a.a. 2012-2013

MATEMATICA GENERALE: SISTEMI LINEARI E MATRICI

1. Sistemi di equazioni lineari

Definizione **1.1.** i) Un' *equazione lineare nelle indeterminate* (o incognite) $X_1, \dots, X_m$[1] a coefficienti interi (o razionali, reali) non tutti nulli è un'espressione del tipo:

$$a_1X_1 + \cdots + a_mX_m = b \tag{1}$$

con $a_1, \dots, a_m, b$ interi (o razionali, reali), detti rispettivamente *coefficienti* e *termine noto*, se $b = 0$, (1) è detta *equazione lineare omogenea.*

i') Una *soluzione* di (1) è un'm-pla (ordinata) di interi (o razionali, reali) $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, che rende (1) un'identità, ossia tale che

$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_m\alpha_m = b.$$

ii) Un *sistema lineare* di p equazioni a coefficienti interi (o razionali, reali) nelle incognite $X_1, \dots, X_m$ è un insieme (ordinato) di equazioni lineari:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + \cdots + a_{1m}X_m = b_1 \\ a_{21}X_1 + \cdots + a_{2m}X_m = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{p1}X_1 + \cdots + a_{pm}X_m = b_p \end{cases}, \tag{2}$$

un sistema lineare è detto *omogeneo* se tali sono tutte le sue equazioni.

ii') Una *soluzione* di (2) è un'm-pla (ordinata) di interi (o razionali, reali) $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, che è soluzione di ogni equazione di (2).

iii') Un sistema lineare è *compatibile* se possiede almeno una soluzione. Un sistema omogeneo è compatibile perché ammette almeno la soluzione nulla $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$. Un sistema lineare compatibile ha un'unica soluzione oppure ∞ soluzioni.

Poniamo ordinatamente

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pm} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le p \\ 1\le j\le m}}, \ \mathbf{X} := \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_j \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix} \ \mathbf{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix},$$

detti rispettivamente *A matrice (di tipo $p \times m$) dei coefficienti* di (2), $\mathbf{X}$ *colonna delle indeterminate*, $\mathbf{b}$ *colonna dei termini noti.* Chiamiamo inoltre:

$$R_i^A := A_i := \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \end{pmatrix}$$

[1] Se m è piccolo anziché $X_1, \dots, X_m$ talvolta si scrive x, y, z, t, u, v, w...

$i - esima\ riga\, di\, A,\ 1 \le i \le p,$

$$C_A^j := A^j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{pj} \end{pmatrix}$$

$j - esima\ colonna\, di\, A,\ 1 \le j \le m$. Definendo:

$$A_i\mathbf{X} := a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \cdots + a_{ij}X_j + \cdots + a_{im}X_m \quad \text{e}$$

$$A\mathbf{X} := \begin{pmatrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1j}X_j + \cdots + a_{1m}X_m \\ \cdots \\ a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \cdots + a_{ij}X_j + \cdots + a_{im}X_m \\ \cdots \\ a_{p1}X_1 + a_{p2}X_2 + \cdots + a_{pj}X_j + \cdots + a_{pm}X_m \end{pmatrix}$$

abbiamo la scrittura matriciale di (2):

$$A\mathbf{X} = \mathbf{b}. \tag{3}$$

Il sistema omogeneo, con la stessa matrice dei coefficienti di (2),

$$A\mathbf{X} = \mathbf{0} \tag{4}$$

è detto *sistema omogeneo associato.*

Osservazione **1.2.** (1) Siano V, V_0, rispettivamente gli insiemi delle soluzioni di (3) e di (4), per ogni α, β in V, definendo $\alpha - \beta$ via $\alpha - \beta := (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \dots .\alpha_n - \beta_n)$ si ha $\alpha - \beta$ in V_0. Infatti, $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\alpha_j := a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{im}\alpha_m = b_i$, $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\beta_j = b_i$, per ogni $1 \le i \le p$ si ha $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(\alpha_j - \beta_j) = 0$. Se invece α in V e γ in V_0 si ha $\alpha + \gamma$ in V. Infatti $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(\alpha_j + \gamma_j) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\alpha_j + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\gamma_j = b_i + 0_{\mathbf{k}} = b_i$; infine, poiché data α in V, per ogni β in V si ha $\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$ si conclude essendo α in $V, \beta - \alpha$ in V_0. In tal modo si prova che se (2) è compatibile le sue soluzioni sono tutte e sole quelle ottenute sommando a una sua soluzione particolare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato.
(2) *Le soluzioni di un'equazione (1) sono esattamente le stesse di ogni altra equazione ottenuta da (1) moltiplicando tutti i coefficienti per un numero nonnullo.*

Notazione **1.3.**

- se $m = p$, A è detta *matrice quadrata di ordine* m,
- una matrice $1 \times n$ è detta *matrice* o *vettore riga,*
- una matrice $n \times 1$ è detta *matrice* o *vettore colonna,*
- gli elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}$ di una matrice A quadrata ne costituiscono la *diagonale principale,*

– se $a_{ij} = 0$ per ogni i, j, la matrice A è detta *matrice nulla,* indicata con $\mathsf{0}$.
– se $a_{ij} = 0$ per ogni $i > j$, la matrice A è detta *matrice triangolare superiore,*
– se $a_{ij} = 0$ per ogni $i < j$, la matrice A è detta *matrice triangolare inferiore,*
– una matrice sia triangolare superiore che inferiore è detta *matrice diagonale*[2],
– se $a_{ij} = \delta_{ij}$ (dove $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$ è il *simbolo di Kronecker (1823-1891))* A è detta *matrice identica (di ordine n),* e indicata con I_n,
– se in A, per ogni $i, 2 \leq i \leq n$ il primo elemento nonnullo di R_i^A sta su una colonna di indice maggiore di quello del primo elemento nonnullo di R_{i-1}^A, la matrice A è detta *matrice a scalini,* il primo elemento nonnullo di R_i^A è detto *i-esimo pivot,*

Esercizio **1.4.** (1) Determinare le equazioni lineari che hanno un'unica soluzione.
(2) Provare che ogni sistema lineare che ammette la soluzione banale $\mathbf{0}$ è omogeneo.

Definizione **1.5.** 1) Un sistema lineare è *a scalini* se per ogni $i \geq 2$ il minimo indice delle variabili aventi coefficiente nonnullo nella i-ma equazione è maggiore del minimo della $i - 1$-ma.

2) Due sistemi lineari sono *equivalenti* se hanno le stesse soluzioni[3].

Esempio **1.6.** 1) Il sistema $\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ y + t = 1 \\ z - t = 0 \end{cases}$ è a scalini.

2) Il sistema $\begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ y - z + t = 0 \\ y - t = 2 \\ z - 2t = 2 \end{cases}$ non è a scalini ed è equivalente al sistema a scalini $\begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ y - t = 2 \\ z - 2t = 2 \end{cases}$.

Esercizio **1.7.** Trovare le soluzioni dei sistemi lineari di Example 1.6.

Osservazione **1.8.** (1) Accanto alla matrice A dei coefficienti di (2), si considera la *matrice completa dei coefficienti di* (2)

$$B := (A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pm} & b_p \end{array} \right).$$

Dire che (2) è compatibile equivale a dire che

esiste $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ tale che $\alpha_1 C_A^1 + \cdots + \alpha_m C_A^m = \mathbf{b}$.

(2) Dati due sistemi

$$A'\mathbf{X} = \mathbf{b}', A''\mathbf{X} = \mathbf{b}'' \text{ con } A' \text{ matrice } (t \times m), A'' \text{ matrice } (s \times m),$$

[2] n.b. in una matrice diagonale, ossia con $a_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$, non si richiede che $a_{ii} \neq 0$ per ogni $1 \leq i \leq n$, in particolare $\mathsf{0}$ è matrice diagonale.

[3] n.b. ciò implica che i due sistemi hanno lo stesso numero di incognite, ma non necessariamente di equazioni!

l'insieme delle soluzioni comuni ai due sistemi coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ con $A = \begin{pmatrix} A' \\ A" \end{pmatrix}$ matrice $([t+s] \times m)$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}' \\ \mathbf{b}" \end{pmatrix}$.

Proposizione **1.9.** *Sia $p = m$, se la matrice dei coefficienti A è triangolare superiore con $a_{11}a_{22}\cdots a_{mm} \neq 0$ il sistema (2) ha un'unica soluzione.*

Proof. Dall'ultima equazione: $a_{mm}X_m = b_m$ si ricava $X_m = \frac{b_m}{a_{mm}}$, se si sostituisce questo valore nella penultima equazione $a_{m-1m-1}X_{m-1} + a_{m-1m}X_m = b_{m-1}$, si ottiene $X_{m-1} = \frac{1}{a_{m-1m-1}}(b_{m-1} - a_{m-1m}\frac{b_m}{a_{mm}})$, se questo valore e il precedente sono sostituiti nella terz'ultima equazione, si ricava un unico valore per X_{m-2} e cosí via..

Osservazione **1.10.** Se A è una matrice a scalini, ci si riconduce al caso esaminato in Prop. 1.9 producendo una matrice A triangolare superiore, di ordine p, con le colonne contenenti i pivot e portando al secondo membro di ogni equazione le rimanenti incognite con i rispettivi coefficienti. A differenza di Prop. 1.9 la soluzione non è piú unica, dipendendo dalle $m - p$[4] 'variabili libere'.

Esempio **1.11.** Dato il sistema a scalini
$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 - X_5 = 2 \\ X_2 - X_3 + X_5 = 1 \\ X_4 - X_5 = 0 \end{cases},$$
con matrice completa dei coefficienti $B = \left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \end{array}\right)$ si risolve il sistema ausiliario equivalente $\begin{cases} X_1 + X_2 + X_4 = 2 - X_3 + X_5 \\ X_2 = 1 + X_3 - X_5 \\ X_4 = X_5 \end{cases}$, la cui matrice completa dei coefficienti, posto $X_3 = s, X_5 = t$, è $B' = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2-s+t \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1+s-t \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & t \end{array}\right)$ e le cui ∞^2 soluzioni, dipendenti da 2 parametri (reali) sono
$$(1,1,0,0,0) + (-2s+t, s-t, s, t, t).$$

2. Eliminazione Gaussiana

Il *metodo di eliminazione Gaussiana* consiste precisamente nel risolvere il sistema lineare dato risolvendone uno equivalente piú facile.

2.1. Operazioni sulle matrici.

Notazione **2.1.**

– Se A, B sono matrici dello stesso (per esempio $m \times n$) la *somma* $A + B$ *di* A *e* B è la matrice di tipo $m \times n$
$$A + B := (c_{ij}) \qquad \text{con} \quad c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}.$$

[4]Si dice che un sistema lineare (di equazioni in m indeterminate) a scalini con p equazioni nonnulle ha ∞^{m-p} soluzioni.

– Il *prodotto di una matrice* $A = (a_{ij})$ *per uno scalare*(=numero intero, razionale o reale) λ è la matrice dello stesso tipo di A il cui elemento generico è λa_{ij}.
– Se $A = (a_{ih})$ è una matrice di tipo $m \times n$ e B è una matrice di tipo $n \times p$ il *prodotto righe per colonne* AB *di* A *e* B è la matrice di tipo $m \times p$

$$AB := (c_{ij}) \qquad \text{con} \quad c_{ij} := \sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{hj}.$$

Se $A = (a_{ih})$ è una matrice di tipo $m \times n$ e $B = (b_{hj})$ è una matrice di tipo $n \times m$ sono definite sia AB (quadrata di ordine m) che BA (quadrata di ordine n), ma non vale in genere $AB = BA$ neppure se $m = n$, per esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

– Una matrice quadrata di ordine n A è *invertibile* se esiste B tale che $AB = I_n = BA$, una tale B è detta *inversa* di A e denotata A^{-1}. Non tutte le matrici nonnulle sono invertibili.

Osservazione **2.2.** Se A, B sono matrici quadrate dello stesso ordine e invertibili anche il prodotto AB è tale. Infatti si ha per ipotesi $AA^{-1} = I_n, BB^{-1} = I_n$ pertanto

$$ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = I_n,$$

ossia $B^{-1}A^{-1}$ è l'inversa di AB.

2.2. **Operazioni e matrici elementari.** Sull'insieme delle equazioni di un sistema lineare (o, equivalentemente, sulle righe della matrice dei coefficienti) è possibile operare come segue:

$E_{i,j}$: scambiare tra loro la i-sima e la j-sima equazione (riga),
$E_i(c)$: moltiplicare per lo scalare nonnullo c la i-sima equazione (riga),
$E_{i,j}(c)$: sostituire alla i-sima equazione (riga) la sua somma con la j-sima moltiplicata per lo scalare nonnullo c.

Proposizione **2.3.** *Ciascuna operazione elementare sulle equazioni di un sistema lo muta in uno equivalente.*

Proof. Chiaramente, dato un sistema (2), i sistemi (2') e (2") ottenuti da (2) rispettivamente scambiando fra loro due equazioni e moltiplicando tutti i coefficienti e il termine noto di un'equazione per lo stesso scalare nonnullo, sono equivalenti. Verifichiamo che per ogni $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ soluzione di (2), α è soluzione di (2') ottenuto da (2) sostituendo alla i-esima equazione la somma tra la i-esima equazione stessa e un multiplo nonnullo della j-esima equazione $(i \neq j)$[5], infatti da

$$a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{im}\alpha_m = b_i, \; a_{j1}\alpha_1 + \cdots + a_{jm}\alpha_m = b_j$$

si ottiene

$$(a_{i1} + ca_{j1})\alpha_1 + \cdots + (a_{im} + ca_{jm})\alpha_m = b_i + cb_j;$$

viceversa, se $\beta := (\beta_1, \dots, \beta_m)$ è soluzione di (2') allora β è soluzione di (2), infatti: $(a_{i1} + ca_{j1})\beta_1 + \cdots + (a_{im} + ca_{jm})\beta_m = b_i + cb_j$ e quindi $a_{i1}\beta_1 + \cdots a_{im}\beta_m + c(a_{j1}\beta_1 \cdots + a_{jm}\beta_m) = b_i + cb_j$ da cui, essendo per ipotesi $cb_j = c(a_{j1}\beta_1 \cdots + a_{jm}\beta_m)$, si ottiene che β è soluzione di (2) come asserito.

[5] n.b. i sistemi (2) e (2') hanno tutte le equazioni uguali eccetto la i-ma.

Definizione **2.4.** Dicesi *matrice elementare di ordine* n ogni matrice di ordine n ottenibile da I_n mediante un'operazione elementare sulle righe.

$$\begin{array}{lll} E_{i,j} & : \text{scambio di } R_i^{I_n} \text{ con } R_j^{I_n}, & E_{ij}^{-1} = E_{ji}, \\ E_i(c) & : \text{moltiplicazione di } R_i^{I_n} \text{ per qualche } c, & E_i(c)^{-1} = E_i(c^{-1}), \\ E_{ij}(c) & : \text{addizione di } R_i^{I_n} \text{ con } R_j^{I_n} \text{ per } c \text{ nonnullo}, & E_{ij}(c)^{-1} = E_{ij}(-c). \end{array}$$

n.b. Ogni operazione elementare sulle righe di una matrice A di tipo $m \times n$ si ottiene moltiplicando a sinistra A per la corrispondente matrice elementare di ordine m.

2.3. **Algoritmo di eliminazione Gaussiana.** L'algoritmo di eliminazione Gaussiana, che permette di stabilire quando un sistema è compatibile e, in caso affermativo, di trovarne tutte le soluzioni, consiste nel sostituire (mediante un numero finito di successive operazioni elementari sulle equazioni del sistema) al sistema assegnato un sistema a scalini[6] a esso equivalente .

Descrizione informale dell'algoritmo di eliminazione Gaussiana

Dato $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$, sia $B := (A \mid \mathbf{b})$ (la matrice completa dei coefficienti di (3)) e sia $A'\mathbf{X} = \mathbf{b}'$ ottenuto da $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ mediante le operazioni elementari su B che la riducono a scalini. Possiamo supporre che
le eventuali righe nulle di A' compaiano al fondo di A',
il pivot di ogni riga nonnulla di A' sia 1 e
ogni elemento al di sopra e al di sotto di un pivot sia 0 (in questo caso si parla di *matrice a scalini ridotta*).

Esempio **2.5.** Dato $\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1 \\ 2X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 = 2 \\ X_1 + X_2 + 2X_3 + 2X_4 = 2 \\ 3X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 3X_4 = 1 \end{cases}$ si ha

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = B'$$

Poiché il sistema lineare associato a B' è contraddittorio, lo è anche quello associato a B.

Osservazione **2.6.** Complessivamente: un sistema lineare con una matrice a scalini (ridotta) B', è compatibile se B' non ha righe della forma

$$(0, \ldots, 0, *)$$

[6]Producendo eventualmente righe nulle, che evidenziano la compatibilità o meno.

(ossia, A' e B' hanno lo stesso numero r di righe nonnulle) nel qual caso le soluzioni di (3)) dipendono da $m-r$ parametri.

Esempio **2.7.** Dire se il seguente sistema è compatibile ed eventualmente risolverlo.

$$\begin{cases} 2x+y+z+t=3 \\ -x+y-z+t=2 \\ x+y+z-t=1 \\ 2x-y+z+t=0 \end{cases} \tag{5}$$

Applicando l'algoritmo di riduzione gaussiana calcoliamo la matrice ridotta associata alla matrice completa dei coefficienti e leggiamo in essa l'eventuale soluzione

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -\frac{5}{2} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -\frac{5}{2} \end{array}\right) \longrightarrow$$

pertanto il sistema è compatibile e la sua soluzione è $(2-2t, \frac{3}{2}, -\frac{5}{2}+3t, t)$ al variare del parametro t.

3. Matrice inversa e determinante

Abbiamo già osservato che ogni operazione elementare sulle righe di una matrice A di tipo $(p \times m)$ si ottiene moltiplicando a sinistra A per la corrispondente matrice elementare.

Proposizione **3.1.** *Una matrice quadrata di ordine n A è invertibile se e solo se è esprimibile come prodotto di matrici elementari.*

Proof. Chiaramente il prodotto di matrici elementari è invertibile. Se A è invertibile il sistema $AX = b$ ha solo la soluzione nulla, ossia, mediante operazioni elementari sulle righe può essere trasformato nel sistema

$$\begin{array}{cccccc} X_1 & & & & & =0 \\ & X_2 & & & & =0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & X_{n-1} & & =0 \\ & & & & X_n & =0 \end{array}$$

ossia, per qualche $s \in \mathbb{N}^*$, $E^{\alpha_1} \cdots E^{\alpha_s} AX = I_n X$ cioè $E^{\alpha_1} \cdots E^{\alpha_s} AX = I_n X$ i.e. $E^{\alpha_1} \cdots E^{\alpha_s} = A^{-1}$ e quindi

$$A = (A^{-1})^{-1} = (E^{\alpha_1} \cdots E^{\alpha_s})^{-1} = (E^{\alpha_s})^{-1} \cdots (E^{\alpha_1})^{-1}.$$

Osservazione **3.2.** Nel corso della dimostrazione di Prop. 3.1 si è anche dimostrato che:

si calcola l'inversa di una matrice invertibile mediante operazioni elementari sulle righe

e diamo subito un metodo pratico per determinare A^{-1}.

Notazione **3.3.** *Date A, B scriviamo $(A \mid B)$ per indicare la matrice di tipo $n \times 2n$ con $R_i^{(A|B)} = (a_{i1}, \dots, a_{in}, b_{i1}, \dots, b_{in})$.*

Osservazione **3.4.**
(1) Date A, B, M matrici quadrate dello stesso ordine si ha $M(A \mid B) = (MA \mid MB)$.
(2) Se A è invertibile di ordine n, si ha

$$A^{-1}(A \mid I_n) = (A^{-1}A \mid A^{-1}I_n) = (I_n \mid A^{-1}),$$

ossia, mediante operazioni elementari sulle righe, da $(A \mid I_n)$ si ottiene $(I_n \mid A^{-1})$ e quindi, mediante operazioni elementari sulle righe, da A si ottiene A^{-1}.

Esercizio **3.5.** Provare che $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile calcolandone l'inversa.

Si ha $(A \mid I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

ossia l'inversa di A è $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Vogliamo associare a una matrice quadrata A di ordine n un numero, detto *determinante di A* e denotato $\det(A)$, con la proprietà che $\det(A) \neq 0$ se e solo se A è invertibile (ciò equivale a $\det(A) = 0$ se e solo se esiste $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ tale che $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i = 0$).

Si verifica facilmente che se $n = 2$ il numero $\det(A) := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ soddisfa la proprietà richiesta.

Noi non daremo la definizione puntuale di determinante, ma ci limitiamo a dare "modi" tra loro equivalenti per calcolarlo.

Definizione **3.6.** Data una matrice quadrata $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ per ogni $1 \le i \le n$ il *determinante di A* (sviluppato rispetto alla i-ma riga) è

$$\det A := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

dove $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ è detto *complemento algebrico di a_{ij}.*

In questo modo si abbassa l'ordine fino a dover calcolare determinanti di matrici quadrate di ordine 2.

Lo stesso vale per le colonne.

Il risultato è indipendente dalla riga o colonna scelta.

Esempio **3.7.** Calcolare $\det A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

Sviluppando rispetto alla quarta riga otteniamo
$\det A = 2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} - 6\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2(-4+6) - 6(0-2) =$
$4 + 12 = 16$.

Proprietà del determinante:

Se ${}^tA$ è la matrice ottenuta da A scambiandone le righe con le colonne risulta $\det{}^tA$=$\det A$.

Se A' è la matrice ottenuta da A scambiando tra loro due righe (o due colonne) risulta $\det A' = -\det A$.

Se A' è la matrice ottenuta da A moltipicando tutti gli elementi di una riga (o colonna) per una stessa costante nonnulla λ, risulta $\det A' = \lambda \det A$.

Se due righe (o due colonne) di A sono uguali (o proporzionali), risulta $\det A' = 0$.

La somma dei prodotti di una riga (o colonna) per i complementi algebrici degli omologhi elementi di un'altra riga (o colonna) è nulla (è il determinante di una matrice con due righe (o colonne) uguali.

Definizione **3.8.** La *caratteristica o rango* di una matrice A è l'ordine massimo delle sue sottomatrici invertibili ed è denotata $\rho(A)$ o $\mathrm{ch}(A)$.

Il calcolo della caratteristica di una matrice implica il computo di un grande numero di determinanti di matrici di ordini via via crescenti, diamo un metodo per semplificarlo.

Definizione **3.9.** Date una matrice A e una sottomatrice B di ordine ρ, una sottomatrice di A di ordine $\rho+1$ è detta ottenuta *orlando* B se è ottenuta aggiungendo a B gli elementi di una riga e una colonna di A tra quelle che non compogono B.

Teoreme **3.10** (Teorema di Kronecker)**.** *Una matrice A, di tipo $m \times n$, ha caratteristica ρ se:*

- *$\exists$ una sottomatrice invertibile di A avente ordine ρ,*
- *tutti le sottomatrici di A, di ordine $\rho+1$, ottenute orlando la data sottomatrice invertibile di ordine ρ, hanno determinante nullo.*

Esempio **3.11.** Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, calcolare $\rho(A)$.

Si ha $A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \rho(A) \geq 2$, giacché $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ e $\rho(A) \leq 3$, giacché $\det(A) = 0$.

Le sottomatrici di ordine 3 di A sono $\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{3} = 16$, il teorema di Kronecker assicura che basta calcolarne $\binom{2}{1}\cdot\binom{2}{1} = 4$, precisamente, essendo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

si ha che $\rho(A) = 2$.

Teoreme 3.12 (Teorema di Cramer). *Se $A \in Gl_n(\mathbf{k})$, il sistema (3) ha un'unica soluzione:*

$$\beta =^t (\beta_1, \ldots, \beta_n) \qquad con \quad \beta_i = \frac{\Delta_i}{d(A)}$$

dove Δ_i è il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo $\mathbf{b}$ a C^i_A.

Proof. Si ha $A\beta = \mathbf{b} \Longrightarrow \beta = A^{-1}\mathbf{b}$ con $\beta_i = \frac{1}{d(A)} \sum_{j=1}^{n} A_{ji}b_j, 1 \leq i \leq n$.

Teoreme 3.13 (Teorema di Rouché-Capelli). *Il sistema (3) è compatibile se e solo se*

$$\rho(A) = \rho((A \mid \mathbf{b})),$$

in tal caso (3) ha $\infty^{m-\rho}$ soluzioni, dove $\rho = \rho(A)$.

Esempio 3.14. Studiare il seguente sistema lineare al variare del parametro reale $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + \lambda y + 2z = \lambda \\ \lambda x + y - \lambda z = 0 \\ 2x + 2\lambda y + z = 1 \end{cases} .$$

La matrice dei coefficienti del sistema è $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ \lambda & 1 & -\lambda \\ 2 & 2\lambda & 1 \end{pmatrix}$ e si ha

$\det(A) = 1(1+2\lambda^2) - \lambda(\lambda+2\lambda) + 2(2\lambda^2-2) = 1+2\lambda^2-3\lambda^2+4\lambda^2-4 = 3(\lambda^2-1)$, pertanto $\det(A) \neq 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ e in tutti questi casi il sistema ha un'unica soluzione calcolabile o con la riduzione Gaussiana o con la regola di Cramer. Restano da esaminare i casi $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$.

Se $\lambda = 1$ il sistema diventa $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + 2y + z = 1 \end{cases}$.

Per il teorema di Rouché-Capelli bisogna verificare se la matrice dei coefficienti e quella completa hanno la stessa caratteristica. Essendo $(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

e $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$ bisogna calcolare $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1(1+2)+1(-1-2) = 0$ ossia, $\rho(A) = 2 = \rho(A \mid \mathbf{b})$ quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni della forma $(t, \frac{1-3t}{3}, \frac{1}{3})$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.

Se $\lambda = -1$ il sistema diventa $\begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ -x + y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 1 \end{cases}$.

Per il teorema di Rouché-Capelli bisogna verificare se la matrice dei coefficienti e quella completa hanno la stessa caratteristica. Essendo $(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & +1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$ e $\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & +1 \end{pmatrix} \neq 0$ bisogna calcolare $\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & +1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1(1+2) + 1(-1-2) = -6$ ossia, $\rho(A) = 2 \neq \rho(A \mid \mathbf{b}) = 3$ quindi il sistema non ha soluzioni.