a.a. 2012-2013

MATEMATICA GENERALE: IL NUMERO DI NEPERO E

1. Estremo superiore di un insieme

Definizione **1.1.** i) Un numero $L \in \mathbb{R}$ è un *maggiorante* (risp. *minorante)* di un sottinsieme $A \subset \mathbb{R}$ se vale:

$$L \geq a \ (\text{risp.}\, L \leq a) \, \forall \ a \in A. \tag{1}$$

ii) Un sottinsieme $A \subset \mathbb{R}$ è *limitato superiormente* (risp. *limitato inferiormente)* se ammette maggioranti (risp. *minoranti)*.

ii') Un sottinsieme $A \subset \mathbb{R}$ è *limitato* se $\exists\, l, L \in \mathbb{R}$ tali che

$$l \leq a \leq L, \forall \ a \in A.$$

Osservazione-Definizione **1.2.** Se $A \subset \mathbb{R}$ è limitato, l'insieme $\mathcal{M}_A$ dei maggioranti di A ammette *minimo*, detto *estremo superiore di* A e denotato sup$A$. Poiché $\mathcal{M}_A \neq \emptyset$, applicando l'assioma di completezza dei numeri reali ai due insiemi $A, \mathcal{M}_A$ esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq \ell \leq L, \forall\, a \in A, L \in \mathcal{M}_A,$$

poiché ℓ maggiora tutti gli elementi di $A, \ell \in \mathcal{M}_A$ è il minimo di $\mathcal{M}_A$.

In modo analogo si definisce l'*estremo inferiore* inf$A$.

2. Successioni monotone

Definizione **2.1.** Una successione di numeri reali $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è

i) *strettamente crescente* se $a_n < a_{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}$

ii) *strettamente decrescente* se $a_n > a_{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}$

iii) *debolmente crescente* se $a_n \leq a_{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}$

iv) *debolmente decrescente* se $a_n \geq a_{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

v) Un numero $a \in \mathbb{R}$ è il *limite* di una successione di numeri reali $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o equivalentemente una successione di numeri reali $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* ad $a \in \mathbb{R}$ se

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \nu > o \, : \, a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon, \, \forall\, n > \nu$$

e si scrive $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Teoreme **2.2.** *Ogni successione monotona e limitata è convergente.*

Proof. Proviamo la tesi per successioni crescenti, per quelle decrescenti è analoga. Sia $\ell =$sup$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, per ogni $\varepsilon > 0$ le proprietà dell'estremo superiore dicono che esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\ell - \varepsilon < a_{\nu_\varepsilon}$, per ogni $n > \nu_\varepsilon$ essendo la successione crescente si ha $a_{\nu_\varepsilon} \leq a_n$ ossia $\ell - \varepsilon < a_{\nu_\varepsilon} \leq a_n \leq \ell < \ell + \varepsilon$ e quindi $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

3. Il numero di Nepero

Proposizione **3.1.** *La successione* $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ *è monotona crescente e limitata.*

Proof. Proviamo che è crescente ossia $a_n \geq a_{n-1}$. Si ha $(1+\frac{1}{n})^n = (\frac{n+1}{n})^n$ facciamo vedere che, per ogni $n \geq 2$ si ha$(1+\frac{1}{n})^n \geq (1+\frac{1}{n-1})^{n-1}$ ossia $(\frac{n+1}{n})^n \geq (\frac{n}{n-1})^n \cdot \frac{n-1}{n}$. Poiché $\frac{n}{n-1} > 0$ questo equivale a $(\frac{n^2-1}{n^2})^n \geq \frac{n-1}{n}$, ossia $(1-\frac{1}{n^2})^n \geq 1-\frac{1}{n}$ e questo discende dalla diseguaglianza di Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx, \forall n \in \mathbb{N}^*, x \geq -1$ con $x = -\frac{1}{n^2}$ (n.b. per $n \geq 2$, $-\frac{1}{n^2} > -1$ nella diseguaglianza di Bernoulli vale il maggiore stretto) quindi $a_n > a_{n-1}, \forall n \geq 2$.

Per provare che è limitata consideriamo la successione ausiliaria $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$, risulta $b_n = (1+\frac{1}{n})^n \cdot (1+\frac{1}{n}) = a_n \cdot (1+\frac{1}{n}) > a_n$, se proviamo che $\{b_n\}$ è strettamente crescente abbiamo la tesi perché si ha $2 = a_1 \leq a_n < b_n < b_1 = 4$ per ogni $n \geq 2$. Si ha $b_{n-1} = (1+\frac{1}{n-1})^n > b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ infatti $(\frac{n}{n-1})^n > (\frac{n+1}{n})^n \cdot \frac{n+1}{n}$ ossia $(\frac{n^2}{n^2-1})^n > \frac{n+1}{n}$ o anche $(1+\frac{1}{n^2-1})^n > 1+\frac{1}{n}$ che a sua volta discende dalla diseguaglianza di Bernoulli con $x = \frac{1}{n^2-1}$ perché vale

$$(1+\frac{1}{n^2-1})^n \geq 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{1}{n}$$

essendo $\frac{n^2+n-1}{n^2-1} > \frac{n+1}{n}$ in quanto $n^3+n^2-n > n^3-n+n^2-1$.

Definizione **3.2.** *Il limite della successione* $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ *è detto* numero di Nepero *e denotato col simbolo* e.

Osservazione **3.3.** Ricordiamo infine una proprietà che discende dalla definizione del numero e e che sarà utile per calcolare la derivata della funzione $\ln x$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^\pm}(1+bx)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\pm\infty}(1+\frac{1}{y})^{by} = \lim_{y\to\pm\infty}\left[(1+\frac{1}{y})^y\right]^b = e^b$$

ponendo $y = (bx)^{-1} = \frac{1}{xb} \Longrightarrow \frac{1}{x} = by$.