a.a. 2013-2014

APPUNTI PER M.G.

1. Notazioni

Considereremo come *primitivo* il concetto di *insieme* e noto un insieme quando se ne conoscano gli *elementi.*

Inoltre per evitare paradossi pensiamo di avere fissato una volte per tutte un *universo* Ω all'interno del quale siano tutti gli insiemi che sia necessario considerare.

Gli insiemi sono indicati con le lettere maiuscole:

$$A, B, C, \ldots, X, Y, W, \ldots$$

e gli elementi con le lettere minuscole:

$$a, b, c, \ldots, x, y, w, \ldots.$$

I simboli : o | sono usati indifferentemente e indicano l'espressione *tale che.*

Una scrittura:

(1)
$$A = \{x : x\, \text{è una vocale della lingua italiana}\}$$
è detta *rappresentazione caratteristica dell'insieme* A, mentre

(2)
$$A = \{a, e, i, o, u\}$$
è detta *rappresentazione tabulare dell'insieme* A[1],

(3)
$$x \in A\, \text{oppure}\, A \ni x$$
significa che x è un elemento di A, la cui negazione è $x \notin A$ o $A \not\ni x$.

(4) $\emptyset$ è l'insieme *vuoto*, ossia quello per cui $x \in \emptyset$ è falsa per ogni elemento x.

(5)
$$B \subseteq A\, \text{oppure}\, A \supseteq B$$
significa che per ogni $b \in B$ vale $b \in A$ nel qual caso si dice che B è *sottinsieme* di A oppure che A è *soprainsieme* di B, se esiste almeno un $a \in A$ tale che $a \notin B$ si scrive
$$B \subset A\, \text{oppure}\, A \supset B$$
la cui negazione è $B \not\subset A$ o $A \not\supset B$, infine se valgono sia

(6)
$$B \subseteq A\, \text{che}\, A \subseteq B$$
significa che $A = B$.

(7)
$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$$
è l'insieme dei sottinsiemi di A e vale $\emptyset \subseteq A$ per ogni insieme A.

Esempio **1.1.** 1) Dati

i) $A = \{\wp : \wp\, \text{è un rombo con diagonali uguali}\}$,

ii) $B = \{\wp : \wp\, \text{è un quadrato}\}$,

[1] Usata di solito per insiemi con un numero finito di elementi.

iii) $C = \{\wp : \wp$ è un rettangolo con diagonali $\perp\}$,
iv) $X = \{\wp : \wp$ è un parallelogramma$\}$,
si ha $A = B = C$ e $A \subset X$.

2) Se $A = \{a, b, c\}$, si ha $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$.

n.b. $\{a\} \neq a$, il primo denotando l'insieme costituito dal solo elemento a e il secondo l'elemento a stesso.

3) I principali insiemi numerici sono indicati con lettere speciali, in particolare:

- $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$ è l'insieme dei *numeri naturali*,
- $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots, \pm n, \ldots\}$ è l'insieme dei *numeri interi*,
- $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ è l'insieme dei *numeri razionali*[2],
- $\mathbb{R} := \{(\xi, \eta) : \xi, \eta$ classi contigue di numeri razionali$\}$ è l'insieme dei *numeri reali*,
- $\mathbb{C} := \{z = a + ib : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ è l'insieme dei *numeri complessi.*

Si ha $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

E, identificando $\mathbb{R}$ con il sottinsieme di $\mathbb{C}$ costituito dalla totalità degli elementi della forma $z = a + i0, a \in \mathbb{R}$, si ha anche l'inclusione $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Sugli insiemi numerici sono definite le operazioni di *addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione*[3] *ed estrazione di radice.*

- $\mathbb{N}$ è chiuso rispetto ad addizione e moltiplicazione,
- $\mathbb{Z}$ è chiuso rispetto ad addizione, sottrazione, moltiplicazione, e, dati due interi a, b con $b \neq 0$, è sempre possibile effettuarne in $\mathbb{Z}$ la *divisione con resto*, ossia esistono (e sono unici!) due interi q ed r (detti rispettivamente *quoziente e resto*) tali che $a = bq + r, 0 \leq r \leq b$,
- $\mathbb{Q}$ è chiuso rispetto ad addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione per elementi nonnulli,
- $\mathbb{R}$ è chiuso rispetto ad addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione per elementi nonnulli, estrazione di radice con indice dispari e con indice pari di elementi positivi,
- $\mathbb{C}$ è chiuso rispetto ad addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione per elementi nonnulli, estrazione di radice.

Su $\mathbb{R}$ (e sui suoi sottinsiemi) sono definite anche una *relazione di ordine forte* $<$ e *debole* $\leq$, ossia per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ vale una e una sola fra $x < y, x = y, x > y$; per ogni $x \in \mathbb{R}$ $\operatorname{segn}(x) = +$ significa $x > 0$ mentre $\operatorname{segn}(x) = -$ significa $x < 0$.

È utile ricordare le seguenti proprietà:

i) se vale $a = b$ vale anche $a + c = b + c$ per ogni c,
ii) se vale $a = b$ vale anche $ac = bc$ per ogni c e se $c \neq 0$ vale anche il viceversa[4],
iii) se vale $a < b$ vale anche $a + c < b + c$ per ogni c,
iv) se vale $a < b$ vale anche $ac < bc$ per ogni $c > 0$.

Da cui

v) se vale $a < b$ vale anche $-b < -a$,

---

[2]n.b. $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{11}{22}$ ecc..

[3]E quindi elevamento a potenza intera dove per $n \in \mathbb{N}$, $x^n = \underbrace{x \cdots x}_{n-volte}$ mentre per n negativo $x^n = \frac{1}{x^n}$.

[4]Ovviamente su $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$, dove ha senso dividere!.

vi) se vale $a < b$ vale anche $ac > bc$ per ogni $c < 0$.
Dati $a < b \in \mathbb{R}$
(j) $\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ è denotato $(-\infty, a)$ (risp. $(-\infty, a]$ se vale $\leq$),
(jj) $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ è denotato (a, b) (risp. $[a, b], [a, b), (a, b]$ a seconda dei casi),
(jjj) $\{x \in \mathbb{R} : x > b\}$ è denotato $(b, +\infty)$ (risp. $[b, +\infty)$ se vale $\leq$).

(8) Una scrittura:
$$\text{“} - - - - \text{”} \Longrightarrow \text{“} \cdots \text{”}$$
significa che dalla validità dell'affermazione “ $- - - -$” discende quella di “$\cdots$”, ossia se non vale “$\cdots$” non può valere “ $- - - -$” e si legge: “$- - - -$” *implica* “$\cdots$”. Si dice anche che “$\cdots$” è *condizione necessaria* alla validità di “ $- - - -$”, mentre “ $- - - -$” è *condizione sufficiente* alla validità di “$\cdots$”.

(9) Se valgono
$$\text{sia “} - - - - \text{”} \Longrightarrow \text{“} \cdots \text{” che “} \cdots \text{”} \Longrightarrow \text{“} - - - - \text{”}$$
significa che ciascuna delle due affermazioni equivale all'altra. Si dice che ciascuna delle due è *condizione necessaria e sufficiente* alla validità dell'altra e si legge: vale “ $- - - -$” *se e solo se* vale “$\cdots$”.

(10) Il simbolo
$$\forall \text{ (per ogni)}$$
è il *quantificatore universale*, mentre

(11)
$$\exists \text{ (esiste)}$$
è il *quantificatore esistenziale*.

Esempio **1.2.** 1) La condizione “essere divisibile per 2” è necessaria (ma non sufficiente) per la validità della condizione “essere divisibile per 4” e.g[5]. $2 \mid 6$ ma $4 \not| 6$;

2) La condizione “essere *primo*[6]” è sufficiente (ma non necessaria) per la validità della condizione “non essere divisibile per 4”.

3) Condizione necessaria e sufficiente affinché un numero naturale sia “divisibile per 6” è l'essere “divisibile sia per 2 che per 3”. Infatti se valgono $n = 2h$ e $n = 3k$ siccome $3 \not| 2$ e $2 \not| 3$ si ha $h = 3\ell$ e $k = 2\ell$ ossia $n = 6\ell$; viceversa se $n = 6\ell = 2 \cdot 3\ell$ si ha $n = 2h$ (con $h = 3\ell$) ed $n = 3k$ (con $k = 2\ell$).

4) La frase ”ogni numero naturale non primo ammette un divisore proprio” si scrive:
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, n \text{ non primo } \exists\; 1 \neq m < n : m \mid n^7.$$

5) Il quinto postulato di Euclide “dati una retta nel piano e un punto fuori di essa esiste un'unica retta passante per il punto e parallela alla retta data” si scrive:
$$\forall\, r \subset \pi, P \in \pi, P \notin r,\ \exists!\, r_P \subset \pi : r_P \parallel r, P \in r_P.$$

Dati due insiemi A, B, si definiscono:

(12) $A \cup B := \{x \in \Omega : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$ *unione di* A e B;

[5] Significa *exempli gratia*, ossia per esempio.
[6] Ossia essere divisibile solo per se stesso e 1.
[7] i.e. (*idem est*, ossia cioè) $n = mh, h \in \mathbb{N}$.

(13) $A \cap B := \{x \in \Omega : x \in A \text{ e } x \in B\}$ *intersezione di* A e B;

(14) $A \setminus B := \{x \in \Omega : x \in A \text{ e } x \notin B\}$ *complementare di* B in A;

(15) $\mathcal{C}(A) := \{x \in \Omega : x \notin A\ \}$ *complementare di* A;

(16) $A \times B := \{ \underbrace{(a,b)}_{\text{coppia ordinata}} : a \in A \text{ e } b \in B\}$ *prodotto cartesiano di* A e B.

Esempio **1.3.** 1) Dati $\mathbb{P} := \{n \in \mathbb{N} : n = 2h, h \in \mathbb{N}\}$ *insieme dei numeri pari* e $\mathbb{D} := \{n \in \mathbb{N} : n = 2h, h \in \mathbb{N}\}$ *insieme dei numeri dispari*, si ha:

$$\mathbb{P} \cup \mathbb{D} = \mathbb{N},\ \mathbb{P} \cap \mathbb{D} = \emptyset,\ \mathbb{N} \setminus \mathbb{P} = \mathbb{D},$$

2) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$, e in genere $A \times B \neq B \times A$,
3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
4) se $A = B$ anziché $A \times B$ si scrive A^2 e $A^2 \supset \Delta := \{(a,a) : a \in A\}$ è la *diagonale* di A^2,
5) $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C = A \times B \times C := \{(a,b,c) : a \in A, b \in B, c \in C\}$.

Esercizio **1.4.** (1) Provare che $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow A \setminus B = A$.
(2) Provare che $\mathcal{C}(\mathcal{C}(A)) = A$.
(3) Provare che valgono le formule di de Morgan:
$\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B)$
$\mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B)$.
(4) Calcolare $\mathcal{C}(A \setminus B)$.

2. Sistemi di coordinate

Per fissare la posizione di un punto nello spazio occorre introdurre il concetto di *sistema di riferimento* attraverso cui è possibile misurare distanze e direzioni in una forma puramente numerica.

2.1. **Coordinate sulla retta.** Si introduce un *sistema di coordinate* su una retta r assegnando due punti $r \ni O \neq U$:
O è detto *origine delle coordinate*,
U è detto *punto unità delle coordinate*,
se $r \ni P$ sta sulla semiretta contenente U diremo che $P > O$, altrimenti diremo che $P < O$. In tal modo sono fissati su r :
un *verso positivo* (ossia r è una *retta orientata)* e
un segmento OU *unità di misura* per i segmenti di r.
Dati due punti $P, Q \in r$, la misura del segmento di estremi P e Q (senza ordine e non necessariamente distinti) è indicata $\overline{PQ}$

Definizione **2.1.** L' *ascissa* $P \in r$ rispetto al riferimento $\{O, U\}$ è il numero reale $x(P)$ definito da:

$$x(P) := \begin{cases} \frac{\overline{OP}}{\overline{OU}} & \textit{se } P > O \\ -\frac{\overline{OP}}{\overline{OU}} & \textit{se } P < O \end{cases}$$

La *distanza* tra due punti P e Q di una retta affine è

$$d(P,Q) := \mid x(P) - x(Q) \mid .$$

Il *segmento orientato* di primo estremo P e secondo estremo Q è la coppia ordinata (P,Q), *indicato anche* PQ *o* $Q-P$.
La *misura algebrica* del segmento orientato (P,Q) è il numero reale

$$PQ := x(Q) - x(P).$$

Si ha $x(O) = 0, x(U) = 1$ e $x(P) = \frac{OP}{OU}$, $\forall\ P \in r$.
Fissato un riferimento $\{O,U\}$ su una retta r, ogni $P \in r$ individua un numero reale $x(P)$ e viceversa[8].

Proposizione **2.2.** *Se* $\{O',U'\}$ *è un altro riferimento su* r *e* $x'(P)$ *è l'ascissa di* $P \in r$ *rispetto a* $\{O',U'\}$*, vale*

(1) $$x'(P) = \alpha x(P) + \beta,$$

dove $\alpha = \frac{OU}{O'U'}$ *e* $\beta = \frac{OO'}{O'U'}$.

Proof. Si ha:

$$\begin{aligned} x'(P) &= \frac{O'P}{O'U'} = \frac{O'O+OP}{O'U'} = \frac{O'O}{O'U'} + \frac{OP}{O'U'} = \\ &= \frac{O'O}{O'U'} + \frac{OU}{O'U'} \cdot \frac{OP}{OU} = \alpha x(P) + \beta \end{aligned}$$

Definizione **2.3.** *La (1) è detta* formula di cambiamento delle ascisse.

Esercizio **2.4.** Dato un riferimento $\{O,U\}$ su una retta r si considerino i punti O' di ascissa -1, U' di ascissa 2 e A di ascissa 4, determinare la cordinata di A nel riferimento $\{O',U'\}$.

2.2. **Coordinate cartesiane nel piano.** Dare un *sistema di coordinate cartesiane* su un piano π significa assegnare due rette non parallele (ossia incidenti in un punto $O \in \pi$!), entrambe dotate di un sistema di ascisse con origine il punto O, detto *origine delle coordinate cartesiane del piano*, mentre le due rette sono dette *assi coordinati*, rispettivamente delle *ascisse* x e delle *ordinate* y.
Per ogni punto $P \in \pi$, siano:
P_x il punto intersezione dell'asse x con la $\parallel$ per P all'asse y
P_y il punto intersezione dell'asse y con la $\parallel$ per P all'asse x,
le ascisse $x := x(P_x)$, $y := x(P_y)$ (rispettivamente sugli assi x e y) sono dette *coordinate cartesiane* di P nel riferimento $\sigma(O;x,y)$ e si scrive $P(x,y)$.
Si ha: $O(0,0)$, inoltre ogni punto dell'asse x ha coordinate $(x,0)$ mentre ogni punto dell'asse y ha coordinate $(0,y)$ (cioè: $Y = 0$ e $X = 0$ sono rispettivamente 'equazioni' dell'asse x e dell'asse y).

Definizione **2.5.** 1) Se gli assi coordinati sono $\perp$ tra loro, il sistema è detto di *coordinate cartesiane ortogonali*[9].
2) Se l'unità di misura è la stessa per entrambi gli assi coordinati, il sistema è detto *monometrico.*

[8]La relazione di ordine di Esempio 1.1 3) si interpreta come segue: $\mathbb{R} \ni x > 0$ se x è l'ascissa di un punto P situato a destra di O mentre $\mathbb{R} \ni x < 0$ se x è l'ascissa di un punto P situato a sinistra di O.

[9]Ovviamente ciò ha senso nella geometria euclidea in cui oltre alle coordinate sono definiti le distanze e gli angoli. Di solito assumeremo che sia cosí!

n.b. Fissato $\sigma(O; x, y)$ su π, $\forall\, P \in \pi$ determina le sue coordinate cartesiane e viceversa $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\, \exists!\, P \in \pi$, tale che $P(x, y)$.

Esempio **2.6.** Siano $\sigma(O; x, y)$ un sistema di coordinate su un piano π, $O'(a, b)$ un punto di π, e $\sigma'(O'; x', y')$, un altro sistema di coordinate su π, con $x \parallel x'$ e $y \parallel y'$. Sia inoltre $P \in \pi$ con $P(x, y)$ in σ e $P(x', y')$ in σ'. Si ha:

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases},$$

(fare il disegno).

2.3. **Coordinate cartesiane nello spazio.** Dare un *sistema di coordinate cartesiane* nello spazio Σ significa assegnare tre rette incidenti in un punto O (detto *origine delle coordinate cartesiane dello spazio*) tutte dotate di un sistema di ascisse con origine il punto O e dette *assi coordinati*, rispettivamente asse x, asse y, asse z. Sono detti *piani coordinati* i tre piani individuati dalle tre coppie di assi, precisamente:

il *piano xy* è il piano individuato dagli assi x e y,
il *piano xz* è il piano individuato dagli assi x e z,
il *piano xy* è il piano individuato dagli assi x e y.

Per ogni punto $P \in \pi$, siano:

P_x il punto intersezione dell'asse x con il piano per $P \parallel$ al piano yz,
P_y il punto intersezione dell'asse y con il piano per $P \parallel$ al piano xz,
P_z il punto intersezione dell'asse z con il piano per $P \parallel$ al piano xy,

le ascisse $x := x(P_x)$, $y := x'(P_y)$, $z := x"(P_z)$ (rispettivamente sugli assi x, y e z) sono dette *coordinate cartesiane* di P nel riferimento cartesiano $\sigma(O; x, y, z)$ e si scrive $P(x, y, z)$.
Si ha: $O(0, 0, 0)$, inoltre ogni punto dell'asse x ha coordinate $(x, 0, 0)$, ogni punto dell'asse y ha coordinate $(0, y, 0)$ e ogni punto dell'asse z ha coordinate $(0, 0, z)$.

Definizione **2.7.** 1) Se gli assi coordinati sono a due a due $\perp$ tra loro, il sistema è detto di *coordinate cartesiane ortogonali.*

2) Se l'unità di misura è la stessa per tutti gli assi coordinati, il sistema è detto *monometrico.*

n.b. Fissato $\sigma(O; x, y, z)$ (su Σ) $\forall\, P \in \Sigma$ determina le sue coordinate cartesiane e viceversa $\forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\, \exists!\, P \in \Sigma$, tale che $P(x, y, z)$. Ossia, via la c.b.u. di cui sopra, l'insieme $\mathbb{R}^3$ delle terne ordinate di numeri reali può essere considerato come modello dello spazio affine (o euclideo[10]).

3. Disequazioni

1) Un' *equazione* è un'eguaglianza tra due espressioni *(membri)* contenenti una o più *variabili o incognite*, verificata solo per particolari valori delle variabili detti *soluzioni dell'equazione.* Due equazioni sono *equivalenti* se hanno esattamente le stesse soluzioni, per risolvere un'equazione spesso conviene operare secondo le regole di Esempio 1.1 3), i) e ii) riducendosi a un'equazione equivalente più semplice.

[10]La differenza tra spazio (risp. piano, retta) affine ed euclideo sarà chiarita in seguito, a questo punto segnaliamo solo che lo spazio affine è indicato per lo più $\mathbb{A}^3$ (risp. $\mathbb{A}^2, \mathbb{A}^1$) mentre quello euclideo E^3 (risp. E^2, E^1) e che talvolta vengono confusi scrivendo semplicemente $\mathbb{R}^i, i = 1, 2, 3$.

2) Un'*equazione algebrica* è un'equazione riconducibile, mediante operazioni conformi a Esempio 1.1 3), i) e ii), alle forme:

(2)
$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 = 0,\ a_i \neq 0 \text{ per qualche } i > 0 \quad \text{(forma estesa)},$$

(3)
$$\sum_{i=0}^{n} a_iX^i = 0,\ a_i \neq 0 \text{ per qualche } i > 0 \qquad \text{(forma compatta)}$$

per una sola variabile, e il massimo i tale che $a_i \neq 0$ è detto *grado dell'equazione*;

(4)
$$\sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\cdots i_n}X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n} = 0^{11},$$

(5)
$$\sum_I a_IX^I = 0 \quad \text{con } I = i_1\ldots i_n \text{ multiindice, } X = X_1\ldots X_n \text{ multivariabile}$$

nel caso di più variabili e il massimo $i_1 + \cdots + i_n$ tale che $a_{i_1\cdots i_n} \neq 0$ è detto *grado dell'equazione*.

3) Un'equazioni non algebrica è detta *trascendente*.

4) Un'equazione *differenziale* è un'equazione avente come incognita una funzione che vi compare insieme alle sue derivate, se la funzione dipende da una sola variabile indipendente l'equazione differenziale è detta *ordinaria* di *ordine* pari al massimo ordine delle derivate che vi compaiono, se ci sono più di una variabile indipendente l'equazione differenziale è detta *alle derivate parziali*.

Ricordiamo infine che la scrittura formale al primo membro di (2) e (5) è detta *polinomio*, e che anche per i polinomi in una variabile vale la divisione con resto, precisamente dati due poinomi in una variabile $A(X), B(X)$ esistono e sono unici due polinomi $Q(X), R(X)$ tali che

$$A(X) = B(X)Q(X) + R(X)$$

con $R(X) = 0$[12] oppure grado$(R(X) <$grado$B(X)$. Da cui discende il **Teorema di Ruffini**:

TEOREMA **3.1.** *Dato un polinomio in una variabile $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$, α è una radice*[13] *se e solo se $P(X)$ è divisibile per $X - \alpha$.*

Dimostrazione. Possiamo infatti scrivere $P(X) = (X - \alpha)Q(X) + R(X)$ con $R(X) = 0$ oppure grado$R(X) = 0$ ossia $R(X) = r$ è una costante. Se α è una radice, cioè se $P(\alpha) = 0$ dovendo essere $0 = P(\alpha) = 0Q(\alpha) + r$ risulta $r = 0$, ossia vale $P(X) = (X - \alpha)Q(X)$ cioè $P(X)$ è divisibile per $X - \alpha$, viceversa, se $P(X)$ è divisibile per $X - \alpha$ chiaramente $P(\alpha) = 0$.

Di conseguenza:

COROLLARIO **3.2.** *Un polinomio in una variabile ha al più tante radici quanto è il suo grado.*

---

[11] $\forall\, i \in \mathbb{N}, a_iX^i$ è detto *monomio*, mentre X^i e a_i sono detti rispettivamente *termine*, o monomio monico e *coefficiente* e similmente $\forall\,(i_1,\ldots,i_n) \in \mathbb{N}^n, a_{i_1\cdots i_n}X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n}$.

[12] Il polinomio nullo è il polinomio che ha tutti i coefficienti nulli.

[13] Ossia $P(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0$.

In particolare, se un polinomio di secondo grado $P(X) = aX^2 + bX + c$ ha le radici α, β si *fattorizza* (o *scompone in fattori*) nella forma $a(X - \alpha)(X - \beta)$.

Un polinomio è *irriducibile* se non si scompone in fattori di grado inferiore, per esempio $X^2 - 2, X^4 - 2$ sono irriducibili se pensati come polinomi a coefficienti in $\mathbb{Q}$, mentre su $\mathbb{R}$ abbiamo le fattorizzazioni (in fattori irriducibili)

$X^2 - 2 = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$,

$X^4 - 2 = (X^2 - \sqrt{2})(X^2 + \sqrt{2}) = (X - \sqrt[4]{2})(X + \sqrt[4]{2})(X^2 + \sqrt{2})$.

Esempio **3.3.** (1) Ogni equazione (algebrica) di primo grado in una sola variabile $aX + b = 0, a, b$ assegnati $a \neq 0$ (detta anche *lineare*) ha l'unica soluzione $X = -\frac{b}{a}$.

(2) $3X - 2Y = 1$ è un'equazione (algebrica) lineare in due variabili e ha infinite soluzioni, ossia $\{(\frac{2t+1}{3}, t) : t \in \mathbb{R}\}$ n.b. questo è l'insieme delle coordinate dei punti della retta passante per i punti $A(\frac{1}{3}, 0), B(1, 1)$[14].

(3) Ogni equazione (algebrica) di secondo grado in una sola variabile $aX^2 + bX + c = 0$, a, b, c assegnati $a \neq 0$ ha due soluzioni reali (eventualmente coincidenti) se e solo se vale $\Delta \geq 0$, con $\Delta := b^2 - 4ac$ *discriminante* dell'equazione.

(4) Gli algebristi italiani del '500 trovarono le formule risolutive (per radicali) delle equazioni di grado ≤ 4 in una sola variabile, nell'800 Abel e Ruffini dimostrarono l'impossibilità di risolvere per radicali l'equazione generica di grado ≥ 5 in una sola variabile.

(5) $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ è un'equazione (algebrica) di secondo grado in tre variabili e ha come infinite soluzioni, le coordinate dei punti della sfera di centro l'origine e raggio 1.

(6) $2\cos^2 x + 7\sin x = 5$ è un'equazione (trascendente) *trigonometrica* che ha come insieme delle soluzioni $\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{5\pi}{6} + 2h\pi, h \in \mathbb{Z}\}$[15].

(7) $y'(x) = y(x)$ è un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine e ha come *integrale* (insieme delle soluzioni) l'insieme delle funzioni della forma $y(x) = Ce^x$ al variare di $C \in \mathbb{R}$.

(8) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ è un'equazione differenziale alle derivate parziali chiamata *equazione di Laplace*.

Esercizio **3.4.** (1) Scomporre in fattori irriducibili i polinomi a coefficienti reali: $P(X) = -2X^2 + 3X - 2$, $Q(X) = X^3 - 1$.

(2) Trovare le soluzioni dell'equazione $X^2 - 3X + 2 = 0$.

(3) Trovare le soluzioni dell'equazione $X - 2Y + 1 = 0$.

(4) Disegnare gli insiemi: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3\}$ e $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 3\}$.

(5) Trovare le soluzioni dell'equazione $1 - \cos 2x = \sin x$.

---

[14] Più in generale un'equazione lineare in due variabili $aX + bY + c = 0, (a, b) \neq (0, 0)$ rappresenta il luogo dei punti di una retta del piano, come vedremo dettagliatamente in seguito, mentre un'equazione lineare in tre variabili $aX + bY + cZ + d = 0, (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ rappresenta un piano nello spazio.

[15] Per risolverla conviene ridursi a un'unica funzione trigonometrica utilizzando l'identità fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, ossia $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$, posto $y = \sin x$ si risolve l'equazione algebrica $2y^2 - 7y + 3 = 0$ ottenendo $y = 3, y = \frac{1}{2}$ e si usa il fatto che $\sin x = 3$ non ha soluzioni mentre $\sin x = \frac{1}{2}$ dà i valori enunciati.

5) Una *disequazione* è una diseguaglianza tra due espressioni *(membri)* contenenti una o più *variabili o incognite*, verificata solo per particolari valori delle variabili detti *soluzioni della disequazione*.

6) Un'equazione o una disequazione può presentare limitazioni implicite alla variabilità di cui tenere conto per valutare se le eventuali soluzioni siano accettabili o meno[16].

7) Quando si trasforma una equazione o disequazione in un'altra più semplice effettuando operazioni conformi a Esempio 1.1 3), i)÷vi), l'insieme delle soluzioni non viene alterato. Operando con metodi diversi (elevazione a potenza, moltiplicazione o divisione per quantità variabili, ...) bisogna sempre valutare se le soluzioni ottenute siano compatibili con il problema originario (e.g. l'equazione $\sqrt{X} = -1$ non ha soluzioni reali, il suo quadrato è $X = 1$ che fornisce una soluzione non accettabile dell'equazione di partenza).

Noi ci occupiamo essenzialmente di equazioni e disequazioni algebriche in una sola variabile e di gradi ≤ 2 facendo solo qualche cenno ad altri tipi.

Regole-pratiche **3.5.** (1) Risolvere un'equazione lineare (in una sola variabile) che si riduce alla forma $aX + b = 0$, con $a \neq 0$ significa calcolare l'unica soluzione $X = -\frac{b}{a}$, per esempio entrambe le equazioni
$$3X - 4 = X - 3 \quad 5X + 1 = 3X + 2 \text{ si riducono a } 2X - 1 = 0$$
e hanno come unica soluzione $X = \frac{1}{2}$.

(2) Studiare una disequazione lineare significa determinare l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ tali che il polinomio $aX + b$ abbia segno dato, essendo $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ assegnati e, a meno di moltiplicare per -1, basta considerare polinomi $aX + b, a > 0$, posto $y = ax + b = a(x + \frac{b}{a})$ si ha che $\text{segn}(y) = +$ se $x > -\frac{b}{a}$ mentre $\text{segn}(y) = -$ se $x < -\frac{b}{a}$.

(3) Per risolvere un'equazione algebrica di secondo grado $aX^2 + bX + c = 0$ in cui, a meno di moltiplicare per -1, possiamo supporre $a > 0$, possiamo riscriverla come segue:
$$0 = aX^2 + bX + c = a(X^2 + \tfrac{b}{a}X + \tfrac{c}{a}) = a[(X + \tfrac{b}{2a})^2 - \tfrac{\Delta}{4a^2}],$$
con $\Delta = b^2 - 4ac$ discriminante, da cui $X + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ e quindi $X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

(4) Studiare una disequazione algebrica di secondo grado significa determinare l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ tali che il polinomio $aX^2 + bX + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ assegnati e $a \neq 0$, abbia un determinato segno. A meno di moltiplicare per -1 basta considerare polinomi $aX^2 + bX + c, a > 0$. Come sopra poniamo $y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$ e studiamo $\text{segn}(y)$.
- se $\Delta < 0 \Longrightarrow \text{segn}(y) = \text{segn}(ax^2 + bx + c) = \text{segn}(a), \forall\, x \in \mathbb{R}$,
- se $\Delta = 0 \Longrightarrow \text{segn}(y) = \text{segn}(ax^2 + bx + c) = \text{segn}(a), \forall\, x \neq -\frac{b}{2a}$.
- se $\Delta > 0 \Longrightarrow y$ si annulla solo se $X = x_1, x_2$ con $x_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; siano $\alpha = \min\{x_1, x_2\}, \beta = \max\{x_1, x_2\}$, essendo $aX^2 + bX + c = a(X - \alpha)(X - \beta)$ si ha $\text{segn}(ax^2 + bx + c) = \text{segn}(a), \forall\, x < \alpha, x > \beta$, mentre se $\alpha < x < \beta$ si ha $\text{segn}(ax^2 + bx + c) = -\text{segn}(a)$.

[16]Per esempio: a) i denominatori di espressioni frazionarie devono essere nonnulli, b) i radicandi di radici di indice pari devono essere non negativi, c) gli argomenti di logaritmi con base maggiore di 1 devono essere positivi, d) ....

n.b. $y = ax^2 + bx + c$ è una funzione il cui grafico è una parabola con asse parallelo all'asse y (disegnare i diversi casi).

Esempio **3.6.** Studiare le disequazioni:

(1) $\frac{X-1}{3X-1} > 2$, la disequazione ha la limitazione implicita $X \neq \frac{1}{3}$ e può essere riscritta nella forma $\frac{X-1}{3X-1} - 2 > 0$,
se $X > \frac{1}{3}$ può essere riscritta nella forma $X - 1 - 6X + 2 > 0 \Longrightarrow X < \frac{1}{5}$, impossibile,
se $X < \frac{1}{3}$ può essere riscritta nella forma $X - 1 - 6X + 2 < 0 \Longrightarrow X > \frac{1}{5}$, ossia la disequazione data è vera nell'insieme $\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{5} < x < \frac{1}{3}\}$.

(2) $\frac{2+7X-15X^2}{5-X+6X^2} > 0$,
un rapporto è positivo se numeratore e denominatore sono concordi, quindi la diseguaglianza è vera se:
• $2 + 7X - 15X^2 > 0$ e $5 - X + 6X^2 > 0$ oppure
•• $2 + 7X - 15X^2 < 0$ e $5 - X + 6X^2 < 0$;
$2 + 7X - 15X^2 > 0$ è vera nell'insieme $\{x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{5} < x < \frac{2}{3}\}$, mentre
$5 - X + 6X^2 > 0$ è vera su tutto $\mathbb{R}$,
complessivamente • è vera in $\{x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{5} < x < \frac{2}{3}\}$;
$2+7X-15X^2 < 0$ è vera nell'insieme $\{x \in \mathbb{R} : x < -\frac{1}{5}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > \frac{2}{3}\}$, mentre
$5 - X + 6X^2 < 0$ è falsa su tutto $\mathbb{R}$,
complessivamente •• è falsa su tutto $\mathbb{R}$,
ossia la disequazione data è vera su $\{x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{5} < x < \frac{2}{3}\}$.

(3) $\mid X - 1 \mid < \mid X^2 \mid +1$, siccome $\mid x^2 \mid = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$, la disequazione è equivalente a $\mid X - 1 \mid < X^2 + 1$,
siccome $\mid X - 1 \mid = X - 1$ se $X > 1$ e $\mid X - 1 \mid = 1 - X$ se $X < 1$, la disequazione data
se $X > 1$ è $X^2 - X + 2 > 0$, vera su tutto $\mathbb{R}$ e
se $X < 1$ è $X^2 + X > 0$, vera per $X < -1$ e $X > 0$,
complessivamente è verificata su $\{x \in \mathbb{R} : x < -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ (lo si vede bene facendo il disegno).

(4) $X - 1 > \sqrt{X^2 + 2X - 3}$, la disequazione ha due limitazioni implicite: il radicando deve essere non negativo, il primo membro deve essere positivo, ossia x esterno all'intervallo $(-3, 1)$ e $x > 1$, con queste limitazioni, innalzado al quadrato si ottiene
$(X - 1)^2 > X^2 + 2X - 3$ ossia $X^2 - 2X + 1 > X^2 + 2X - 3$ da cui $4 > 4X$ vera su $\{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$, ossia la disequazione non è mai vera.

Esercizio **3.7.** Studiare le seguenti disequazioni: (1) $\frac{X-2}{X^2-9} > 2$;
(2) $\mid X \mid \geq \mid X^2 - 1 \mid$;
(3) $X^2 + \mid tX \mid > X$, al variare di $t \in \mathbb{R}$;
(4) $\sqrt{\frac{X+2}{2-X}} < 4$.