P \in \mathbb{P}$ soddisfano l'equazione $f(\mathbf{X}^{45}) = 0$ solo se f è omogeneo, infatti:

Osservazione 8.14.1 Se $F(X_0, X_1, \ldots, X_n) \in \mathbf{k}[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ è omogeneneo di grado $d \Longrightarrow \forall\, (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{k}^n, \lambda \in \mathbf{k}^*$ vale

$$F(\lambda\xi_0, \lambda\xi_1, \ldots, \lambda\xi_n) = \lambda^d F(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$$

$\alpha_i \in \mathbb{R}^*$.

[42] Ossia, quella individuata da $\mathcal{G}'$ è una geometria piú ricca di quella individuata da $\mathcal{G}$, nel senso che le figure hanno piú proprietà.
[43] Quello costituito dalle matrici della forma di A.
[44] Per esempio: la nozione di parallelismo è proprietà affine me non proiettiva.
[45] Dove al solito $\mathbf{X} = (X_0, X_1, X_2)$.

Da cui, per $F(X_0, X_1, X_2) \in \mathbb{R}[X_0, X_1, X_2]$ omogenei di grado qualunque, ha senso dire che un $P \in \mathbb{P}$ soddisfa l'equazione $F(\mathbf{X}) = 0$.

Per definire le curve proiettive piane si usano *forme*[46](=polinomi omogenei) di $\mathbb{R}[X_0, X_1, X_2]$[47].

Definizione 8.14.2 *Una* curva algebrica *(o* proiettiva) piana *è una classe di proporzionalità di forme di* $\mathbb{R}[X_0, X_1, X_2]$ *e, se una forma* $F(X_0, X_1, X_2)$ *ne è un rappresentante, l'equazione*

$$F(X_0, X_1, X_2) = 0 \tag{8.17}$$

è detta equazione della curva *(o* equazione che definisce la curva*). Il sottinsieme* $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}$ *costituito dai punti di* $\mathbb{P}$ *le cui coordinate omogenee soddisfano (8.17) è detto* supporto della curva*, mentre il grado di* F *è detto* grado della curva[48].

In altre parole, una curva algebrica piana è individuata da una sua equazione e talvolta accade che si confonda la curva col suo supporto scrivendo semplicemente $\mathcal{C}$ e $\deg \mathcal{C}$. Questo tuttavia può essere anche molto fuorviante, per esempio le curve

$$r : a_0X_0 + a_0X_0 + a_0X_0 = 0 \text{ e } \mathcal{C} : (a_0X_0 + a_0X_0 + a_0X_0)^m = 0$$

hanno gradi diversi (rispettivamente 1 e m) e quindi comportamenti diversi, ma hanno evidentemente entrambe come supporto i punti della retta.

Definizione 8.14.3 *Una curva algebrica* $\mathcal{D}$ *è* proiettivamante equivalente *a una data curva algebrica* $\mathcal{C}$ *se* $\exists$ *proiettività* $T : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ *tale che* $T(\mathcal{D}) = \mathcal{C}$[49].

Osservazione 8.14.4 In particolare, i supporti di 2 curve proiettivamante equivalenti sono proiettivamante equivalenti. Le proprietà comuni a una curva proiettiva e a tutte quelle proiettivamante equivalenti sono dette *proprietà proiettive della curva*[50].

Definizione 8.14.5 *Una curva algebrica di grado* 2 *è detta* conica *e ha equazione della forma*

$$a_{11}X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + a_{22}X_2^2 + 2a_{01}X_0X_1 + 2a_{02}X_0X_2 + a_{00}X_0^2 = 0 \tag{8.18}$$

con a_{ij} *non tutti nulli .*

[46]Le forme di grado 1 sono dette *lineari*, quelle di grado 2 *quadratiche*, quelle di grado 3 *cubiche*, ecc.

[47]Due forme non costanti $F, G \in \mathbb{R}[X_0, X_1, X_2]$ sono dette *proporzionali* se $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}^*$ tale che $G = \alpha F$.

[48]Forse è persino superfluo osservare che forme proporzionali hanno necessariamente lo stesso grado!

[49]Si verifica facilmente che si tratta di una relazione di equivalenza,

[50]e.g. il grado di una curva è una proprietà proiettiva della curva.

Osservazione 8.14.6 1. Se, coi coefficienti dell'equazione (8.18), si forma la matrice simmetrica $A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ e, come al solito, si pone ${}^t\mathbf{X} = (X_0, X_1, X_2)$, l'equazione (8.18) si scrive nella forma matriciale

$${}^t\mathbf{X}A\mathbf{X} = 0^{51}.$$

2. Date una forma quadratica

$$F(\mathbf{X}) =^t \mathbf{X}A\mathbf{X}, \tag{8.19}$$

con $A \in M_3(\mathbb{R})$ matrice simmetrica e $M \in Gl_3(\mathbb{R})$, se a $\mathbf{X}$ sostituiamo $M\mathbf{X}$, (8.19) diventa

$$F'(\mathbf{X}) =^t \mathbf{X}^t MAM\mathbf{X}, \tag{8.20}$$

dove si verifica facilmente che $B :=^t MAM$ è ancora una matrice simmetrica. Vale inoltre che $F'(\mathbf{X}) = 0$ è una conica proiettivamente equivalente a $F(\mathbf{X}) = 0$ e che ogni conica proiettivamente equivalente a $F(\mathbf{X}) = 0$ è ottenuta in modo simile.

3. Data una conica ${}^t\mathbf{X}A\mathbf{X} = 0$, $\rho(A)$ è una proprietà proiettiva e la conica è detta *non degenere, semplicemente degenere, doppiamente degenere*, a seconda che $\rho(A) = 3, 2, 1$.

4. Si dimostra infine che ogni conica di $\mathbb{P}^2$ è proiettivamente equivalente a una fra:

a) $\begin{cases} X_1^2 + X_2^2 - X_0^2 = 0 & \text{conica generale} \\ X_1^2 + X_2^2 + X_0^2 = 0 & \text{conica generale a punti non reali} \end{cases}$,

b) $\begin{cases} X_0^2 - X_1^2 = 0 & \text{conica semplicemente degenere} \\ X_0^2 + X_1^2 = 0 & \text{conica semplicemente degenere a punti non reali} \end{cases}$,

c) $X_0^2 = 0$ conica doppiamente degenere,

a 2 a 2 non proiettivamente equivalenti.

Definizione 8.14.7 *1. Dato un polinomio $f(X, Y) \in \mathbb{R}[X, Y]$, di grado d, l'*omogeneizzata di f *è la forma ${}^hf \in \mathbb{R}[X_0, X_1, X_2]$ definita da:*

$${}^hf(X_0, X_1, X_2) := X_0^d f(\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0}). \tag{8.21}$$

*2. Data la forma $F(X_0, X_1, X_2) \in \mathbb{R}[X_0, X_1, X_2]$, l'*affinizzato[52] di F *è il polinomio ${}^aF \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ definito da*

$${}^aF(X_1, X_2) := F(1, X_1, X_2). \tag{8.22}$$

[51]Notiamo esplicitamente che la matrice A è simmetrica.
[52]Rispetto a X_0.

Osservazione 8.14.8 1. Dire che un $f(X,Y) \in \mathbb{R}[X,Y]$, ha grado d significa che, scritto

$$f(X,Y) = \sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^j$$

$\exists\ a_{ij} \neq 0$ con $i+j=d$ da cui, ponendo $X := \frac{X_1}{X_0}, Y = \frac{X_2}{X_0}$, si ha:

$$f(X,Y) = f(\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0}) = \sum_{i,j} a_{ij} (\frac{X_1}{X_0})^i (\frac{X_2}{X_0})^j = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{X_1^i X_2^j}{X_0^{i+j}},$$

eliminando i denominatori da questa si ottiene la forma ${}^h f(X_0, X_1, X_2)$ di (8.21).

2. Data $F(X_0, X_1, X_2) \in \mathbb{R}[X_0, X_1, X_2]$, ponendo $X_0 = 1$ si ottiene il polinomio ${}^a F(X_1, X_2)$ di (8.22).

Analogamente a quanto visto per le rette, si ha:

Definizione 8.14.9 *La* chiusura proiettiva *di una curva* $\mathcal{C}^* \subset \mathbb{R}^2$ *di equazione* $f(X,Y) = 0$ *è la curva algebrica* $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ *definita dall'equazione*

$${}^h f(X_0, X_1, X_2) = 0.$$

I punti di $\mathcal{C} \cap \mathbb{H}_0$ *sono detti* punti impropri di $\mathcal{C}^*$ rispetto a x_0.

Osservazione 8.14.10 1. Le curve $\mathcal{C}^* \subset \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ hanno lo stesso grado.

2. I punti impropri di $\mathcal{C}^*$ rispetto a x_0 sono i punti $[0, x_1, x_2]$ tali che $F(0, x_1, x_2) = 0$, ora, scrivendo

$$f(X,Y) = f_0(X,Y) + f_1(X,Y + \cdots + f_d(X,Y)$$

con $f_i(X,Y) \in \mathbb{R}[X,Y]$, $\deg f_i(X,Y) = i$, da (8.21) si ottiene

$$F(0, x_1, x_2) \approx f_d(X,Y),$$

ossia, le coordinate omogenee dei punti impropri di $\mathcal{C}^*$ (rispetto a x_0) 'sono' le soluzioni non banali di $f_d(X,Y) = 0$.

3. Viceversa, data una curva $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di equazione $F(X_0, X_1, X_2) = 0$, con F forma non costante, la curva

$$\mathcal{C}^* \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{di equazione} \quad f(X_1, X_2) = 0, \quad \text{dove} \quad {}^a F =: f \in \mathbb{R}[X_1, X_2],$$

ha per supporto $\tilde{\mathcal{C}} := \mathcal{C} \cap (\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{H}_0)$.

4. Le curve $\mathcal{C}$ e $\tilde{\mathcal{C}}$ hanno lo stesso grado $\iff X_0 \nmid F$ (se infatti risulta $X_0^r \mid F$, ma $X_0^{r+1} \nmid F$ si ha $\deg \tilde{\mathcal{C}} = \deg \mathcal{C} - r$).