Metodi Matematici per Chimici

Maria Grazia Marinari[1]

Dipartimento di Matematica, Università di Genova, 16146 Genova, Italy
E-mail address: marinari@dima.unige.it

[1]Per scrivere questi appunti mi sono ampiamente servita di note gentilmente prestate da M. Arezzo (cap. 3), E. Calcagno (capp. 6 e 7), E. Del Prete (cap. 6), E. De Negri (capp. 6 e 7), G. Niesi (capp. 1-5) e per questo li ringrazio con riconoscenza.

CHAPTER 1

Introduzione

La *Geometria*, letteralmente misura della terra è una branca tra le piú antiche della matematica: già sviluppata, eminentemente *per questioni pratiche* (quali la misurazione di campi o pezzi di terreno) da Egiziani e Babilonesi, fu organizzata in modo sistematico *a livello di teoresi* dai Greci[1].

Nei suoi *Elementi* Euclide adotta il seguente metodo:

- *definizione* degli oggetti da studiare (punti, rette,...),
- *individuazione* di un numero finito di *Assiomi* o *Postulati*[2] su tali oggetti,
- *deduzione* dei *Teoremi* e *Proposizioni*[3].

Da allora, per oltre 2000 anni la geometria si è sviluppata attraverso tentativi di ampliamento e miglioramento dell'impianto euclideo. In particolare, siccome Euclide aveva dimostrato le prime 28 proposizioni senza usare il quinto postulato:

se una retta, incontrando altre due rette, forma da una parte due angoli coniugati interni, tali che la loro somma sia minore di due angoli retti, le due rette si incontrano da quella parte,

grandi sforzi furono impiegati per dedurlo dai primi 4 postulati e 28 proposizioni e solo nel XIX sec. se ne poté provare la non deducibiltà e che anzi è possibile costruire "geometrie" senza usarlo. In seguito alla scoperta delle cosiddette *Geometrie non Euclidee*[4], da una parte F. Klein, nel celebre *programma di Erlangen (1872),* formulò una *definizione corretta* del concetto di geometria:

una geometria di un insieme S è lo studio delle proprietà di S (e dei suoi sottinsiemi) che sono invarianti *quando gli elementi di S sono sottoposti alle trasformazioni di un gruppo fissato;*

dall'altra D. Hilbert, alla fine del XIX sec., attraverso uno *studio critico* dei

- fondamenti della geometria euclidea
- natura dei sistemi di assiomi (in generale),

dette una *definizione assiomatica*[5] *corretta* della geometria euclidea del piano[6].

1. Sistemi di coordinate

Per comunicare con un computer, per fissare la posizione di un punto nello spazio dobbiamo:

[1]Da Talete (VII sec. a.C.), a Euclide (IV sec a.C.), alla scuola alessandrina (fino ai primi sec. d.C.)

[2]Ritenuti verità evidenti che non richiedono dimostrazione.

[3]Affermazioni desunte con regole logiche dagli assiomi e dai risultati già dimostrati.

[4]Soprattutto a opera di Lobachevsky(1793-1856), Gauss(1777-1855), Bolyai(1802-1860) e Riemann(1826-1866).

[5]n.b. In una *teoria deduttiva astratta* il sistema di assiomi come tale è 'senza significato' e la questione della verità degli assiomi è irrilevante. Se, però, si può assegnare un *significato* ai termini indefiniti e alle relazioni, in modo che gli assiomi siano giudicati veri, allora i teoremi sono veri nel senso comunemente accettato. Più precisamente: *un sistema di assiomi per essere* significativo *deve essere* consistente, *ossia non deve essere possibile dedurre dagli assiomi un teorema che contraddice gli assiomi o un teorema già dimostrato.*

[6]Mediante *termini indefiniti* (punto, retta, piano) e *relazioni* (incidenza, stare tra, congruenza, separazione) tra essi, definite da un numero finito di *assiomi* (di: incidenza, ordinamento, congruenza, continuità e delle parallele) .

trattare con un *sistema di riferimento* misurando distanze e direzioni in forma puramente numerica.

1.1. Coordinate ascisse sulla retta. Dare un *sistema di coordinate ascisse* su una retta r significa assegnare in r due punti $O \neq U$:

O è detto *origine delle coordinate,* U è detto *punto unità delle coordinate,*

se $r \ni P$ sta sulla semiretta contenente U, $P > O$, altrimenti $P < O$. Cosí sono fissati su r :

un *verso positivo* (ossia r è una *retta orientata)* e

un segmento OU *unità di misura* per i segmenti di r.

Dati $P, Q \in r$, il segmento di estremi P e Q (senza ordine e non necessariamente $\neq$) è indicato $\overline{PQ}$.

Definizione 1.1. L'*ascissa di* $P \in r$ nel riferimento $\{O, U\}$ è il numero reale $x(P)$ definito da:

$$x(P) := \begin{cases} \frac{\overline{OP}}{\overline{OU}} & se\ P > O \\ -\frac{\overline{OP}}{\overline{OU}} & se\ P < O \end{cases} .$$

Una *retta affine* è una retta r dotata di ascisse.

Fissato un riferimento $\{O, U\}$ su una retta r, si ha $x(O) = 0, x(U) = 1$, inoltre ogni $P \in r$ individua $x(P) \in \mathbb{R}$ e viceversa, ossia l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ è un *modello* per la retta affine (o euclidea).

Definizione 1.2. La *distanza* tra due punti P, Q di una retta affine è

$$d(P, Q) := |\ x(P) - x(Q)\ |\ .$$

Il *segmento orientato* di estremi P e Q è la coppia ordinata (P, Q), *indicato anche* $\overrightarrow{PQ}$.

La *misura algebrica* del segmento orientato (P, Q) è il numero reale

$$PQ := x(Q) - x(P).$$

Osservazione 1.3. Vale $x(P) = \frac{OP}{OU}$, $\forall\ P \in r$.

Proposizione 1.4. *Se* $\{O', U'\}$ *è un altro riferimento su* r *e* $x'(P)$ *è l'ascissa di* $P \in r$ *rispetto a* $\{O', U'\}$*, vale*

$$x'(P) = \alpha x(P) + \beta \qquad dove \quad \alpha = \frac{OU}{O'U'},\ \beta = \frac{OO'}{O'U'}. \tag{1}$$

Dim. Si ha:

$x'(P) = \frac{O'P}{O'U'} = \frac{O'O+OP}{O'U'} = \frac{O'O}{O'U'} + \frac{OP}{O'U'} = \frac{O'O}{O'U'} + \frac{OU}{O'U'} \cdot \frac{OP}{OU} = \alpha x(P) + \beta.$

Definizione 1.5. *La (1) è detta* formula di cambiamento delle ascisse*.*

Osservazione 1.6. Se r, r' sono due rette, con ascisse rispettive x, x', un'*affinità* (o *trasformazione affine)* tra r e r' è un'applicazione bigettiva

$T : r \longrightarrow r'$ definita da $T(x) := ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$[7].

[7]n.b anche se la formula del cambiamento delle ascisse su una stessa retta e quella della trasformazione affine tra due rette distinte sono simili, esse hanno un significato totalmente diverso.

1.2. Coordinate cartesiane nel piano. Dare un *sistema di coordinate cartesiane* (brevemente s.d.c.c.) su un piano π significa assegnare due rette non parallele, incidenti in $O \in \pi$, entrambe dotate di un sistema di ascisse con origine O, detto *origine delle coordinate.* Le due rette sono dette *assi coordinati*, rispettivamente delle *ascisse* x e delle *ordinate* y. Per ogni $P \in \pi$, siano:

P_x il punto intersezione dell'asse x con la $\parallel$ per P all'asse y e

P_y il punto intersezione dell'asse y con la $\parallel$ per P all'asse x,

le ascisse $x := x(P_x)$, $y := x(P_y)$ sono dette *coordinate cartesiane* di P nel riferimento $\sigma(O; x, y)$ e si scrive $P(x, y)$. Si ha: $O(0, 0)$, inoltre ogni punto dell'asse x (risp. y) ha coordinate $(x, 0)$ (risp. $(0, y)$) (cioè: $Y = 0$ (risp. $X = 0$)) sono 'equazioni' dell'asse x (risp. y).

Se gli assi coordinati sono $\perp$ tra loro, il sistema è detto di *coordinate cartesiane ortogonali*[8].

Se l'unità di misura è la stessa per entrambi gli assi coordinati, il sistema è detto *monometrico.*

Definizione 1.7. Un *piano affine* è un piano π dotato di un riferimento cartesiano $\sigma(O; x, y)$.

Fissato $\sigma(O; x, y)$ su $\pi, \forall P \in \pi$ determina $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e viceversa $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \exists! \, P \in \pi$, t.c. $P(x, y)$ ossia, l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali è un modello del piano affine (o euclideo).

1.3. Coordinate cartesiane nello spazio. Dare un *s.d.c.c.* nello spazio Σ significa assegnare tre rette incidenti in un punto O[9], dotate di sistemi di ascisse con origine O e dette *assi coordinati*, rispettivamente asse x, asse y, asse z. Sono detti *piani coordinati* i tre piani individuati dalle tre coppie di assi, cioè: il *piano xy* è il piano individuato dagli assi x e y, il *piano xz* è il piano individuato dagli assi x e z, il *piano xy* è il piano individuato dagli assi x e y. Per ogni $P \in \pi$, siano:

P_x il punto intersezione dell'asse x con il piano per $P \parallel$ al piano yz,

P_y il punto intersezione dell'asse y con il piano per $P \parallel$ al piano xz,

P_z il punto intersezione dell'asse z con il piano per $P \parallel$ al piano xy,

le ascisse $x := x(P_x)$, $y := x(P_y)$, $z := x(P_z)$ sono dette *coordinate cartesiane* di P nel riferimento $\sigma(O; x, y, z)$ e si scrive $P(x, y, z)$. Si ha: $O(0, 0, 0)$, inoltre ogni punto dell'asse x (risp. y, z) ha coordinate $(x, 0, 0)$ (risp. $(0, y, 0), (0, 0, z)$). Se gli assi coordinati sono a 2 a 2 $\perp$ tra loro,si ha un *s.d.c. ortogonali.* Se l'unità di misura è la stessa per tutti gli assi, il sistema è detto *monometrico.*

Definizione 1.8. Lo *spazio affine* è lo spazio dotato di un riferimento cartesiano $\sigma(O; x, y, z)$.

Fissato $\sigma(O; x, y, z)$ (su Σ), $\forall \, P \in \Sigma$ determina le sue coordinate cartesiane e viceversa $\forall \, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, \exists! \, P \in \Sigma$, tale che $P(x, y, z)$, ossia, l'insieme $\mathbb{R}^3$ delle terne ordinate di numeri reali può essere considerato come modello dello spazio affine (o euclideo[10]).

1.4. Orientazione dei sistemi di coordinate cartesiane. L'orientazione dei s.d.c.c. dello spazio è definibile in modo abbastanza intuitivo, per orientare i s.d.c.c. del piano 'occorre uscire dal piano stesso scegliendo quale *faccia* considerarne'.

Definizione 1.9. (1) Un s.d.c.c. $\sigma(O; x, y, z)$ è *orientato positivamente* se con i piedi in O e la testa nella direzione positiva dell'asse z, si vede percorrere l'angolo $0 < \theta < \pi$, che sovrappone il semiasse positivo dell'asse x su quello dell'asse y, in senso antiorario.

[8] Di solito assumeremo che sia cosí!

[9] Detto *origine delle coordinate cartesiane dello spazio.*

[10] La differenza tra spazio (risp. piano, retta) affine ed euclideo sarà chiarita in seguito, a questo punto segnaliamo solo che lo spazio affine è indicato $\mathbb{A}^3$ (risp. $\mathbb{A}^2, \mathbb{A}^1$) mentre quello euclideo è indicato E^3 (risp. E^2, E^1) e che talvolta vengono confusi scrivendo semplicemente $\mathbb{R}^i, i = 1, 2, 3$.

(2) Un s.d.c.c. $\sigma(O; x, y)$ (di un piano π) è *orientato positivamente rispetto a una retta* r (orientata, passante per O e non giacente su π) se $\sigma(O; x, y, r)$ è orientato positivamente.

2. Spazio n-dimensionale

Sinora abbiamo complessivamente visto che: • $r \longleftrightarrow \mathbb{R}$, •• $\pi \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$, ••• $\Sigma \longleftrightarrow \mathbb{R}^3$.
Astraendo dal senso geometrico:

– $\mathbb{R}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \, : \, x_i \in \mathbb{R}, \, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}^*\}$ è detto *spazio n-dimensionale*,
– gli elementi di $\mathbb{R}^n$ sono detti *vettori a n componenti*[11],
– il numero reale x_i è detto *i-esima coordinata* o *componente del vettore* $\underline{x} := (x_1, \ldots, x_n)$,
– $\mathbb{R}^n \ni \underline{x}, \underline{y}$ soddisfano $\underline{x} = \underline{y}$ se $x_i = y_i, \forall \; 1 \leq i \leq n$.

Su $\mathbb{R}^n$ si definiscono le seguenti operazioni di *addizione* e *moltiplicazione per scalari:*
se $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n), \underline{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$
la *somma dei vettori* $\underline{x}$ *e* $\underline{y}$ è $\underline{x} + \underline{y} := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$
il *prodotto del vettore* $\underline{x}$ *con lo scalare* $\lambda \in \mathbb{R}$ è $\lambda\underline{x} := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.

Posto $\underline{0} := (0, \ldots, 0)$ e $-\underline{x} := (-x_1, \ldots, -x_n)$, le operazioni di addizione e moltiplicazione per scalari soddisfano, per ogni $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, le seguenti proprietà:

• della sola addizione
SV 1 $(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z})$ *associatività,*
SV 2 $\underline{0} + \underline{x} = \underline{x} + \underline{0} = \underline{x}$ *esistenza dell'elemento neutro,*
SV 3 $\underline{x} + (-\underline{x}) = -\underline{x} + \underline{x} = \underline{0}$ *esistenza dell'opposto,*
SV 4 $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$ *commutatività,*
• della sola moltiplicazione per scalari
SV 5 $(\lambda\mu)\underline{x} = \lambda(\mu\underline{x})$ *associatività,*
SV 6 $1\underline{x} = \underline{x}$ *unitarietà,*
• che legano l'addizione e la moltiplicazione per scalari
SV 7 $(\lambda + \mu)\underline{x} = \lambda\underline{x} + \mu\underline{x}$ *distributatività dell'addizione di scalari,*
SV 8 $\lambda(\underline{x} + \underline{y}) = \lambda\underline{x} + \lambda\underline{y}$ *distributatività dell'addizione di vettori,*
• L'intero blocco di proprietà SV (ossia da $SV1$ a $SV8$) dice che $\mathbb{R}^n$ con l'addizione e la moltiplicazione per scalari è uno *spazio vettoriale* (reale)[12].

Esempio 2.1. (1) Provare che se X è un insieme non vuoto qualsiasi, l'insieme $G := \{f : X \longrightarrow X \, : \, f \text{ è bigettiva } \}$ costituisce un gruppo non commutativo, rispetto alla composizione di applicazioni.

(2) I vettori

$$\underline{e_1} := (1, 0, \ldots, 0), \, \underline{e_2} := (0, 1, \ldots, 0), \, \ldots \, \underline{e_n} := (0, 0, \ldots, 1)$$

rivestono un'importanza notevole in quanto

$$\forall \; \underline{x} \in \mathbb{R}^n \text{ si ha } \underline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \underline{e_i}$$

.

[11] Un vettore a 1 componente è detto anche *scalare*

[12] n.b. Le proprietà da $SV1$ a $SV3$ dicono che $\mathbb{R}^n$ con l'addizione è un *gruppo*, la $SV4$ che si tratta di un gruppo *commutativo.*

Non tutti i gruppi sono commutativi! Di solito un gruppo commutativo additivo è chiamato *abeliano* dal nome del matematico norvegese N. Abel (1802-1829).

CHAPTER 2

Matrici e sistemi

1. Definizione e prime proprietà

Sia $\mathbf{k} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ o, piú in generale, un *corpo commutativo.*

DEFINIZIONE 1.1. Una *matrice di tipo* $m \times n$[1] a elementi in $\mathbf{k}$ è una tabella

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}.$$

– $\forall\ 1 \le i \le m$, la $i-esima\ riga\, di\, A$ è $\quad R_i^A := \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix},$

– $\forall\ 1 \le j \le n$, la $j-esima\ colonna\, di\, A$ è $\quad C_A^j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \cdots \\ a_{ij} \\ \cdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$

– se $a_{ij} = 0$, $\forall\ i, j$, A è detta *matrice nulla* e denotata 0,
– se $m = n$, A è detta *matrice quadrata di ordine* n,
– l'insieme delle matrici $m \times n$ a elementi in $\mathbf{k}$ è denotato $M_{m,n}(\mathbf{k})$, $M_n(\mathbf{k})$, e se $m = n$,
– una matrice $1 \times n$ è detta *matrice* o *vettore riga,*
– una matrice $n \times 1$ è detta *matrice* o *vettore colonna*[2],
– la *trasposta* di $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbf{k})$ è ${}^tA = (\alpha_{ij}) \in M_{n,m}(\mathbf{k})$ con $\alpha_{ij} := a_{ji}$[3] $\in \mathbf{k}$,
– se $A = {}^tA$ risulta $n = m$, $a_{ij} = a_{ji}\ \forall\, i \neq j$, e A è detta *matrice simmetrica,*
– gli elementi $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ di $A \in M_n(\mathbf{k})$ ne costituiscono la *diagonale principale,*
– se $\forall\ i > j$ si ha $a_{ij} = 0$, A è detta *matrice triangolare superiore,*
– se $\forall\ i < j$ si ha $a_{ij} = 0$, A è detta *matrice triangolare inferiore,*
– se A è sia triangolare superiore che inferiore, A è detta *matrice diagonale*[4],
– se $a_{ij} = \delta_{ij}$[5], A è detta *matrice identica (di ordine n),* e indicata con I_n,

[1] Detta anche di tipo (m, n).
[2] Noi identificheremo gli elementi di $\mathbf{k}^n$ con i vettori colonna.
[3] Essendo a_{ji} è l'elemento di posto (j, i) in A, ${}^tA$ è ottenuta da A scambiandone tra loro le righe e le colonne.
[4] In una A diagonale $a_{ij} = 0\, \forall\ i \neq j$ e non si richiede $a_{ii} \neq 0\, \forall\ 1 \le i \le n$, in particolare 0 è diagonale.
[5] Con $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$ *simbolo di Kronecker (1823-1891),*

- se in $A, \forall\, 2 \leq i \leq n$, il 1° elemento nonnullo di R_i^A sta su una colonna di indice maggiore di quello del 1° elemento nonnullo di R_{i-1}^A, la matrice A è detta *matrice a scalini,* il 1° elemento nonnullo di R_i^A è detto *i-esimo pivot,*
- su $M_{m,n}(\mathbf{k})$ sono definite un'*addizione* e una *moltiplicazione per scalari,* piú precisamente: dati $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbf{k})$, $\lambda \in \mathbf{k}$,
  $A + B := (a_{ij} + b_{ij})$,
  $\lambda A := (\lambda a_{ij})$ e in particolare $-A := (-a_{ij})$,
  tali operazioni lo rendono *spazio vettoriale su* $\mathbf{k}$[6].
- Se $A = (a_{ih}) \in M_{m,n}(\mathbf{k}), B = (b_{hj}) \in M_{n,p}(\mathbf{k})$, il *prodotto righe per colonne di A e B* è
  $$AB := C = (c_{ij}) \in M_{m,p}(\mathbf{k}) \qquad \text{con} \quad c_{ij} := \sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{hj}.$$
  Se $A \in M_{m,n}(\mathbf{k}), B \in M_{n,m}(\mathbf{k})$, si ha $AB \in M_m(\mathbf{k})$ e $BA \in M_n(\mathbf{k})$[7].
- Proprietà della moltiplicazione righe per colonne di matrici.
  Siano: $A, B \in M_{m,n}(\mathbf{k}), C, D \in M_{n,p}(\mathbf{k}), E \in M_{p,q}(\mathbf{k}), I_n \in M_n(\mathbf{k}), \lambda \in \mathbf{k}$
  a) $(AC)E = A(CE)$ *associatività di* $\cdot$,
  b) $(A+B)C = AC + BC$ *distributatività di* $+$ *rispetto a* $\cdot$,
  c) $A(C+D) = AC + AD$ *distributatività di* $\cdot$ *rispetto a* $+$,
  d) $A(\lambda C) = \lambda(AC) = (\lambda A)C$ *omogeneità degli scalari,*
  e) $AI_n = A$, $I_n C = C$,
  f) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$,
  g) ${}^t(AC) = {}^tC\, {}^tA$[8],
- una $A \in M_n(\mathbf{k})$ è detta *matrice invertibile* se $\exists\, B \in M_n(\mathbf{k})$ tale che $AB = I = BA$, tale B è detta *inversa di* A ed è denotata A^{-1}.

L'insieme delle $A \in M_n(\mathbf{k})$ invertibili è un gruppo (non commutativo!), rispetto alla moltiplicazione righe per colonne di matrici[9], detto *gruppo lineare di ordine* n e denotato $Gl_n(\mathbf{k})$[10].

---

[6]Infatti soddisfano:
$[SV1]$ $(A+B)+C = A+(B+C)$, $[SV5]$ $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$,
$[SV2]$ $A + 0 = A = 0 + A$, $[SV6]$ $1_{\mathbf{k}}A = A$
$[SV3]$ $A + (-A) = 0 = -A + A$, $[SV7]$ $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$,
$[SV4]$ $A + B = B + A$, $[SV8]$ $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.

[7]Non vale in genere $AB = BA$, neppure se $m = n$, e.g. se: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, si ha $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

[8]Proviamo, per esempio, l'associatività, ponendo $W = AC, Z = CE, X = WE, Y = AZ$, si ha:
$w_{ij} := \sum_{l=1}^{n} a_{il} c_{lh}$, $\;z_{lj} := \sum_{h=1}^{p} c_{lh} e_{hj}$,
$x_{ij} := \sum_{h=1}^{p} w_{ih} e_{hj}$, $\;y_{ij} := \sum_{l=1}^{n} a_{il} z_{lj}$,
da cui $x_{ij} = \sum_{h=1}^{p} (\sum_{l=1}^{n} a_{il} c_{lh}) e_{hj} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \sum_{h=1}^{p} c_{lh} e_{hj} = y_{ij}$.

[9]Infatti, la moltiplicazione righe per colonne di matrici è associativa per a), se A, B sono invertibili anche AB è tale e come inversa ha $B^{-1}A^{-1}$ dal momento che $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$, la matrice identica I_n è l'elemento neutro per e), e l'inversa dell'inversa A^{-1} di una matrice invertibile A è A stessa.

[10]Non tutte le matrici quadrate sono invertibili, per esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non lo sono.

Esempio 1.2. Dato $M_3(\mathbb{R}) = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \quad a, b, c, d, \in \mathbb{R}\}$. L'insieme

$$\{v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

è tale che per ogni $A \in M_3(\mathbb{R})$ vale: $\quad A = av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4$.

Esercizio 1.3. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, provare che $\nexists\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tali che $A = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$.

2. Spazi vettoriali

Sin qui abbiamo osservato che, dato un corpo commutativo $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}^n$ e $M_n(\mathbf{k})$ sono $\mathbf{k}$-spazi vettoriali. Diamo ora la definizione 'astratta' di $\mathbf{k}$-spazio vettoriale.

Definizione 2.1. Un $\mathbf{k}$-*spazio vettoriale su un corpo commutativo* $\mathbf{k}$ è un insieme $\emptyset \neq V$ (i cui elementi sono detti *vettori* mentre quelli di $\mathbf{k}$ *scalari)* su cui sono date due operazioni:

(1) $V \times V \xrightarrow{+} V$ definita da $(u, v) \mapsto w := u + v$ *(addizione)*,
(2) $V \times \mathbf{k} \xrightarrow{\cdot} V$ definita da $(u, \lambda) \mapsto w := \lambda u$ *(moltiplicazione per scalari* o *esterna)*,

soddisfacenti per ogni $u, v, w \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbf{k}$:

SV 1 $(u + v) + w = u + (v + w)$, *associatività dell'addizione,*
SV 2 $u + 0_V = u = 0_V + u$, *esistenza dell'elemento neutro per l'addizione,*
SV 3 $u + (-u) = 0V = -u + i$, *esistenza dell'opposto per l'addizione,*
SV 4 $u + v = v + u$, *commutatività per l'addizione,*
SV 5 $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$, *associatività della moltiplicazione esterna,*
SV 6 $1_{\mathbf{k}} u = u$ *unitarietà,*
SV 7 $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$, *distributatività della m. e. rispetto all'a. di scalari,*
SV 8 $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$, *distributatività della m. e. rispetto all'a. di vettori.*

Definizione 2.2. Siano V un $\mathbf{k}$-spazio vettoriale*,* $v_1, \ldots, v_r \in V$*, e* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbf{k}$:

(1) Una *combinazione lineare,* per brevità c.l., *di* $v_1, \ldots, v_r$ *a coefficienti in* $\mathbf{k}$, è una scrittura

$$v := \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i,$$

(2) se $\forall\, v \in V$ è esprimibile come c.l. di $v_1, \ldots, v_r \in V$, $\{v_1, \ldots, v_r\}$ è un *sistema di generatori,* per brevità s.d.g., *di V.*

Esempio 2.3. 1. $\{\underline{e_1}, \ldots, \underline{e_n}\}$ è un s.d.g. di $\mathbf{k}^n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$;
2. $\{v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ è s.d.g. di $M_2(\mathbb{R})$;

Esercizio 2.4. Scrivere un s.d.g. di $M_{m,n}(\mathbf{k}), \forall\, m, n$.

Definizione 2.5. Un insieme $F = \{v_1, \ldots, v_s\}$ di vettori di uno spazio vettoriale V è detto *linearmente dipendente* se $\exists\ \lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbf{k}$, non tutti nulli, tali che

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s = 0_V,$$

altrimenti F è detto *linearmente indipendente*[11].

[11]Per brevità scriveremo rispettivamente l.d. e l.i..

ESEMPIO 2.6. 1. In $\mathbb{R}^4$ l'insieme $\{\underline{v_1} = (1,2,1,0), \underline{v_2} = (1,0,0,1), \underline{v_3} = (0,1,1,1)\}$ è l.i.

infatti si ha $a\underline{v_1} + b\underline{v_2} + c\underline{v_3} = 0_{\mathbb{R}^4} \iff \begin{cases} a+b=0 \\ 2a+c=0 \\ a+c=0 \\ b+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-b \\ 2a=-c \\ a=-c \\ b=-c \end{cases}$ da cui

$2a = a \Longrightarrow a=0, b=0, c=0.$

2. In $\mathbb{R}^4$ l'insieme $\{\underline{w_1} = (1,2,1,0), \underline{w_2} = (1,0,0,1), \underline{w_3} = (2,2,1,1)\}$ è l.d.
si ha infatti $\underline{w_1} + \underline{w_2} - \underline{w_3} = 0_{\mathbb{R}^4}$[12].
3. Si prova che se $F \subset V$ è l. d. e $G \supset F$, anche G è l.d..

NOTAZIONE 2.7. Se $v \in V$ è c.l. di $v_1, \ldots, v_r \in V$, scriveremo $v \in < v_1, \ldots, v_r >$[13].

3. Sistemi di equazioni lineari

DEFINIZIONE 3.1. (i) Un' *equazione lineare nelle incognite $X_1, \ldots, X_m$ a coefficienti in un corpo commutativo* $\mathbf{k}$ è un'espressione del tipo:

$$a_1X_1 + \cdots + a_mX_m = b \tag{2}$$

con $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{k}$ *coefficienti* e $b \in \mathbf{k}$ *termine noto.*
Se $b = 0$, (2) è detta *equazione lineare omogenea.*
Una *soluzione* di (2) è un ${}^t(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbf{k}^m$, tale che $a_1\alpha_1 + \cdots + a_m\alpha_m = b$.

(ii) Un *sistema lineare di p equazioni (a coefficienti in un corpo commutativo* $\mathbf{k}$) *nelle incognite* $X_1, \ldots, X_m$ è un insieme di p equazioni lineari:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + \cdots + a_{1m}X_m = b_1 \\ a_{21}X_1 + \cdots + a_{2m}X_m = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{p1}X_1 + \cdots + a_{pm}X_m = b_p \end{cases} . \tag{3}$$

Posto: $A := (a_{ij}) \in M_{p,m}(\mathbf{k})$ *matrice dei coefficienti di (3),*
$\mathbf{X} :={}^t (X_1, \ldots, X_m) \in M_{m,1}(\mathbf{k})$ *vettore (colonna) delle indeterminate,*
$\mathbf{b} :={}^t (b_1, \ldots, b_p) \in M_{p,1}(\mathbf{k})$ *vettore (colonna) dei termini noti,*
abbiamo la scrittura matriciale di (3):

$$A\mathbf{X} = \mathbf{b}. \tag{4}$$

Una *soluzione di* (4) è un ${}^t(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbf{k}^m$, che risolve tutte le equazioni di (4).
Un sistema lineare è detto *omogeneo* se tutte le sue equazioni sono omogenee.
Un sistema lineare è detto *compatibile* se possiede almeno una soluzione[14].
Un sistema lineare è detto *a scalini* se la sua matrice dei coefficienti è tale.

---

[12] D'ora in avanti eviteremo di sottolineare i vettori di $\mathbf{k}^n$.
[13] Si usano anche le scritture $v \in \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_r), v \in Span_{\mathbf{k}}\{v_1, \ldots, v_r\}$.
[14] n.b. I sistemi lineari possono avere: nessuna soluzione, un'unica soluzione, infinite soluzioni.

(iii) Il sistema omogeneo, con la stessa matrice dei coefficienti di (3) o (4)),

$$AX = \mathbf{0}^{15} \tag{5}$$

è detto *sistema omogeneo associato.*

ESERCIZIO 3.2. (1) Provare che ogni sistema omogeneo è compatibile.
(2) Provare che ogni sistema lineare che ammette la soluzione banale $0_{\mathbf{k}^n}$ è omogeneo.

DEFINIZIONE 3.3. Due sistemi lineari sono detti *equivalenti* se hanno le stesse soluzioni[16].

ESEMPIO 3.4. Se nella matrice A dei coefficienti di (3) c'è una riga nulla, e.g. $R_i^A = {}^t\mathbf{0}$, $1 \leq i \leq p$, ossia in (3) c'è un'equazione della forma ${}^t\mathbf{0} = b_i$, poiché questa è identicamente soddisfatta se $b_i = 0$ altrimenti è incompatibile; se $b_i = 0$ è possibile cancellare da (3) l'i-esima equazione, ottenendo un sistema (3') equivalente a quello dato, altrimenti il sistema (3) dato è incompatibile.

OSSERVAZIONE 3.5. (1) Siano V, V_0 gli insiemi delle soluzioni di (4) e di (5). Per ogni $\alpha, \beta \in V$ si ha $\alpha - \beta \in V_0$[17]. Invece, per ogn i $\alpha \in V$ e $\gamma \in V_0$ si ha $\alpha + \gamma \in V$[18]. Si prova infine che se (3) è compatibile, le sue soluzioni sono tutte e sole quelle ottenute sommando a una sua soluzione particolare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato[19].
(2) Accanto alla matrice A dei coefficienti di (3), si considera la *matrice completa dei coefficienti di* (3)

$$B := (A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pm} & b_p \end{array}\right).$$

(3) è compatibile se e solo se $\exists\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbf{k}^m$ tale che $\alpha_1 C_A^1 + \cdots + \alpha_m C_A^m = \mathbf{b}$, ossia $\mathbf{b} \in < C_A^1, \ldots, C_A^m >$. In particolare, un sistema omogeneo ha soluzione non banale se e solo se le colonne della sua matrice dei coefficienti sono l.d..
(3) Dati i sistemi $A'\mathbf{X} = \mathbf{b}', A''\mathbf{X} = \mathbf{b}''$ con $A' \in M_{t,n}(\mathbf{k}), \mathbf{b}' \in M_{t,1}(\mathbf{k}), A'' \in M_{s,n}(\mathbf{k}), \mathbf{b}'' \in M_{s,1}(\mathbf{k})$, l'insieme delle soluzioni comuni ai due sistemi coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ con $A = \binom{A'}{A''} \in M_{t+s,n}(\mathbf{k})$ e $\mathbf{b} = \binom{\mathbf{b}'}{\mathbf{b}''} \in M_{t+s,1}(\mathbf{k})$.

PROPOSIZIONE 3.6. *Sia $p = m$, se la matrice dei coefficienti A è triangolare superiore con $a_{11}a_{22}\cdots a_{mm} \neq 0$ il sistema (3) ha un'unica soluzione.*

Dim. Dall'ultima equazione $a_{mm}X_m = b_m$ si ricava $X_m = \frac{b_m}{a_{mm}}$, che, sostituito nella penultima equazione $a_{m-1m-1}X_{m-1} + a_{m-1m}X_m = b_{m-1}$, dà $X_{m-1} = \frac{1}{a_{m-1m-1}}(b_{m-1} - a_{m-1m}\frac{b_m}{a_{mm}})$. Sostituendo entrambi nella terz'ultima equazione, si ricava un unico valore per X_{m-2} e cosí via.

OSSERVAZIONE 3.7. Se A è una matrice a scalini, con p righe nonnulle, ci si riconduce al caso esaminato in Prop. 3.6. Con le colonne contenenti i pivot si produce una matrice A triangolare

[15] Dove $\mathbf{0} := 0_{\mathbf{k}^p}$.

[16] n.b. Ciò implica che i due sistemi hanno lo stesso numero di incognite, ma non necessariamente di equazioni!

[17] Infatti, $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\alpha_j = b_i$, $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\beta_j = b_i$, $\forall\ i \in \{1, \ldots, p\} \implies \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(\alpha_j - \beta_j) = 0$.

[18] Infatti $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(\alpha_j + \gamma_j) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\alpha_j + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\gamma_j = b_i + 0_{\mathbf{k}} = b_i$.

[19] Infatti, data $\alpha \in V$, $\forall \beta \in V$ si ha $\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$ e si conclude perché $\alpha \in V, \beta - \alpha \in V_0$.

superiore, di ordine p, le rimanenti incognite con i rispettivi coefficient ivanno al secondo membro di ogni equazione. La soluzione non è piú unica, dipendendo dalle $m-p$[20] 'variabili libere'.

Esempio 3.8. Dato il sistema a scalini $\begin{cases} X_1+X_2+X_3+X_4-X_5=2 \\ X_2-X_3+X_5=1 \\ X_4-X_5=0 \end{cases}$, si costruisce il sistema ausiliario $\begin{cases} X_1+X_2+X_4=2-X_3+X_5 \\ X_2=1+X_3-X_5 \\ X_4=X_5 \end{cases}$, le cui ∞^2 soluzioni, dipendenti da 2 parametri $s,t\in\mathbb{R}$, sono $(1,1,0,0,0)+(-2s+t,s-t,s,t,t)$.

4. Eliminazione Gaussiana

Il *metodo di eliminazione Gaussiana* consiste precisamente nel risolvere il sistema lineare dato risolvendone uno equivalente piú facile ottenuto da esso.

4.1. Operazioni (e matrici) elementari. [21] Sulle equazioni di un sistema lineare (o, equivalentemente, sulle righe della matrice dei coefficienti) è possibile operare come segue:

$E_{i,j}$: scambiare tra loro la i-sima e la j-sima equazione (riga),
$E_i(c)$: moltiplicare per lo scalare nonnullo c la i-sima equazione (riga),
$E_{i,j}(c)$: sostituire alla i-sima equazione (riga) la sua somma con la j-sima moltiplicata per lo scalare nonnullo c.

Proposizione 4.1. *Ogni o.e. sulle equazioni di un sistema lo muta in uno equivalente.*

Dim. Verifichiamo (come esempio) che $\forall\ \alpha :=^t (\alpha_1,\dots,\alpha_m)\in\mathbf{k}^m$ soluzione di (3), è soluzione di (3') ottenuto da (3) sostituendo alla i-esima equazione la somma tra la i-esima equazione stessa e un multiplo nonnullo della j-esima equazione ($i\neq j$), infatti da

$$a_{i1}\alpha_1+\cdots+a_{im}\alpha_m=b_i,\ a_{j1}\alpha_1+\cdots+a_{jm}\alpha_m=b_j,\ \text{ si ottiene}$$
$$(a_{i1}+ca_{j1})\alpha_1+\cdots+(a_{im}+ca_{jm})\alpha_m=b_i+cb_j;$$

viceversa, se $\beta:=(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathbf{k}^m$ è soluzione di (3') allora β è soluzione di (3), infatti:

$$(a_{i1}+ca_{j1})\beta_1+\cdots+(a_{im}+ca_{jm})\beta_m=b_i+cb_j \quad \text{implica}$$
$$a_{i1}\beta_1+\cdots a_{im}\beta_m+c(a_{j1}\beta_1\cdots+a_{jm}\beta_m)=b_i+cb_j,\ \text{ ossia } \beta \text{ soluzione di (3) come asserito.}$$

Proposizione 4.2. *Se $A\in Gl_n(\mathbf{k})$, il sistema omogeneo associato (5) ha solo la soluzione nulla.*

Dim. Se $x\in\mathbf{k}^n$ è soluzione di (5), ossia $Ax=0_{\mathbf{k}^n}$, si ha: $x=I_nx=A^{-1}Ax=A^{-1}0_{\mathbf{k}^n}=0_{\mathbf{k}^n}$.

Definizione 4.3. Dicesi *m.e. di ordine* n ogni matrice di $M_n(\mathbf{k})$ ottenibile da I_n mediante un'o.e. sulle righe.

$E_{i,j}$: scambio di $R_i^{I_n}$ con $R_j^{I_n}$, $\qquad E_{ij}^{-1}=E_{ji}$,
$E_i(c)$: moltiplicazione di $R_i^{I_n}$ per $c\in\mathbf{k}^*$, $\qquad E_i(c)^{-1}=E_i(c^{-1})$,
$E_{ij}(c)$: addizione di $R_i^{I_n}$ con $R_j^{I_n}$ per $c\in\mathbf{k}^*$, $\qquad E_{ij}(c)^{-1}=E_{ij}(-c)$[22].

[20] Si dice che un sistema lineare (di equazioni in m indeterminate) a scalini con p equazioni nonnulle ha ∞^{m-p} soluzioni.

[21] Rispettivamente o.e. e m.e.

[22] Ogni o.e. sulle righe di una $A\in M_{m,n}(\mathbf{k})$ si ottiene moltiplicando a sinistra A per la corrispondente m.e..

Proposizione 4.4. *$A \in Gl_n(\mathbf{k})$ se e solo se è esprimibile come prodotto di m.e..*

Dim. Chiaramente il prodotto di m.e. è invertibile. Se $A \in Gl_n(\mathbf{k})$, per Prop. 4.2, il sistema (5) ha solo la soluzione nulla, ossia, mediante o.e. sulle righe può essere trasformato nel sistema

$$\begin{array}{llllll} X_1 & & & & & = 0 \\ & X_2 & & & & = 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & X_{n-1} & & = 0 \\ & & & & X_n & = 0 \end{array}$$

ossia, per qualche $s \in \mathbb{N}^*$, $E_{\alpha_1} \cdots E_{\alpha_s} AX = I_n X$ i.e. $E_{\alpha_1} \cdots E_{\alpha_s} = A^{-1}$ e quindi

$$A = (A^{-1})^{-1} = (E_{\alpha_1} \cdots E_{\alpha_s})^{-1} = (E_{\alpha_s})^{-1} \cdots (E_{\alpha_1})^{-1}.$$

Osservazione 4.5. Nel corso della dimostrazione di Prop. 4.4 si è anche dimostrato che:

l'inversa di un'$A \in Gl_n(\mathbf{k})$ può essere calcolata mediante o.e. sulle righe,

diamo subito un metodo pratico per determinare A^{-1}.

Notazione 4.6. *Date $A, B, \in M_n(\mathbf{k})$, $(A \mid B) \in M_{n,2n}(\mathbf{k})$ è la matrice con*

$$R_i^{(A|B)} = (a_{i1}, \ldots, a_{in}, b_{i1}, \ldots, b_{in}).$$

Osservazione 4.7.

(1) Date $A, B, M \in M_n(\mathbf{k})$, si ha $M(A \mid B) = (MA \mid MB)$.

(2) Se $A \in Gl_n(\mathbf{k})$, $A^{-1}(A \mid I_n) = (A^{-1}A \mid A^{-1}I_n) = (I_n \mid A^{-1})$, ossia, mediante o.e. sulle righe, da $(A \mid I_n)$ si ottiene $(I_n \mid A^{-1})$, i.e. mediante o.e. sulle righe da A si ottiene A^{-1}.

Esempio 4.8. Si prova che $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile calcolandone l'inversa. Infatti:

$$(A \mid I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

ossia l'inversa di A è $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4.2. Algoritmo di eliminazione Gaussiana. L'algoritmo di eliminazione Gaussiana, che permette di stabilire quando un sistema è compatibile e (in caso affermativo) di trovarne tutte le soluzioni, consiste nel sostituire[23] al sistema assegnato un sistema a scalini[24] a esso equivalente .

Descrizione informale dell'algoritmo di eliminazione Gaussiana: Dato il sistema $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$, siano $B := (A \mid \mathbf{b})$ la sua matrice completa dei coefficienti e $A'\mathbf{X} = \mathbf{b}'$ il sistema a esso equivalente ottenuto mediante la riduzione a scalini. Possiamo supporre che
le eventuali righe nulle di A' compaiano al fondo di A',
il pivot di ogni riga nonnulla di A' sia 1,
ogni elemento al di sopra e al di sotto di un pivot sia 0 (di avere cioè una *matrice a scalini ridotta*).

Osservazione 4.9. Notiamo esplicitamente che un sistema lineare, di equazioni in n incognite, associato a una matrice a scalini (ridotta) B', è compatibile se B' non ha righe della forma

$$(0, \ldots, 0, *), \quad \text{con } * \neq 0$$

(ossia, A' e B' hanno lo stesso $n^\circ\, r$ di righe nonnulle), le soluzioni dipendono da $n - r$ parametri.

[23] Mediante un numero finito di successive o.e. sulle equazioni del sistema.

[24] Producendo eventualmente righe nulle, che evidenziano la compatibilità o meno. Se il sistema è compatibile, per Es. 3.4. possiamo quindi supporre che nella matrice dei coefficienti di (4) nessuna riga sia nulla.

Esempio 4.10. Dato $\begin{cases} X_1+X_2+X_3+X_4=1 \\ 2X_1+2X_2+X_3+X_4=2 \\ X_1+X_2+2X_3+2X_4=2 \\ 3X_1+3X_2+2X_3+3X_4=1 \end{cases}$ si ha:

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&1\\ 2&2&1&1&2\\ 1&1&2&2&2\\ 3&3&2&3&1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&1\\ 0&0&-1&-1&0\\ 0&0&1&1&1\\ 0&0&-1&0&-2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&1\\ 0&0&-1&-1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&-2 \end{array}\right)\to$$
$$\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&1\\ 0&0&-1&-1&0\\ 0&0&0&1&-2\\ 0&0&0&0&1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1}&1&0&0&1\\ 0&0&\mathbf{1}&0&2\\ 0&0&0&\mathbf{1}&-2\\ 0&0&0&0&1 \end{array}\right)=B'$$

Poiché il sistema lineare associato a B' è contraddittorio, lo è anche quello associato a B.

5. Caratteristica di una matrice

Definizione 5.1. La *caratteristica* di una matrice $A\in M_{n,m}(\mathbf{k})$ è il massimo numero $\rho(A)$ di righe o colonne[25] l.i. di A.

Esercizio 5.2. (1) Provare che $\rho(A)\le min(m,n)$.
(2) Provare che $\rho(A)=\rho({}^tA)$.
(3) Provare che se B è sottomatrice di A, si ha $\rho(B)\le\rho(A)$.

Proposizione 5.3. *Data $A\in M_{n,m}(\mathbf{k})$, se $B\in M_{n,m}(\mathbf{k})$ è ottenuta mediante una successione di o.e. sulle righe di A si ha*
$$\rho(A)=\rho(B).$$

Dim. Basta provarlo per una sola o.e.. Chiaramente sia $E_{i,j}$ che $E_i(c)$ non alterano ρ; sia allora A' la matrice ottenuta da A mediante $E_{ij}(c)$, si ha $R_j^{A'}=R_j^A$, $\forall\, j\neq i$ e $R_i^{A'}=R_i^A+cR_j^A$ pertanto:
$$0_{\mathbf{k}^m}=\sum_{\ell=1}^n a_\ell R_\ell^{A'}=\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i}}^n a_\ell R_\ell^A+a_i(R_i^A+cR_j^A)=\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq j}}^n a_\ell R_\ell^A+(a_ic+a_j)R_j^A,$$
ossia, una c.l. nulla delle righe di A' dà luogo a una c.l. nulla delle righe di A, vale anche il viceversa.

Proposizione 5.4. (1) *Date $A\in M_{m,n}(\mathbf{k})$, $B\in M_{n,p}(\mathbf{k})\Longrightarrow\rho(AB)\le min(\rho(A),\rho(B))$.*
(2) *Date $A\in Gl_m(\mathbf{k}),B\in M_{m,n}(\mathbf{k}),C\in Gl_n(\mathbf{k})\Longrightarrow\rho(AB)=\rho(B)=\rho(BC)$.*

Dim. (1) : siano $A=(a_{ij}),B=(b_{jh})$ e R_i^B,R_i^{AB} rispettivamente le righe i-esime di B e AB, si ha $R_i^{AB}=\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}R_j^B$, ossia ogni riga di AB è c.l. delle righe di B, dunque $\rho(AB)\le\rho(B)$, inoltre, $\rho(AB)=\rho({}^t(AB))=\rho({}^tB\,{}^tA)\le\rho({}^tA)=\rho(A)$. (2) : si ha $\rho(AB)\le\rho(B)=\rho(A^{-1}AB)\le\rho(AB)$, ossia $\rho(AB)=\rho(B)$ e analogamente $\rho(BC)\le\rho(B)=\rho(BCC^{-1})\le\rho(BC)$.

Teorema 5.5. *Data $A\in M_n(\mathbf{k})$, si ha $A\in Gl_n(\mathbf{k})\iff\rho(A)=n$.*

Dim. Se $A\in Gl_n(\mathbf{k})$ si ha $n=\rho(I_n)=\rho(AA^{-1})=\rho(A)$. Viceversa, se $\rho(A)=n$, $R_1^A,\dots,R_n^A$ costituiscono un s.d.g. di $\mathbf{k}^n$[26]. In particolare $\forall\, i,1\le i\le n,\exists\, b_{i1},\dots,b_{in}\in\mathbf{k}$ tali che $R_i^{I_n}=E_{(i)}=$

[25] Si dimostra che i due numeri coincidono.

[26] Vale infatti il seguente risultato, che noi non dimostriamo:

$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} R_j^A$, posto quindi $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbf{k})$, la matrice di tutti i coefficienti che esprimono tutte le righe di I_n come c.l. di quelle di A, si ottiene: $I_n = BA$, i.e. $A \in Gl_n(\mathbf{k})$.

DEFINIZIONE 5.7. Una *sottomatrice* $p \times q$ di una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbf{k})$ è una matrice costituita dagli elementi di A comuni a p righe e q colonne fissate di A.

Se $1 \leq i_1 < i_2 \ldots < i_p \leq m$ e $1 \leq j_1 < j_2 \ldots < j_q \leq n$, la sottomatrice corrispondente è denotata

$$A(i_1, \ldots, i_p \mid j_1, \ldots, j_q)$$

TEOREMA 5.8. *Data $A \in M_{m,n}(\mathbf{k})$, $\rho(A)$ è il massimo degli ordini delle sottomatrici quadrate invertibili di A.*

Dim. Siano r il massimo degli ordini delle sottomatrici quadrate invertibili di A e $\rho = \rho(A)$, si ha $r \leq \rho$. Se $R_{i_1}^A, \ldots, R_{i_\rho}^A$ sono l.i., posto $B := A(i_1, \ldots, i_\rho \mid 1, \ldots, n)$ si ha $\rho = \rho(B) \Longrightarrow$ in particolare $\exists\, C_B^{j_1}, \ldots, C_B^{j_\rho}$ colonne di B che sono l.i.. Posto $C := B(1, \ldots, \rho \mid j_1, \ldots, j_\rho)$ si ha $C \in Gl_n(\mathbf{k})$. Ma, $C := A(i_1, \ldots, i_\rho \mid j_1, \ldots, j_\rho)$ è una sottomatrice quadrata invertibile di A, pertanto $r \geq \rho$.

6. Il teorema di Rouché-Capelli

TEOREMA 6.1. *Il sistema (4) è compatibile se e solo se*

$$\rho(A) = \rho((A \mid \mathbf{b})),$$

in tal caso (4) ha $\infty^{m-\rho}$ soluzioni, dove $\rho = \rho(A)$.

Dim. Un vettore $\alpha :=^t (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbf{k}^m$ è soluzione di (4) se e solo se $A\alpha = \mathbf{b}$, i.e. $\alpha_1 C_A^1 + \cdots + \alpha_n C_A^m = \mathbf{b}$ i.e. $\mathbf{b} \in < C_A^1, \ldots, C_A^m >$, questo accade se e solo se $\rho(A) = \rho((A \mid \mathbf{b}))$.

Se (4) è compatibile e $\rho = \rho(A)$, possiamo supporre che le prime ρ equazioni siano l.i. e sostituire (3) con il sistema equivalente:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + \cdots + a_{1m}X_m = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{\rho 1}X_1 + \cdots + a_{\rho m}X_m = b_\rho \end{cases} . \tag{6}$$

Applicando l'eliminazione Gaussiana a (6), nessuna equazione si riduce a $0 = 0$ (altrimenti sarebbe l.d. dalle precedenti), pertanto (6) si riduce a un sistema a scalini di ρ equazioni che possiede $\infty^{m-\rho}$ soluzioni, quindi anche (4) ha $\infty^{m-\rho}$ soluzioni.

7. Determinante di matrici quadrate

NOTAZIONE 7.1. D'ora in avanti[27], data la matrice A, anziché R_i^A, C_A^j scriveremo A_i, A^j.

LEMMA 5.6. *[Lemma di Steinitz (1871-1928)] Dati V uno spazio vettoriale, $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ un sistema di generatori e $G = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset V$ un sottinsieme. Se $m > n \Longrightarrow G$ è linearmente dipendente.*

Da cui discende che $\forall v \in \mathbf{k}^n, \{v, R_1^A, \ldots, R_n^A\}$ è un insieme l.d. e quindi $\exists \lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{k}$ tali che $\lambda v + \lambda_1 R_1^A + \ldots + \lambda_n R_n^A = 0_{\mathbf{k}^n}$ e siccome $\rho(A) = n \Longrightarrow R_1^A, \ldots, R_n^A$ l.i, necessariamente $\lambda \neq 0$ e quindi $v \in < R_1^A, \ldots, R_n^A >$.

[27]Per semplificare le notazioni.

Data $A \in M_n(\mathbf{k})$, vogliamo definire un'applicazione (detta *determinante di A*)

$$d : M_n(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathbf{k} \text{ tale che } A_1, \ldots, A_n \text{ l.d. } \iff d(A) = 0_{\mathbf{k}}.$$

Se $n = 1$, $A = (a_{11}) \in M_1(\mathbf{k})$, A_1 l.d. $\iff a_{11} = 0_{\mathbf{k}}$, si pone $d(A) := a_{11}$.

Se $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{k})$, sono condizioni equivalenti:

(1) A_1, A_2 l.d.;

(2) $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0_{\mathbf{k}}$.

Se una fra A_1, A_2 è nulla chiaramente (1) e (2) valgono. Sia dunque $A_1 \neq 0_{\mathbf{k}^2} \neq A_2$, se A_1, A_2 sono l.d. $\exists\, \lambda \in \mathbf{k}^* : A_1 = \lambda A_2$, i.e. $a_{11} = \lambda a_{21}, a_{12} = \lambda a_{22}$, ossia, $0_{\mathbf{k}} = \lambda a_{21}a_{22} - \lambda a_{22}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Viceversa, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0_{\mathbf{k}}$ dà la combinazione lineare nulla non banale[28] $a_{22}A_1 - a_{12}A_2 = (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}, a_{12}a_{22} - a_{12}a_{22}) = (0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}})$, si può allora porre

$$d(A) := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

L'esistenza di $d : M_n(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathbf{k}$ tale che $A_1, \ldots, A_n$ l.d. $\iff d(A) = 0_{\mathbf{k}}$, è cosí provata per $n = 1, 2$.

Proprietà del determinante (per $n = 2$)[29] :

1. se $A_1 = \lambda B + \mu B'$, $B = (a_{11}, a_{12})$, $B' = (\alpha_{11}, \alpha_{12})$, si ha:

$$\begin{aligned} d(A) &= \begin{vmatrix} \lambda a_{11} + \mu\alpha_{11} & \lambda a_{12} + \mu\alpha_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \\ &= (\lambda a_{11} + \mu\alpha_{11})a_{22} - (\lambda a_{12} + \mu\alpha_{12})a_{21} = \lambda a_{11}a_{22} + \mu\alpha_{11}a_{22} - \lambda a_{12}a_{21} - \mu\alpha_{12}a_{21} = \\ &= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda d(B, A_2) + \mu d(B', A_2); \end{aligned}$$

2. $d(A_2, A_1) = -d(A_1, A_2)$;
3. $d(I_2) = d(e_1, e_2) = 1$.

   da cui risulta che la funzione determinante di ordine 2 è:

- *multilineare* (ossia, lineare su ogni riga),
- *alternante* (ossia, scambiando fra loro due righe il determinante cambia segno);
- *unitaria* (ossia, $d(I_2) = 1$).

  Multilinearità, alternanza e unitarietà caratterizzano la funzione determinante di ordine 2, verifichiamo infatti che se $\delta : M_2(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathbf{k}$ le soddisfa, allora $\delta(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
  Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, essendo $A_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2, A_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2$, si ha
  $\delta(A) = a_{11}\delta(e_1, A_2) + a_{12}\delta(e_1, A_2) = a_{11}a_{21}\delta(e_1, e_1) + a_{11}a_{22}\delta(e_1, e_2) + a_{12}a_{21}\delta(e_2, e_2) + a_{12}a_{21}\delta(e_2, e_1) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Possiamo quindi dare la seguente definizione:

Definizione 7.2. Una *funzione determinante di ordine 2* è un'applicazione

$$d : M_2(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathbf{k}, \quad \textit{multilineare, alternante e unitaria.}$$

Vogliamo provare ora che anche per ogni $n \geq 3$ esiste un'unica applicazione:

$$d : M_n(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathbf{k}, \quad \text{multilineare, alternante e unitaria.}$$

Sia $d : M_n(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathbf{k}$, un'applicazione multilineare, alternante e unitaria, si ha:

---

[28] Perché $0_{\mathbf{k}^2} \neq A_2$!.

[29] Valgono in modo banale anche per $n = 1$!

- Se A ha una riga nulla, $d(A) = 0_{\mathbf{k}}$. Sia $A_i = 0_{\mathbf{k}^n}$, pensando $A_i = 0_{\mathbf{k}} \cdot B$ risulta $d(A) = d(A_1, \ldots, A_n) = d(A_1, \ldots, 0_{\mathbf{k}} B, \ldots, A_n) = 0_{\mathbf{k}} \cdot d(A_1, \ldots, B, \ldots A_n) = 0_{\mathbf{k}}$;
- Se A ha due righe uguali, $d(A) = 0_{\mathbf{k}}$. Sia $A_i = A_j, i \neq j$, risulta
$$\begin{aligned} d(A) &= d(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = \\ &= -d(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots, A_n) = -d(A), \quad \text{ossia } d(A) = 0_{\mathbf{k}}; \end{aligned}$$
- Se le righe di A sono l.d., $d(A) = 0_{\mathbf{k}}$. Sia $A_i \in < A_1, \ldots, \widehat{A_i}, \ldots, A_n >$ risulta $A_i = \sum\limits_{i \neq j} \lambda_j A_j$ e quindi $d(A)$ risulta essere una c.l. di determinanti di matrici o con due righe uguali o con una riga nulla, cosí $d(A) = 0_{\mathbf{k}}$ come affermato;
- Se A è diagonale o triangolare (inferiore o superiore), $d(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$. Se A è diagonale, $A_i = a_{ii} e_i, \forall\, 1 \leq i \leq n \Longrightarrow d(A) = d(A_1, \ldots, A_n) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn} \cdot d(I_n) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$.
Proviamo che se A è triangolare con $a_{ii} = 0_{\mathbf{k}}$ per qualche $i, 1 \leq i \leq n$, $d(A) = 0_{\mathbf{k}}$, se $A_i = (0_{\mathbf{k}}, \ldots, 0_{\mathbf{k}}, a_{ii+1}, \ldots, a_{in})$, risulta $< A_i, \ldots, A_n > \subseteq \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{k}^n : x_1 = x_2 = \cdots = x_i = 0_{\mathbf{k}}\} =< e_{i+1}, \ldots, e_n >$, essendo $\#\{A_i, \ldots, A_n\} = n - i + 1$ e $\#\{e_{i+1}, \ldots, e_n\} = n - i$, le righe $A_i, \ldots, A_n$ sono l.d. e quindi $d(A) = 0_{\mathbf{k}}$ come asserito[30].
In generale, se A è una matrice triangolare e $A_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n})$, si scrive $A_1 = B_1 + C_1$, con $B_1 = (a_{11}, 0_{\mathbf{k}}, \ldots, 0_{\mathbf{k}}), C_1 = (0_{\mathbf{k}}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$ e
$$\begin{aligned} d(A) &= d(A_1, \ldots, A_n) = d(B_1 + C_1, A_2, \ldots, A_n) = \\ &= d(B_1, A_2, \ldots, A_n) + d(C_1, A_2, \ldots, A_n) = \\ &= d(B_1, A_2, \ldots, A_n) + 0_{\mathbf{k}}, \end{aligned}$$
$(0_{\mathbf{k}}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) = A_2 = B_2 + C_2, B_2 = (0_{\mathbf{k}}, a_{22}, 0_{\mathbf{k}}, \ldots, 0_{\mathbf{k}}), C_2 = (0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}}, a_{23}, \ldots, a_{2n})$ e
$$\begin{aligned} d(A) &= d(B_1, A_2, \ldots, A_n) = d(B_1, B_2 + C_2, \ldots, A_n) = \\ &= d(B_1, B_2, \ldots, A_n) + d(B_1, C_2, \ldots, A_n) = \\ &= d(B_1, B_2, A_3, \ldots, A_n) + 0_{\mathbf{k}}, \end{aligned}$$
e cosí via, con $B_i = e_i a_{ii}$, fino a $d(A) = d(B), B = (B_1, B_2 \ldots, B_n)$ matrice diagonale, con $b_{ii} = a_{ii}, \forall\, i$.
- Se A' è una matrice triangolare ottenuta da A mediante o.e., si ha $d(A') = 0_{\mathbf{k}} \iff d(A) = 0_{\mathbf{k}}$. Le o.e. di tipo $E_{i,j}(c)$ non alterano il determinante, dobbiamo quindi tenere conto solo delle o.e. di tipo $E_{i,j}$ (ciascuna delle quali lo altera per un fattore -1) e delle o.e. di tipo $E_i(c)$ (ciascuna delle quali lo altera il per il fattore c), pertanto, se A' è ottenuta da A via r scambi di righe e s moltiplicazioni di righe per scalari nonnulli $c_1, \ldots, c_s \in \mathbf{k}$, avremo $d(A') = (-1)^r c_1 \cdots c_s d(A)$ e quindi $d(A) = (-1)^r c_1^{-1} \cdots c_s^{-1} b_{11} \cdots b_{nn}, b_{ii}, 1 \leq i \leq n$, elementi della diagonale principale di A'. Ossia la tesi, essendo $d(A) = \gamma d(A')$, con $\gamma \neq 0_{\mathbf{k}}$.

Proposizione 7.3. *Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, $\exists!$ applicazione*
$$d : M_n(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathbf{k}, \qquad \textit{multilineare, alternante e unitaria.}$$

Dim. Proviamo l'unicità: siano $d, d' : M_n(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathbf{k}$, multilineari, alternanti e unitarie, calcoliamo $d(A)$ e $d'(A)$ riducendo A a forma triangolare A', avendo provato sopra che valgono $d(A') =$

[30]Provare che una matrice triangolare A ha righe l.d. se e solo se con o.e. sulle righe di tipo $E_{i,j}(c)$ (che manifestamente non alterano il determinante) può essere trasformata in una matrice (triangolare) A' con $a'_{ii} = 0_{\mathbf{k}}$ per qualche i.

$d'(A') = b_{11} \cdots b_{nn}, d(A) = d(A')$ e $d'(A) = d'(A')$, abbiamo la tesi. Quanto all'esistenza, procediamo via induzione: abbiamo già visto che $d(A) = a_{11}$, per $n = 1$, e $d(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, per $n = 2$, soddisfano, supponiamo quindi di avere definito una funzione $\bar{d} : M_{n-1}(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathbf{k}$, multilineare, alternante e unitaria (unica!), se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{k})$, con A_{ij} indichiamo lo scalare:

$$(-1)^{i+j}\bar{d}(A(1, \ldots, \hat{\imath}, \ldots, n \mid 1, \ldots, \hat{\imath}, \ldots, n)), \text{ detto } cofattore^{31} \text{ di } a_{ij},$$

definiamo due applicazioni $d_i : M_n(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathbf{k}$ e $d^j : M_n(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathbf{k}$, ponendo $\forall 1 \leq i, j \leq n$:

$$d_i(A) := a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad \textit{sviluppo rispetto alla } i - \textit{esima riga},$$

$$d^j(A) := a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad \textit{sviluppo rispetto alla } j - \textit{esima colonna},$$

essendo entrambe multilineari, alternanti e unitarie, esse coincidono (per l'unicità)[32].

Osservazione 7.4. Discende dalla definizione data che il calcolo di un determinante di ordine n si riduce al calcolo di n determinanti di ordine $n-1$, ciascuno dei quali si riduce al calcolo di $n-1$ determinanti di ordine $n-2$, ecc. Ci si riconduce cosí al calcolo di determinanti di ordine 2 o 3; per i determinanti di ordine 3 $\exists$ regole di calcolo pratiche, e.g. la *regola di Sarrus:*
Data $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, basta scrivere $A' = \left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right)$, e prendere col segno positivo i prodotti degli elementi sulle tre 'diagonali' da sinistra a destra, col segno negativo i prodotti degli elementi sulle tre 'diagonali' da destra a sinistra, ossia

$$d(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Definizione 7.5. Un *minore di ordine* $p \leq \min(n, m)$ di $A \in M_{m,n}(\mathbf{k})$ è il deteminante di una sottomatrice $p \times p$ di A.

Esercizio 7.6. (1) Si ha $d(A) = d({}^tA)$, $\forall\, A \in M_n(\mathbf{k})$.
(2) Metodo efficiente per il calcolo di $d(A)$, se $A \in M_n(\mathbf{k}), n \gg 0$, è la riduzione Gaussiana.
(3) Provare che $d(A) \neq 0_{\mathbf{k}} \iff \rho(A) = n, A \in M_n(\mathbf{k})$.
(4) Provare che se $A \in M_{m,n}(\mathbf{k})$, $\rho(A)$ è il massimo ordine dei minori nonnulli.
(5) Data $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, calcolare A_{22} e A_{23}.

Ricordiamo infine, senza dimostrazione, alcuni teoremi importanti:

Teorema 7.7 (2°[33] Teorema di Laplace (1749-1827)). *Data una matrice* $A = (a_{hl}) \in M_n(\mathbf{k})$, $\forall\ 1 \leq i \neq j \leq n$, *si ha:*
(1) $a_{i1}A_{j1} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$,
(2) $a_{1i}A_{1j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0$[34].

---

[31]O anche *complemento algebrico.*

[32]Possono quindi entrambe essere chiamate *funzione determinante.* Data $A \in M_n(\mathbf{k})$, per indicare il suo determinante invece di $d(A)$ si usa anche la scrittura $|A|$.

[33]La definizione di determinante data è semplice concettualmente, ma non è la classica, che lo *sviluppo rispetto a una riga o colonna qualsiasi* dia il determinante della matrice è precisamente l'enunciato del 1° Teorema di Laplace.

[34]Si afferma che moltiplicando gli elementi di una riga (o colonna) per i complementi algebrici di un'altra riga (o colonna) si ottiene $0_{\mathbf{k}}$, in effetti, cosí si calcola il determinante di una matrice con due righe (o colonne) uguali.

Definizione 7.8. Se $A \in M_n(\mathbf{k}), I = \{i_1, \dots, i_p\}, J = \{j_1, \dots, j_p\}, 1 < p < n$,

$$a_{I,J} \text{ indica la sottomatrice } A(i_1, \dots, i_p \mid j_1, \dots, j_p),$$

il *complemento algebrico* $A_{I,J}$ *di* a_{IJ} è il determinante della sottomatrice di A ottenuta cancellandone le righe $i_1, \dots, i_p$ e le colonne $j_1, \dots, j_p$, preso col segno $(-1)^{i_1+\cdots+i_p+j_1+\cdots+j_p}$.

Teorema 7.9 (3° Teorema di Laplace). *Data* $A = (a_{hl}) \in M_n(\mathbf{k})$ *e fissate* p *righe di indici* $R = \{r_1, \dots, r_p\}$ *(rispettivamente, fissate* q *colonne di indici* $S = \{s_1, \dots, s_q\}$*) si ha:*
$d(A) = \sum_{J=\{j_1<\cdots<j_p\}} a_{R,J}A_{R,J}, \quad d(A) = \sum_{I=\{i_1<\cdots<i_q\}} a_{I,S}A_{I,S}.$

Teorema 7.10 (Teorema di Binet (1786-1856)). *Date* $A, B \in M_n(\mathbf{k})$ *si ha:*

$$d(AB) = d(A)d(B).$$

8. Regole di Cramer e Kronecker

Usando i determinanti si può stabilire se una data $A \in M_n(\mathbf{k})$ è invertibile, calcolarne l'inversa e risolvere un sistema (4) con $A \in Gl_n(\mathbf{k})$.

Esercizio 8.1. (1) $A \in Gl_n(\mathbf{k}) \iff d(A) \neq 0_{\mathbf{k}}$.
(2) Se $d(A) \neq 0_{\mathbf{k}}$, $A^{-1} = (\alpha_{ij})$, con $\alpha_{ij} = \frac{1}{d(A)}A_{ji}$, e A_{ji} complemento algebrico di $a_{ji} \in A$.
(3) Se $A \in Gl_n(\mathbf{k})$, $d(A^{-1}) = d(A)^{-1}$.

Esempio 8.2. Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, calcolare A^{-1} usando i cofattori.
$d(A) = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$,ossia $A \in Gl_3(\mathbb{R})$, inoltre $A_{11} = 0, A_{12} = 1, A_{13} =$-1, $A_{21} =$-2, $A_{22} = 1,\ A_{23} = 0, A_{31} = 1, A_{32} = -1, A_{33} = 1$ e quindi $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Teorema 8.3 (Teorema di Cramer (1704-1752)). *Se* $A \in Gl_n(\mathbf{k})$, *il sistema (4) ha un'unica soluzione:*

$$\beta =^t (\beta_1, \dots, \beta_n) \qquad \textit{con} \quad \beta_i = \frac{\Delta_i}{d(A)}$$

dove Δ_i *è il determinante della matrice ottenuta da* A *sostituendo* $\mathbf{b}$ *a* C^i_A.

Dim. Si ha $A\beta = \mathbf{b} \Longrightarrow \beta = A^{-1}\mathbf{b}$ con $\beta_i = \frac{1}{d(A)} \sum_{j=1}^{n} A_{ji}b_j, 1 \leq i \leq n$.

Esempio 8.4. Studiare al variare del parametro reale λ il sistema lineare

$$(7) \quad \begin{cases} (\lambda-1)X + (\lambda+1)Y + \lambda Z = \lambda \\ \qquad\qquad (\lambda+1)Y + \lambda Z = 0 \\ (\lambda-1)X + \qquad\qquad +\lambda Z = \lambda \end{cases}, \qquad (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda-1 & \lambda+1 & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda+1 & \lambda & \lambda \\ \lambda-1 & 0 & \lambda & \lambda \end{array}\right),$$

$$d(A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda+1 & \lambda \\ 0 & \lambda+1 & \lambda \\ \lambda-1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2-1) + \lambda(\lambda^2-1) - \lambda(\lambda^2-1) = \lambda(\lambda^2-1), \text{da cui:}$$

se $\lambda = 0, (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $\rho(A) = \rho(A|B) = 2$, (7) ha ∞^1 soluzioni,

se $\lambda = 1$, $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$, $\rho(A) = 2, \rho(A|B) = 3$, (7) è incompatibile,

se $\lambda = -1, (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$, $\rho(A) = \rho(A|B) = 2$, (7) ha ∞^1 soluzioni,

$\forall \lambda \neq 0, 1, -1$, (7) ha un'unica soluzione.

Il calcolo della caratteristica di una matrice implica, per Es. 7.6.4. il computo di un grande numero di minori di ordini via via crescenti, diamo un metodo per semplificarlo.

Definizione 8.5. Date una matrice A e una sottomatrice B di ordine ρ, si dice *minore (di ordine $\rho+1$ di A) ottenuto orlando il minore* $|B|$ il determinante di una sottomatrice di A ottenuta aggiungendo una riga e una colonna a B.

Teorema 8.6 (Teorema di Kronecker). *Una matrice A, di tipo $m \times n$, ha caratteristica ρ se:*

- *$\exists$ un minore nonnullo di A avente ordine ρ,*
- *tutti i minori di A, di ordine $\rho+1$, ottenuti orlando il minore di ordine ρ nonnullo di cui sopra, sono nulli.*

Esempio 8.7. Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, calcolare $\rho(A)$. Si ha $A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,

Pertanto $\rho(A) \geq 2$, giacché $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ *e* $\rho(A) \leq 3$, giacché $d(A) = 0$. I minori di ordine 3 di A sono $\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3} = 16$, per il Teor. di Kronecker basta calcolarne $\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1} = 4$, precisamente, essendo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{si ha } \rho(A) = 2.$$

CHAPTER 3

VETTORI

1. Vettori applicati e vettori liberi

DEFINIZIONE 1.1. Un *vettore applicato dello spazio ordinario* o *segmento orientato* (abbreviato v.a.) è il dato di una coppia ordinata (A, B) di punti dello spazio detti A *punto iniziale* o *punto di applicazione,* B *punto finale* o *secondo estremo.* Il v.a. di estremi A e B è denotato $B - A$.

OSSERVAZIONE 1.2. Un v. a. $B - A$ individua (ed è individuato da):
- il punto di applicazione A,
- la *direzione* (della retta congiungente A e B, detta *retta di applicazione*),
- il *verso* (da A a B lungo la retta di applicazione),
- il *modulo* (numero reale, positivo o nullo, che misura la lunghezza del segmento di estremi A e B).

DEFINIZIONE 1.3. Due v. a. $B - A$ e $D - C$ sono *equipollenti, in simboli* $B - A \equiv D - C$, se hanno gli stessi direzione, verso e modulo[1].

OSSERVAZIONE 1.4. L'equipollenza è una *relazione di equivalenza*[2] *nell'insieme dei v.a.,* la *classe di equipollenza* di un v.a. è l'insieme dei v.a. a lui equipollenti.

DEFINIZIONE 1.5. (1) Un *vettore libero,* o semplicemente, *vettore dello spazio* è una classe di equipollenza di v.a..
(2) Se $B - A$ è un v.a. e u è il corrispondente vettore (libero) si scrive $B - A \in u$ e si legge $B - A$ *è un rappresentante di* u o anche u *è la classe di equipollenza di* $B - A$ e, meno bene, ma piú brevemente, $u = B - A$. Il *modulo di* u, indicato $\|u\|$[3], è il modulo di un rappresentante qualsiasi di u.
(3) Il vettore libero individuato da un v.a. con punto iniziale e secondo estremo coincidenti[4] è detto *vettore nullo* e denotato 0[5].

PROPOSIZIONE 1.6. *Dati un v.a.* $B - A$ *e un punto* $O \in \Sigma \Longrightarrow \exists!$ *v.a.* $P - O \equiv B - A$.

Dim. Possiamo supporre $A \neq B$ e O non appartenente alla retta AB, conduciamo da B la retta $\parallel$ ad AO e da O la retta $\parallel$ ad AB. Detto P il punto comune a queste due rette, $P - O \equiv B - A$.

COROLLARIO 1.7. *Fissato* $O \in \Sigma$, *la corrispondenza che associa a ogni vettore (libero)* u *l'unico vettore, della classe di equipollenza* u, *applicato in* O *è biunivoca.*

[1] O, equivalentemente, il quadrilatero di vertici A, B, C, D è un parallelogramma (inclusi i casi degeneri).

[2] Ossia è una relazione *riflessiva, simmetrica* e *transitiva.*

[3] Indicato anche $|u|$, la scittura $\|u\|$ è preferibile quando si voglia distinguere il modulo di un vettore dal valore assoluto di un numero.

[4] E quindi da tutti i v.a. con estremi coincidenti, che sono chiaramente equipollenti tra loro!

[5] n.b. 0 ha nullo il modulo, indeterminati la direzione e il verso.

2. La struttura di spazio vettoriale

Sull'insieme V dei vettori (liberi) di Σ sono definite 'in modo geometrico' le seguenti operazioni:

- *addizione:* siano $u, v \in V$ con $u = B - A$ e $v = D - A$ e $C \in \Sigma$ il punto del piano individuato da A, B, D tale che $ABCD$ sia un parallelogramma, si pone
$$u + v := C - A, \text{ tale } u + v \in V \text{ è detto } \textit{somma} \text{ di } u \text{ e } v,$$
- *moltiplicazione per scalari:* siano $0 \neq u \in V, \lambda \in \mathbb{R}^*$, il *prodotto di u e λ*, denotato λu, è il vettore con la stessa direzione di u, $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$, il verso concorde o discorde con u, a seconda che $\lambda > 0$ o $\lambda < 0$;

– se $\lambda = 0 \in \mathbb{R}$ oppure $u = 0$, si pone $\lambda u := 0$,

V con le operazioni di addizione e moltiplicazione per scalari è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale[6].
n.b. Finora abbiamo usato solo il $\|$ tra rette e il confronto di lunghezze di segmenti su rette $\|$, senza confrontare segmenti qualsiasi né misurare l'angolo di due semirette o usare il concetto di $\perp$.

Notazione 2.1. Fissato un riferimento cartesiano $\sigma(O; x, y, z)$ (vedi Cor. 1.7.):
− a ogni vettore (libero) u si associa l'unico v.a. $P - O \in u$,
− a ogni v.a. $P - O$ si associano le coordinate cartesiane di P in σ,
ciò da una c.b.u. tra V ed $\mathbb{R}^3$, che consente di identificare i due insiemi[7].

Scrivendo $u = (a, b, c)$ si intende che è stato fissato un riferimento cartesiano $\sigma(O; x, y, z)$ e che, posto $P - O = u$, si ha $P(a, b, c)$. Inoltre, via uguaglianza e similitudine di triangoli, si traducono in termini di coordinate le operazioni 'geometriche' di addizione e moltiplicazione per scalari.
Piú precisamente, dati $u = (a, b, c), v = (a', b', c'), a, b, c, a', b', c', \lambda \in \mathbb{R}$, si ha:

i) $u + v = (a + a', b + b', c + c')$,
ii) $\lambda u = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$;
se $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3)$
iii) $B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$;
se $P(x, y, z) \in \Sigma$ con $P - O \equiv B - A$[8], essendo $P - O = (B - O) - (A - O)$,
iv) $(x, y, z) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

Le operazioni geometriche sui vettori dello spazio vettoriale V dei vettori (liberi) di Σ si estendono formalmente alle operazioni sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ (anche per $n > 3$).

---

[6]Considerazioni geometriche assicurano infatti le seguenti proprietà, per ogni $u, v, w \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

SV 1 la somma di vettori (liberi) è associativa, ossia, si ha: $u + (v + w) = (u + v) + w$ e si scrive semplicemente $u + v + w$;
SV 2 il vettore nullo 0 soddisfa $u + 0 = u = 0 + u$;
SV 3 $-u := A - B$ è l'opposto di u infatti si ha $u + (-u) = 0$;
SV 4 la somma di vettori (liberi) è commutativa, ossia, si ha: $u + v = v + u$;
SV 5 la moltiplicazione per scalari è omogenea, ossia si ha: $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$,
SV 6 la moltiplicazione per scalari è unitaria, ossia si ha: $1_{\mathbb{R}} u = u$;
SV 7 l'addizione tra scalari è distributiva rispetto alla moltiplicazione tra scalari e vettori, ossia si ha: $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$,
SV 8 l'addizione tra vettori è distributiva rispetto alla moltiplicazione tra scalari e vettori, ossia si ha: $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$.

[7]Incluse le strutture di spazi vettoriali reali.
[8]Ossia $OABP$ parallelogramma!

DEFINIZIONE 2.2. (1) *Se* $u, v \in V$, $\sigma(O; x, y, z)$ *è un s.d.c.c. su* Σ, $P - O = u, Q - O = v$ *e* O, P, Q *sono allineati, si dice che* u e v sono paralleli[9].

(2) *Se* $u, v, w \in V, \sigma(O; x, y, z)$ *è un sistema di coordinate cartesiane su* $\Sigma, P - O = u, Q - O = v, R - O = w$, *e i punti* O, P, Q, R *sono complanari, si dice che* u, v e w sono complanari.

PROPOSIZIONE 2.3. *Siano* $\sigma(O; x, y)$ *(risp.* $\sigma(O; x, y, z)$*) sistemi di coordinate cartesiane ortogonali del piano (risp. dello spazio).*
Se $u = (a, b), A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$ *(risp.* $v = (a, b, c), A'(a_1, a_2, a_3), B'(b_1, b_2, b_3)$*), si ha:*

$$\|u\| = \sqrt{a^2 + b^2}, \;\; \|B - A\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2},$$

$$\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \;\; \|B' - A'\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

DEFINIZIONE 2.4. (1) *Un* versore *è un vettore di modulo* 1;

(2) *il* versore associato a un vettore v *è il versore con egual verso e direzione di* v[10], *ossia:*
$$\text{vers}(v) := \frac{v}{\|v\|},$$
(3) *se* $u = (a, b) \Longrightarrow \text{vers}(u) = (\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$,

(4) *se* $u = (a, b, c) \Longrightarrow \text{vers}(u) = (\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}), \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}), \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}})$;

(5) *l'*angolo (convesso) di due v.a. *è l'angolo* $0 \leq \theta \leq \pi$ *formato da due semirette uscenti da uno stesso punto,* $\|$ *alle rette di applicazione dei v.a. e aventi lo stesso verso dei medesimi. Essendo l'angolo di due vettori applicati invariante per equipollenza, si può parlare di* angolo di due vettori (liberi) $u, v \in V$, *indicato* $\widehat{uv}$*;*

3. Prodotto scalare

LEMMA 3.1. *Siano* $u = (a_1, a_2), v = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, *si ha:* $u \perp v \iff a_1b_1 + a_2b_2 = 0$.

Dim. Siano $A - O = u, C - A = v, C - O = u + v$, essendo $u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, si ha:

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 = a_1^2 + b_1^2 + 2a_1b_1 + a_2^2 + b_2^2 + 2a_2b_2 = \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2). \end{aligned}$$

Il teorema di L. Carnot(1753-1823) applicato al triangolo OAC dice che il triangolo è retto in A (ossia $u \perp v$), $\iff \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff (a_1b_1 + a_2b_2) = 0$

OSSERVAZIONE 3.2. Si prova in modo simile che se $u = (a_1, a_2, a_3), v = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, si ha: $u \perp v \iff a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

DEFINIZIONE 3.3. Il *prodotto scalare* (standard) *di* $u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$[11], è lo scalare $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$, indicato $u.v$,

PROPOSIZIONE 3.4. *Per ogni* $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *si ha:*

(1) $u.v = v.u$ simmetria,
(2) $(\lambda u + \mu v).w = \lambda(u.w) + \mu(v.w)$ linearità,
(3) $u.u = \|u\|^2 \geq 0$, $u.u = 0 \iff u = 0$ positività.

---

[9]In simboli si scrive $u \parallel v$.

[10]Chiaramente la definizione è fatta su un rappresentante qualsiasi!

[11]Un vettore di $\mathbb{R}^n$ è indifferentemente indicato v o $\underline{x}$, a seconda che si privilegi il suo significato di vettore dello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^n$ o di punto dello spazio affine $\mathbb{R}^n$.

Dim. Tutte le implicazioni seguono facilmente dalla definizione.

Per $n = 2, 3$ il prodotto scalare ha la seguente interpretazione geometrica[12].

TEOREMA 3.5. *Se* $u, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}, \implies u.v = \|u\|\|v\| \cos \widehat{uv}$.

Dim. Siano $\sigma(O; x, y)$ un sistema di riferimento, $u = A - O, v = B - O, \theta = \widehat{uv}$ ed r la $\perp$ a OB passante per O. Tracciamo da A le $\|$ a r e OB, se $B' - O = (\|u\| \cos\theta) vers(v)$ e $w = A' - O, (A'$ proiezione ortogonale di A su $r)$ si ha $u = (A' - O) + (B' - O) = w + (\|u\| \cos\theta) vers(v)$ e

$$\begin{aligned} u.v &= w.v + (\|u\| \cos\theta) vers(v).v = 0 + (\|u\| \cos\theta) vers(v).\|v\| vers(v) = \\ &= \|u\| \cos\theta \|v\| vers(v).vers(v) = \|u\|\|v\| \cos\theta. \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 3.6. (1) *Dati due vettori* $u, v \in V^{13}, v \neq 0$, *il* vettore proiezione ortogonale di u su v *è*

$$\frac{u.v}{\|v\|} vers(v),$$

mentre la componente di u su v *è*

$$\frac{u.v}{\|v\|}.$$

(2) *I* coseni direttori di un vettore u *sono i coseni degli angoli che* u *forma coi versori degli assi coordinati.*
(3) *il* vettore proiezione ortogonale di un v.a. $B - A$ su una retta r *è il v.a.* $B' - A'$ *con* B' *e* A' *rispettivamente proiezioni ortogonali di* B *e* A *su* r.
(4) *Il vettore (libero)* proiezione ortogonale di $u \in V$ lungo una direzione r *è il vettore (libero) rappresentato dalla proiezione ortogonale su* r *di un qualunque rappresentante di* u;
(5) *il* versore di una retta orientata r *è il versore di un suo vettore direzionale;*
(6) *la* componente di un $u \in V$ lungo la direzione e il verso di una retta orientata r di versore ε *è il numero reale* λ *tale che* $\lambda\varepsilon$ *sia il vettore proiezione ortogonale di* u *lungo* r.

OSSERVAZIONE 3.7. Dato $u = (a, b, c)$, *le coordinate di* u sono le componenti di u sui versori degli assi, mentre i *coseni direttori di* u sono le coordinate di vers(u).

PROPOSIZIONE 3.8. *Dati* $0 \neq v, u \in V$, *il vettore proiezione ortogonale di* u *su* v *è*

$$\|u\| \cos \widehat{uv} vers(v).$$

Dim. Segue facilmente dalla definizione.

4. Prodotto vettore

DEFINIZIONE 4.1. Dati $u = (a_1, a_2, a_3), v = (b_1, b_2, b_3) \in V$, il *prodotto vettoriale di* u *e* v (denotato $u \times v$ è il vettore:

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

OSSERVAZIONE 4.2. Dati $u = (a_1, a_2, a_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in V$, le coordinate di $u \times v$ sono i minori, presi a segni alterni, ottenuti cancellando -ordinatamente- le colonne della matrice[14]

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

[12]Noi diamo la dimostrazione solo per $n = 2$.
[13]$V = \mathbb{R}^2 \text{o} V = \mathbb{R}^3$.
[14]Le cui righe sono le componenti di u e v.

LEMMA 4.3. *Il vettore* $u \times v$ *è ortogonale sia a* u *che a* v.

Dim. Avendo entrambe due righe uguali, le matrici

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

hanno determinante nullo. Posto $u \times v = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e sviluppando rispetto alle terze righe si ha

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0 = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3.$$

OSSERVAZIONE 4.4. Il prodotto vettoriale non è associativo, infatti, dati $u, v, w \in V$, si ha in generale $u \times (v \times w) \neq (u \times v) \times w$, come dimostra il seguente esempio.

ESEMPIO 4.5. Se $u = (1, 0, 0), v = (1, 0, 0), w = (0, 1, 0)$, si ha: $u \times v = 0_{\mathbb{R}^3},\ v \times w = (0, 0, 1)$ e $u \times (v \times w) = (0, -1, 0),\ (u \times v) \times w = 0_{\mathbb{R}^3}$.

PROPOSIZIONE 4.6. *Dati* $u, v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$, *si ha:*

(1) $u \times v = -v \times u$ (anticommutatività),
(2) $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$ (distributività),
(3) $(\lambda u) \times v = \lambda(u \times v)$ (omogeneità)[15].

PROPOSIZIONE 4.7. *Dati* $u = (a_1, a_2, a_3), v = (b_1, b_2, b_3) \in V$, *si ha:*

(1) $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - (u.v)^2$ (identità di Lagrange (1736-1813)),
(2) $\|u \times v\| = \|u\|\|v\| \sin \widehat{uv}$[16],
(3) $u \times v = 0_{\mathbb{R}^3} \iff u \parallel v$[17].

Dim. (1): si ha $\|u \times v\|^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$, e $\|u\|^2\|v\|^2 - (u.v)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$. (2) : per il Teor. 3.5 si ha $(u.v)^2 = \|u\|^2\|v\|^2 \cos^2 \widehat{uv}$, da 1. si ha quindi $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2(1 - \cos^2 \widehat{uv}) = \|u\|^2\|v\|^2 \sin^2 \widehat{uv}$, poiché $\sin \widehat{uv} \geq 0$, essendo $0 \leq \widehat{uv} \leq \pi, \Longrightarrow \sqrt{\sin^2 \widehat{uv}} = \sin \widehat{uv}$. (3) : si applica la Def. 2.2.1. a (2).

5. Prodotto misto

DEFINIZIONE 5.1. Dati $u, v, w \in V$, il prodotto scalare di u col prodotto vettore $v \times w$ è detto *prodotto misto di* u, v, w *ed è denotato* $u.v \times w$[18].

OSSERVAZIONE 5.2. Da Def. 3.3 e 4.1, se $u = (a_1, a_2, a_3), v = (b_1, b_2, b_3), w = (c_1, c_2, c_3)$, si ha:

$$u.v \times w = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

ESERCIZIO 5.3. Dati $u, v, w \in V$,
1. Provare che $u.v \times w = w.u \times v = v.w \times u$,
2. Determinare tutti gli altri prodotti misti dei tre vettori e indicarne il valore.
3. Condizione necessaria e sufficiente alla complanarità u, v e w è $u.v \times w = 0_{\mathbb{R}}$[19].

---

[15] Discendono tutte dalle proprietà dei determinanti, in particolare: $(-u) \times v = -u \times v = v \times u$.

[16] $\|u \times v\|$ è l'area del parallelogramma di lati u e v.

[17] Si poteva anche definire geometricamente il prodotto vettoriale deducendone poi le proprietà formali, ma sarebbe stato piú difficile.

[18] La scrittura non è ambigua perché $u.(v \times w)$ ha senso, mentre $(u.v) \times w$ no.

[19] Essendo $v \times w$ ortogonale a entrambi i fattori, se i tre vettosri sono complanari, lo è anche a $u \Longrightarrow u.v \times w = 0_{\mathbb{R}}$, viceversa l'annullarsi del numero reale $u.v \times w$ dice la dipendenza lineare e dunque la complanarità di u, v e w.

6. Ancora sui sistemi di riferimento

NOTAZIONE 6.1. – Dati u_1, u_2 vettori non allineati del piano, $\sigma(u_1, u_2)$ è il s.d.c.c. con vers(u_1), vers(u_2) come versori rispettivamente degli assi x e y.
– Dati u_1, u_2, u_3 vettori non complanari dello spazio, $\sigma(u_1, u_2, u_3)$ è il s.d.c.c. con vers(u_1), vers(u_2), vers(u_3) come versori rispettivamente degli assi x, y e z.

OSSERVAZIONE 6.2. Risulta $\sigma(u_1, u_2) \neq \sigma(u_2, u_1)$; provare per esempio che $\sigma(u_1, u_2, u_3) \neq \sigma(u_2, u_1, u_3)$, ma $\sigma(u_1, u_2, u_3) = \sigma(u_2, u_3, u_1)$.

DEFINIZIONE 6.3. (1) Un riferimento $\sigma(u_1, u_2, u_3)$ è *orientato positivamente* se un osservatore orientato come u_3 vede percorrere l'angolo $\widehat{u_1 u_2}$ da u_1 a u_2 in senso antiorario (altrimenti, $\sigma(u_1, u_2, u_3)$ è *orientato negativamente).*
(2) Un riferimento $\sigma(u_1, u_2)$ è *orientato positivamente rispetto a un vettore w non giacente sul piano di u_1 e u_2*, se il riferimento $\sigma(u_1, u_2, w)$ è orientato positivamente.
(3) Due s.d.c.c. del piano o dello spazio sono *concordi* se hanno lo stesso tipo di orientazione[20].
(4) Se $\sigma(O; x, y)$ (risp. $\sigma(O; x, y, z)$) sono s.d.c.c. ortogonali del piano (risp. spazio) orientati positivamente, i versori degli assi sono indicati[21] $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ (risp $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$).

PROPOSIZIONE 6.4. *Siano $u = (a_1, a_2), v = (b_1, b_2)$ due vettori non allineati di un piano, dotato di un s.d.c.c. orientato positivamente. Posto $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$, il riferimento $\sigma(u_1, u_2)$ è orientato positivamente $\iff d(A) > 0$.*

Dim. Chiaramente $\sigma(u_1, u_2)$ è concorde con $\sigma(vers(u_1), vers(u_2))$.
Ponendo $vers(u_1) = (\cos\theta, \sin\theta)$, $vers(u_2) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} cos\theta & \cos\varphi \\ \sin\theta & \sin\varphi \end{pmatrix}$ si ha

$$d(\tilde{A}) = \cos\theta\sin\varphi - \cos\varphi\sin\theta = \sin(\varphi - \theta),$$

ossia, $d(\tilde{A}) > 0 \iff 0 < \varphi - \theta < \pi$. D'altra parte (per la Def. 2.4 (3)),

$$d(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \|u_1\| \cdot \|u_2\| \cdot d(\tilde{A}).$$

COROLLARIO 6.5. *Con le stesse notazioni, $\sigma(u_1, u_2)$ e $\sigma(u_1', u_2')$ sono concordi $\iff$*

$$d(A) \cdot d(A') > 0.$$

ESERCIZIO 6.6. Provare che per ogni s.d.c.c. $\sigma(u_1, u_2)$:

- $\sigma(u_1, u_2)$ e $\sigma(u_1 + \lambda u_2, u_2)$ sono concordi, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$
- $\sigma(u_1, u_2)$ e $\sigma(-u_1, u_2)$ sono discordi,
- $\sigma(u_1, u_2)$ e $\sigma(u_2, u_1)$ sono discordi.

OSSERVAZIONE 6.7. Valgono gli stessi risultati per $\sigma(u_1, u_2, u_3)$, con u_1, u_2, u_3 vettori non complanari dello spazio dotato di s.d.c.c. orientato positivamente.

[20]L'essere concordi è relazione di equivalenza nell'insieme dei s.d.c.c. del piano (o dello spazio).
[21]Specialmente dai fisici, talvolta omettendo le frecce.

CHAPTER 4

Geometria Analitica

Consideriamo sia il piano che lo spazio dotati di s.d.c.c. ortogonali orientati positivamente[1].

1. Allineamento e complanarità

TEOREMA 1.1. *Dati tre punti A, B, P (*nel piano o nello spazio!*) sono condizioni equivalenti:*
(1) *A, B, P sono allineati,*
(2) $(P - A) \times (B - A) = 0$,
se $A \neq B \Longrightarrow 1.$ e $2.$ sono anche equivalenti a
(3) $(P - A) = t(B - A)$ *per qualche $t \in \mathbb{R}$.*

Dim. (1) $\Longrightarrow$ (3) sia $A \neq B$, assumendo sulla retta AB il punto A come origine delle coordinate e il punto B come punto di ascissa 1, l'ascissa di un punto P[2] è un $t \in \mathbb{R}$, ossia, $(P - A) = t(B - A)$; (1) $\Longrightarrow$ (2) essendo A, B, P allineati, $P - A \parallel B - A$; (2) $\Longrightarrow$ (1) abbiamo già osservato che il prodotto vettore di due vettori è nullo $\iff$ essi sono $\parallel$; (3) $\Longrightarrow$ (2) segue dalla Def. 3.4.1.

COROLLARIO 1.2. *Dati nel piano, un punto P_0 e un vettore (libero) u, la retta r per P_0 e $\perp$ a u è il luogo dei punti P tali che $u.(P - P_0) = 0$.*

Dim. Sia $P_1 \in r$, si ha $P \in r \iff (P - P_0) \times (P_1 - P_0) = 0 \iff (P - P_0) \parallel (P_1 - P_0)$, essendo $P_1 - P_0 \perp u$ si ha $u.(P - P_0) = 0$.

TEOREMA 1.3. *Dati quattro punti A, B, C, P nello spazio, sono condizioni equivalenti:*
(1) *A, B, C, P sono complanari,*
(2) $(P - A).(B - A) \times (C - A) = 0$,
se A, B, C non sono allineati è anche equivalente
(3) $(P - A) = s(B - A) + t(C - A)$ *per qualche $s, t \in \mathbb{R}$.*

Dim. Se A, B, C sono allineati, A, B, C, P sono complanari $\forall P$ e vale $(P-A).(B-A)\times(C-A) = 0$, essendo $(B - A) \times (C - A) = 0$, possiamo quindi supporre che A, B, C non siano allineati. (1) $\Longrightarrow$ (3), dotiamo il piano ABC del s.d.c.c. che ha il punto A come origine delle coordinate, la retta AB come asse delle x e la retta AC come asse delle y, in modo che $B(1, 0)$ e $C(0, 1)$ e $\forall P \in ABC$ ha per coordinate una coppia $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ ossia, $(P - A) = s(B - A) + t(C - A)$; (3) $\Longrightarrow$ (2) perché il determinante di una matrice con una riga combinazione lineare delle altre è nullo; (2) $\Longrightarrow$ (1) perché tre vettori con prodotto misto nullo sono complanari.

COROLLARIO 1.4. *Dati nello spazio un punto P_0 e un vettore (libero) u, il piano π per P_0 e $\perp$ a u è il luogo dei punti P tali che $u.(P - P_0) = 0$.*

[1] Per prodotto vettoriale di vettori del piano, si intende di vettori $(a, b, 0)$) del piano xy in Σ.
[2] Appartenente alla retta AB!

Dim. Dati P_0, P_1, P_2 punti non allineati del piano $\pi, P \in \pi \iff (P-P_0).(P_1-P_0)\times(P_2-P_0) = 0 \therefore (P-P_0) \perp (P_1-P_0)\times(P_2-P_0)$, ma $(P_1-P_0)\times(P_2-P_0) \perp \pi \Longrightarrow (P_1-P_0)\times(P_2-P_0) \parallel u$, ossia $(P-P_0) \perp u \Longrightarrow u.(P-P_0) = 0$.

2. La retta nel piano

Il Teor. 1.1 dà le equazioni della r congiungente due punti $A \neq B$ del piano: $P \in r \iff$:

$$P - A = t(B - A) \text{ per qualche } t \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

$$(P - A) \times (B - A) = 0, \tag{8}$$

2.1. Equazioni. Posto $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), P(x, y), (l_1, l_2) := (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$. L'eguaglianza vettoriale (7) si traduce in eguaglianza delle componenti dei vettori (liberi) corrispondenti:

$$\begin{cases} x = a_1 + l_1 t \\ y = a_2 + l_2 t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}, (l_1, l_2) \neq (0, 0). \tag{9}$$

(7) è detta *rappresentazione parametrica vettoriale della retta* r,
(9) è detta *rappresentazione parametrica scalare di* r,
evidenziando le coordinate del punto generico di r, (9) può essere riscritta:

$$r: \ (a_1 + l_1 t, a_2 + l_2 t), \ t \in \mathbb{R}.$$

L'eguaglianza vettoriale (8) può essere tradotta in

$$\rho\left(\begin{pmatrix} X - a_1 & Y - a_1 & 0 \\ l_1 & l_2 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 \quad \text{ossia} \quad \begin{vmatrix} X - a_1 & Y - a_1 \\ l_1 & l_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

notiamo che (10) è un'equazione lineare nelle incognite X e Y, cioè del tipo:

$$aX + bY + c = 0 \quad (a, b) \neq (0, 0) \tag{11}$$

(8) è detta *rappresentazione cartesiana vettoriale di* r,
(11) è detta *rappresentazione cartesiana scalare di* r, o anche, *equazione di* r.

Teorema 2.1. *Nel piano ogni retta r ha rappresentazioni parametrica scalare (9) e cartesiana scalare (11). Viceversa, ogni scrittura (9) e ogni equazione (11) rappresentano una retta.*

Dim. La (9) rappresenta la retta passante per $A(a_1, a_2), B(a_1 + l_1, a_2 + l_2)$[3]; sia (x_0, y_0) una soluzione di (11), ossia:

$$(\bullet) \qquad a(X - x_0) + b(Y - y_0) = 0,$$

posto $u = (a, b), P_0(x_0, y_0), P(x, y), (\bullet)$ può riscriversi nella forma: $u.(P - P_0) = 0$[4].

Definizione 2.2. *Dati una retta r e $A \neq B \in r$, il vettore (libero) associato a $B - A$ è detto* vettore direzionale di r *(per brevità v.d.), mentre il suo versore è detto* versore direzionale di r.

Osservazione 2.3. (1) Se r è data da (9), un suo v.d. è (l_1, l_2); se è data da (11), un suo v.d. è $(-b, a)$.

[3] Rispettivamente corrispondenti ai valori 0 e 1 del parametro t in (9).
[4] Che sappiamo essere la retta per $P_0 \perp$ a u, vedi Cor. 1.2.

(2) Una retta r è determinata univocamente da un suo punto $A(a_1, a_2)$ e da un suo v.d. (l_1, l_2), se $l_1 l_2 \neq 0$, un'equazione di r è:

$$\frac{X - a_1}{l_1} = \frac{Y - a_2}{l_2}\text{[5]}. \tag{12}$$

(3) Ogni retta r individua due versori direzionali tra loro opposti, fissarne uno equivale a fissare un verso su r.

2.2. Coseni direttori e coefficiente angolare.

Definizione 2.4. (1) *I* coseni direttori *di una retta r sono quelli di un suo v.d.*[6]*.*

(2) *Dati una retta r, i suoi due versori u_r e $-u_r$, e un vettore v,* l'angolo $\widehat{vr}$ *è il piú piccolo dei due angoli $\widehat{u_r v}$, $\widehat{-u_r v}$ (n.b. risulta $0 \leq \widehat{vr} \leq \frac{\pi}{2}$).*

(3) *Dati $u, v \in V$, con versori u', v' e $A - O, B - O$ rappresentanti di u', v' applicati in O,* l'angolo orientato *di u e v, o semplicemenete* angolo che u forma con v, *denotato $\widehat{\overrightarrow{uv}}$, è l'insieme degli angoli θ tali che una rotazione di ampiezza θ porta A a sovrapporsi con B.*

(4) *Dati un vettore u e una retta r, l'*angolo orientato di u e r *o l'*angolo orientato che r forma con u*, indicato $\widehat{\overrightarrow{ur}}$, è l'unione degli angoli orientati che i due versori di r formano con u.*

(5) *Date due rette r, s, l'*angolo orientato di r *ed s o l'*angolo orientato che r forma con s*, indicato $\widehat{\overrightarrow{rs}}$, è l' angolo orientato che r forma con uno dei versori di s.*

Osservazione 2.5. (1) Se $\theta \in \widehat{\overrightarrow{vr}}$ si ha: $\widehat{\overrightarrow{vr}} = \{\theta + 2h\pi : h \in \mathbb{Z}\}$;

(2) Un angolo orientato è una classe di equivalenza della relazione definita, sull'insieme degli angoli, da $\theta \sim \varphi$, se $\theta - \varphi$ è un multiplo di 2π.

Esempio 2.6. Dati $u = (1, 2), v = (3, 1)$, si ha $\cos \widehat{uv} = \frac{u.v}{|u||v|} = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \widehat{uv} = \frac{\pi}{4}$; poiché $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5 < 0$, la rotazione che fa sovrapporre u a v è in senso orario, ossia:

$$\widehat{\overrightarrow{uv}} \ni -\frac{\pi}{4} \quad \text{o} \quad \widehat{\overrightarrow{uv}} \ni \frac{3}{4}\pi \quad \text{o} \quad \widehat{\overrightarrow{uv}} = \{\frac{3}{4}\pi + 2h\pi, h \in \mathbb{Z}\}.$$

Proposizione 2.7. *Dati un vettore v, due rette r e s, $\theta \in \widehat{\overrightarrow{ur}}$ e $\varphi \in \widehat{\overrightarrow{us}}$:*

(1) $\widehat{\overrightarrow{ur}} = \{\theta + h\pi : h \in \mathbb{Z}\}$;

(2) $\widehat{\overrightarrow{ur}} = \widehat{\overrightarrow{(-u)r}}$;

(3) $\widehat{\overrightarrow{rs}} = \{\theta - \varphi + h\pi : h \in \mathbb{Z}\}$.

Dim. Se $r \nparallel$ all'asse y, tutti gli angoli di $\widehat{\overrightarrow{ir}}$ hanno la stessa tangente trigonometrica $\tau \in \mathbb{R}$ e viceversa, $\forall t \in \mathbb{R}$ determina un insieme di angoli $\{\theta + h\pi : h \in \mathbb{Z}\}$ aventi t come tangente trigonometrica, ossia $\tan \widehat{\overrightarrow{ir}} \in \mathbb{R}$ è univocamente determinata da r e cosí pure $\tan \widehat{\overrightarrow{rs}} \in \mathbb{R}$.

Definizione 2.8. Se $r \nparallel$ all'asse y, il *coefficiente angolare di r* è il numero reale

$$m = \tan \widehat{\overrightarrow{ir}}.$$

[5]n.b. (12) può essere considerata anche se $l_1 l_2 = 0$, convenendo che se un denominatore è nullo sia nullo il corrispondente numeratore. In particolare, se $l_1 = 0$ (risp. $l_2 = 0$) un'equazione di r è $X - a_1 = 0$ (risp. $Y - a_2 = 0$.)

[6]n.b. i coseni direttori di r sono individuati a meno del segno!

PROPOSIZIONE 2.9. *Se $r \nparallel$ all'asse y, r ha vettore direzionale $u = (l_1, l_2)$, $l_1 \neq 0$ e $m = \frac{l_2}{l_1}$.*

Dim. Se $u' = \mathrm{vers}(u) = (l'_1, l'_2)$ si ha $\frac{l_2}{l_1} = \frac{l'_2}{l'_1}, l_1 \neq 0$ dove, posto $\theta = \widehat{\overrightarrow{iu'}}$, vale $l'_1 = \cos\theta, l'_2 = \sin\theta$.

COROLLARIO 2.10. *Se $r \nparallel$ all'asse y, ha equazione $aX + bY + c = 0$ si ha*

$$m = -\frac{a}{b}.$$

Dim. Sappiamo che un v.d. di r è $(-b, a), b \neq 0$.

OSSERVAZIONE 2.11. Ossia, una retta $r \nparallel$ all'asse y è rappresentabile mediante un'equazione della forma $Y = mX + q$. Infatti, da $aX + bY + c = 0, b \neq 0$ si ricava

$$\frac{a}{b}X + Y + \frac{c}{b} = 0 \implies Y = -\frac{a}{b}X - \frac{c}{b} \ \therefore\ m = -\frac{a}{b},\ q = \frac{c}{b}.$$

2.3. Mutue posizioni di rette.

PROPOSIZIONE 2.12. *Date $r \nparallel$ all'asse y, $s \nparallel$ all'asse y, con rispettivi coefficienti angolari m, m':*

(1) $r \perp s \iff 1 + mm' = 0$,
(2) *se r non è perpendicolare a s si ha:* $\tan\widehat{\overrightarrow{rs}} = \frac{m'-m}{1+mm'}$,
(3) $r \parallel s \iff m = m'$.

Dim. (1): se $r : y = mX + q$, $s : y = m'X + q'$, $1 + mm'$ è il prodotto scalare dei rispettivi v.d.$(1, m)$ e $(1, m')$; (2): se $\theta \in \widehat{\overrightarrow{ir}}, \theta' \in \widehat{\overrightarrow{is}}$ si ha $\theta - \theta' \in \widehat{\overrightarrow{rs}}$ e $\tan(\theta - \theta') = \frac{\tan\theta' - \tan\theta}{1+\tan\theta\tan\theta'}$; (3): si ha $r \parallel s \iff 0 \in \widehat{\overrightarrow{rs}}$.

TEOREMA 2.13. *Date $r : aX + bY + c = 0, r' : a'X + b'Y + c' = 0$, siano $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \implies \rho(A) \geq 1$ e:*

(1) $\rho(A) = \rho(B) = 2 \iff r$ *e* r' *sono incidenti e distinte,*
(2) $\rho(A) = 1, \rho(B) = 2 \iff r$ *e* r' *sono* $\parallel$ *e distinte,*
(3) $\rho(A) = \rho(B) = 1$[7] $\iff r$ *e* r' *sono* $\parallel$ *e* $=$.

Dim. Basta applicare il teorema di Rouché-Capelli al sistema dato dalle equazioni delle rette.

OSSERVAZIONE 2.14. Dal Teor. 2.13. ricaviamo che una retta individua i suoi coefficienti a meno di un fattore di proporzionalità.

2.4. Fasci di rette.

DEFINIZIONE 2.15. *Il* fascio di rette di centro un punto P_0, *denotato* Φ_{P_0}, *è l'insieme delle rette passanti per* P_0.

PROPOSIZIONE 2.16. *Dati $P_0(x_0, y_0)$ e $r, r' \in \Phi_{P_0}$, $r : aX + bY + c = 0$, $r' : a'X + b'Y + c' = 0$, $\forall\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\lambda(aX + bY + c) + \mu(a'X + b'Y + c') = 0$ definisce una retta di Φ_{P_0}.*

Dim. Si ha $(\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b') \neq (0,0)$[8] e $\lambda(ax_0 + by_0 + c) + \mu(a'x_0 + b'y_0 + c') = 0$.

[7] Notiamo che $\rho(A) = \rho(B) = 1 \iff (a', b', c') \propto (a, b, c) \iff a' = \lambda a, b' = \lambda b, c' = \lambda c,$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

[8] Infatti $\rho\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 2$.

Proposizione 2.17. *Nelle stesse ipotesi di Prop. 2.16, è surgettiva l'applicazione*

$$\psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \Phi_{P_0},\ \textit{con}\ \psi(\lambda,\mu) = r:\ \lambda(aX+bY+c)+\mu(a'X+b'Y+c')=0).$$

Dim. Siano $s \in \Phi_{P_0}$ e $A(\bar{x},\bar{y}) \in s, A \neq P_0$, poiché $\lambda(a\bar{x}+b\bar{y}+c)+\mu(a'\bar{x}+b'\bar{y}+c')=0$ è un'equazione lineare omogenea in (λ,μ) essa ha una soluzione non banale $(\bar{\lambda},\bar{\mu})$ e $\bar{\lambda}(aX+bY+c)+\bar{\mu}(a'X+b'Y+c')=0$ rappresenta una retta, passante per A e P_0, ossia proprio s.

Osservazione 2.18. (1) Se $(\lambda,\mu),(\lambda',\mu') \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ soddisfano $\psi(\lambda,\mu)=\psi(\lambda',\mu')=s \in \Phi_{P_0}$ e $A(\bar{x},\bar{y}) \in s, A \neq P$ il sistema

$$\begin{cases}\lambda(a\bar{x}+b\bar{y}+c)+\mu(a'\bar{x}+b'\bar{y}+c')=0\\ \lambda'(a\bar{x}+b\bar{y}+c)+\mu'(a'\bar{x}+b'\bar{y}+c')=0\end{cases} \tag{13}$$

dà $(\lambda,\mu) \propto (\lambda',\mu')$[9] (soluzioni di una stessa equazione lineare omogenea in 2 variabili).

(2) Φ_{P_0} è generabile come sopra a partire da 2 sue rette distinte qualsiasi.

Definizione 2.19. *L'insieme di tutte le rette $\parallel$ a una retta data è detto* fascio improprio di rette *o* fascio di rette $\parallel$.

Proposizione 2.20. *Data una retta $r:\ aX+bY+c=0$, il fascio improprio da essa individuato può essere rappresentato da:*

$$aX+bY+t=0,\ t\in\mathbb{R}.$$

Esempio 2.21. (1) La retta passante per $A(1,1)$ e per $P \in r\cap r'$ con $r:\ X+Y-1=0$ e $r':\ X-3Y=0$ è la retta $s \in \Phi_P$ con $A \in s$, ossia, $s:\ (\lambda+\mu)X+(\lambda-3\mu)Y-\lambda=0$ tale che $\lambda+\mu+\lambda-3\mu-\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=2\mu$ e quindi $s:\ 3X-Y-2=0$[10].

(2) La retta passante per $O(0,0)$ e $\parallel$ a $r:\ 2X-Y+1=0$ è la retta $s:\ 2X-Y=0$.

(3) Provare che $\begin{cases}x=1+t\\ y=2+t\end{cases}$, $\begin{cases}x=t-1\\ y=t\end{cases}$, $\begin{cases}x=2t+1\\ y=2t+2\end{cases}$ sono rappresentazioni parametriche della retta di equazione cartesiana $X-Y+1=0$.

(4) - Determinare $P\in r\cap r'$ con $r:\begin{cases}x=1-t\\ y=2t\end{cases}$ e $r':\begin{cases}x=2+2t\\ y=1-4t\end{cases}$.

- Determinare $P\in r\cap r'$ con $r:\begin{cases}x=1+t\\ y=2-2t\end{cases}$ e $r':\begin{cases}x=3-s\\ y=-2+6s\end{cases}$.

Per trovare gli eventuali punti comuni a due rette date via rappresentazioni parametriche si scrive l'equazione cartesiana di una e si cercano valori del parametro dell'altra che la verifichino o si cercano gli eventuali valori dei due parametri che forniscano gli stessi punti. Nel primo caso $r:\ 2x+y-2=0$ e $4+4t+1-4t=0$ dànno $r\cap r'=\emptyset$.

Nel secondo caso $\begin{cases}1+t=3-s\\ 2-2t=6s-2\end{cases}$, dà $\begin{cases}t=2-s\\ t=2-3s\end{cases}$ ossia $2-s=2-3s$, da cui $s=0, t=2$, quindi $r\cap r'=\{P(3,-2)\}$.

[9] Ossia, fissate le equazioni di due rette $r,r'\in\Phi_{P_0}$, un'altra retta di Φ_{P_0} individua i suoi coefficienti (λ,μ) a meno di un fattore diproporzionalità.

[10] Notare che non occorre determinare P!

3. Il piano nello spazio

Se A, B, C sono punti non allineati dello spazio e π è il piano che individuano, dal Teor. 1.3:

$$P \in \pi \iff P - A = s(B - A) + t(C - A) \text{ per qualche } (s,t) \in \mathbb{R}^2. \tag{14}$$

Dati $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3), C(c_1, c_2, c_3), P(x, y, z)$, ponendo $\beta := (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$, $\gamma := (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3)$, l'eguaglianza vettoriale (14) può essere tradotta in eguaglianza delle componenti dei vettori (liberi) corrispondenti:

$$\begin{cases} x = a_1 + s\beta_1 + t\gamma_1 \\ y = a_2 + s\beta_2 + t\gamma_2 \\ z = a_3 + s\beta_3 + t\gamma_3 \end{cases}, \ \rho\left(\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}\right) = 2, \ (s,t) \in \mathbb{R}^2 \tag{15}$$

(14) è detta *rappresentazione parametrica vettoriale del piano* π,
(15) è detta *rappresentazione parametrica scalare del piano* π,
evidenziando le coordinate del punto generico di π, (15) può essere compattata:

$$\pi: \ (a_1 + s\beta_1 + t\gamma_1, a_2 + s\beta_2 + t\gamma_2, a_3 + s\beta_3 + t\gamma_3), \ (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Dal Teor. 1.3, abbiamo anche

$$P \in \pi \iff (P - A).(B - A) \times (C - A) = 0, \tag{16}$$ che, passando alle coordinate, diventa:

$$\begin{vmatrix} X - a_1 & Y - a_2 & Z - a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{17}$$

(17) è un'equazione lineare nelle incognite X, Y e Z, cioè del tipo:

$$aX + bY + cZ + d = 0 \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0) \tag{18}$$

(16) è detta *rappresentazione cartesiana vettoriale del piano* π,
(18) è detta *rappresentazione cartesiana scalare del piano* π, o *equazione di* π.

TEOREMA 3.1. *Nello spazio ogni piano π ha rappresentazioni parametrica scalare (15) e cartesiana scalare (18). Viceversa, ogni scrittura (15) e ogni equazione (18) rappresentano un piano.*

DEFINIZIONE 3.2. *Diconsi rispettivamente* vettore *e* versore direzionale *di un piano π un vettore a esso $\perp$ e il suo versore.*

OSSERVAZIONE 3.3. Se π è dato in forma parametrica (risp. cartesiana), un v.d. è $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \times (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ (risp. (a, b, c)[11]).

DEFINIZIONE 3.4. *I concetti di* angolo fra due piani, $\parallel$ *e* $\perp$, *si riconducono ai corrispondenti fra v.d..*

ESEMPIO 3.5. Determinare una rappresentazione parametrica del piano passante per $A(1, 1, 1), B(1, 2, 1), C(2, 1, 0)$, un suo v.d. e un'equazione cartesiana.

Si ha $(B - A) = (0, 1, 0)$, $(C - A) = (1, 0, -1)$ e, da $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + s \\ z = 1 - t \end{cases}$, si ricava $X + Z - 2 = 0$.

[11] A ogni piano sono associati due versori direzionali, uno opposto dell'altro.

4. La retta nello spazio

Se $A \neq B$ sono punti distinti dello spazio ed r è la retta che li congiunge, il Teor. 1.1 dà le 'equazioni vettoriali' di r[12] e precisamente un punto P dello spazio soddisfa $P \in r \iff$:

$$P - A = t(B - A) \text{ per qualche } t \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

$$(P - A) \times (B - A) = 0, \tag{20}$$

4.1. Equazioni. Dati $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3), P(x, y, z), (l_1, l_2, l_3) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$. L'eguaglianza vettoriale (19) può essere tradotta in eguaglianza delle componenti dei vettori (liberi):

$$\begin{cases} x = a_1 + l_1 t \\ y = a_2 + l_2 t \\ z = a_3 + l_3 t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}, (l_1, l_2, l_3) \neq (0, 0, 0); \tag{21}$$

evidenziando le coordinate del punto generico di r, (21) può essere compattata:

$$r : \ (a_1 + l_1 t, a_2 + l_2 t, a_3 + l_3 t), \ t \in \mathbb{R}.$$

L'eguaglianza vettoriale (20) può essere tradotta in

$$\rho\left(\begin{pmatrix} X - a_1 & Y - a_2 & Z - a_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix}\right) = 1, \text{ cioè } \frac{X - a_1}{l_1} = \frac{Y - a_2}{l_2} = \frac{Z - a_3}{l_3} \tag{22}$$

convenendo che se in (22) c'è un denominatore 0, va inteso 0 il corrispondente numeratore; notiamo che (22) è un sistema di 3 equazioni lineari (non indipendenti!) nelle incognite X, Y, Z cioè del tipo:

$$\begin{cases} aX + bY + cZ + d = 0 \\ a'X + b'Y + c'Z + d' = 0 \end{cases} \quad , \quad \rho\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}\right) = 2 \tag{23}$$

(19) è detta *rappresentazione parametrica vettoriale della retta* r,
(21) è detta *rappresentazione parametrica scalare di* r,
(20) è detta *rappresentazione cartesiana vettoriale di* r,
(23) è detta *rappresentazione cartesiana scalare di* r, o *equazioni cartesiane di* r.

TEOREMA 4.1. *Nello spazio ogni retta r ha rappresentazioni parametrica scalare (21) e una cartesiana scalare (23). Viceversa, ogni scrittura del tipo (21) e (23) rappresenta una retta.*

DEFINIZIONE 4.2. *Per ogni retta dello spazio si definiscono*[13] *i concetti di* vettore *e* versore direzionale, coseni direttori.

OSSERVAZIONE 4.3. (1) Una retta r rappresentata da

$$\begin{cases} aX + bY + cZ + d = 0 \\ a'X + b'Y + c'Z + d' = 0 \end{cases}$$

è $\perp$ sia ad (a, b, c)[14] che ad (a', b', c')[15]. Pertanto, $(a, b, c) \times (a', b', c')$ è un suo v.d..

---

[12] Formalmente le stesse del piano!
[13] Analogamente a quanto fatto nel piano.
[14] v.d. del piano $\pi : aX + bY + cZ + d = 0$ che contiene r.
[15] v.d. del piano $\pi' : a'X + b'Y + c'Z + d' = 0$ che contiene r.

(2) I concetti di angolo fra due rette, $\|, \perp$ si riconducono agli analoghi concetti relativi ai vettori direzionali.

Esempio 4.4. (1) Le rette $r : \begin{cases} X - 2Y + Z = 0 \\ X + Y - Z + 1 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4t - 1 \\ z = 6t \end{cases}$ sono $\|$, infatti $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (1, 2, 3)$.

(2) Una rappresentazione della retta congiungente $A(1, 1, 1)$ e $B(1, 2, 0)$ come intersezione di piani è $\begin{cases} X = 1 \\ Y + Z - 2 = 0 \end{cases}$, si ha infatti $\frac{X-1}{0} = \frac{Y-1}{1} = \frac{Z-1}{-1}$.

4.2. Passaggio da una rappresentazione all'altra. Geometricamente, per passare da una rappresentazione parametrica, di una retta r o di un piano π, a una cartesiana basta determinarne un punto e un v.d., lo stesso per passare da una rappresentazione cartesiana a una parametrica. Algebricamente, per passare da una rappresentazione parametrica a una cartesiana, di una retta r (risp. piano π), bisogna trovare due (risp. una sola) equazioni lineari, attraverso l'operazione di *eliminazione del* o *dei parametri.* Viceversa, si passa da una rappresentazione cartesiana a una parametrica assumendo come parametri il massimo numero possibile di variabili.

Esempio 4.5. (1) Data la rappresentazione parametrica $r : (1 + t, t, 1 - 2t)\, t \in \mathbb{R}$, posto $t = y$ si ricava la rappresentazione cartesiana $r : \begin{cases} X = 1 + Y \\ Z = 1 - 2Y \end{cases}$;

(2) Data la rappresentazione parametrica $\pi : (1 - s - t, 1 + s - t, s + t)$, $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, posto $s = \frac{Y-X}{2}, t = 1 + s - Y$ si ricava la rappresentazione cartesiana $Z = \frac{Y-X}{2} + 1 + \frac{Y-X}{2} - Y$, i.e $Z = 1 - X$;

(3) Data $\pi : X - 2Y + Z - 1 = 0$, posto $X = 2Y - Z + 1, Y = s, Z = t$ si ottiene $\pi : \begin{cases} x = 1 + 2s - t \\ y = s \\ z = t. \end{cases}$

(4) Data $r : \begin{cases} X + 2Y + Z = 0 \\ 2X - 3Y - Z + 1 = 0 \end{cases}$ da $3X - Y + 1 = 0$ posto $y = t$ si ottiene $x = \frac{t-1}{3}$, e, sostituendo in $2X - 3Y - Z + 1 = 0, z = \frac{1-7t}{3}$, da cui $r : \begin{cases} x = \frac{t-1}{3} \\ y = t \\ z = \frac{1-7t}{3}. \end{cases}$

5. Mutue posizioni di piani

Teorema 5.1. *Dati* $\pi : aX + bY + cZ + d = 0, \pi' : a'X + b'Y + c'Z + d' = 0$, *siano* $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$, *si ha* $\rho(A) \geq 1$ *e:*

(1) $\rho(A) = \rho(B) = 2 \iff \pi$ *e* π' *sono incidenti (in una retta) e distinti,*
(2) $\rho(A) = 1, \rho(B) = 2 \iff \pi$ *e* π' *sono* $\|$ *e distinti,*
(3) $\rho(A) = \rho(B) = 1 \iff \pi$ *e* π' *sono* $=$ [16].

[16] In particolare $\|$.

Dim. Basta applicare il teorema di Rouché-Capelli al sistema formato dalle equazioni dei piani.

OSSERVAZIONE 5.2. Per il Teor. 5.1, un piano individua i suoi coefficienti a meno di un fattore di proporzionalità.

5.1. Fasci di piani.

DEFINIZIONE 5.3. *Data una retta r, il* fascio di piani di centro r, *denotato Φ_r, è l'insieme dei piani passanti per r.*

PROPOSIZIONE 5.4. *Se $\pi : aX + bY + cZ + d = 0$, $\pi' : a'X + b'Y + c'Z + d' = 0$, sono piani distinti e incidenti in r, $\forall\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$*

$$\lambda(aX + bY + cZ + d) + \mu(a'X + b'Y + c'Z + d') = 0$$

definisce un piano di Φ_r.

Dim. Si ha $(\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b', \lambda c + \mu c') \neq (0,0,0)$ e, $\forall P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in r$, $\lambda(a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z} + d) + \mu(a'\bar{x} + b'\bar{y} + c'\bar{z} + d') = 0$.

PROPOSIZIONE 5.5. *Nelle stesse ipotesi di Prop. 5.4, è surgettiva l'applicazione*

$$\psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \Phi_r, (\lambda, \mu) \mapsto \pi : (\lambda a + \mu a')X + (\lambda b + \mu b')Y + (\lambda c + \mu c')Z + \lambda d + \mu d' = 0.$$

DEFINIZIONE 5.6. *L'insieme di tutti i piani $\parallel$ a un piano dato è detto* fascio improprio di piani *o* fascio di piani $\parallel$.

PROPOSIZIONE 5.7. *Il fascio improprio individuato da $\pi : aX + bY + cZ + d = 0$, è:*

$$aX + bY + cZ + t = 0,\ t \in \mathbb{R}.$$

6. Mutue posizioni di rette e piani

PROPOSIZIONE 6.1. *Dati una retta r, con v.d. u, e un piano π, con v.d. v, si ha:*

(1) $r \parallel \pi \iff u \perp v$,
(2) $r \perp \pi \iff u \parallel v$,
(3) $\widehat{r\pi} = |\frac{\pi}{2} - \widehat{uv}|$ *e quindi* $\sin\widehat{r\pi} = |\cos\widehat{uv}|$,
(4) *se* $r \parallel \pi \Longrightarrow r \subset \pi$ *o* $r \cap \pi = \emptyset$,
(5) *se* $r \nparallel \pi \Longrightarrow \exists!$ *punto* $A \in r \cap \pi$.

Dim. (1) e (2) sono ovvie; (3) è conseguenza della definizione e di proprietà trigonometriche elementari; (4 e (5) discendono facilmente dallo studio del sistema formato dalle equazioni di r e π.

DEFINIZIONE 6.2. *Due rette non complanari*[17] *dello spazio sono dette* sghembe.

PROPOSIZIONE 6.3. *Date due rette r, s dello spazio e quattro punti $A \neq B \in r, C \neq D \in s, r$ e s sono complanari $\iff$ A, B, C, D sono tali.*

Dim. Un piano contiene una retta se e solo se contiene due suoi punti distinti.

[17] Siccome tre punti non allineati dello spazio individuano un unico piano, due rette dello spazio sono complanari se sono $\parallel$, incidenti o coincidenti.

7. Punti e luoghi notevoli

7.1. Punto medio di un segnemto.

DEFINIZIONE 7.1. *Il* punto medio del segmento di estremi *A e B è il punto* M[18] *tale che*

$$B - M = M - A. \tag{24}$$

Se $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), M(x_M, y_M)$[19] (risp. $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3), M(x_M, y_M, z_M)$[20]), per (24)

$$\begin{cases} b_1 - x_M = x_M - a_1 \\ b_2 - y_M = y_M - a_2 \end{cases} \quad \text{ossia } (x_M, y_M) = (\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}) \left(\text{risp.} (x_M, y_M, z_M) = (\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2})\right).$$

7.2. Proiezioni ortogonali.

DEFINIZIONE 7.2. (1) *Nel piano, la* proiezione ortogonale *(per brevità p.o.)* di un punto A su una retta r *è* $P_A \in r \cap s_A$ *con* s_A *retta* $\perp$ *a* r *passante per* A;
(2) *nello spazio, la* p.o. di un punto A su una retta r *è* $P_A \in r \cap \pi_A$ *con* π_A *piano* $\perp$ *a* r *passante per* A;
(3) *la* p.o. di un punto A su un piano π *è* $P_A \in \pi \cap r_A$ *con* r_A *retta* $\perp$ *a* π *passante per* A;
(4) *se una retta* r *non è* $\perp$ *a un piano* π, *la* p.o. di r su π *è la retta* $s = \pi \cap \pi_r$ *con* π_r *piano per* $r, \pi_r \perp \pi$;
(5) *il* simmetrico di un punto A rispetto a un punto Q *è* $A' \in r_{A,Q}$, *tale che* Q *sia il punto medio del segmento di estremi* A *e* A'.
(6) *il* simmetrico di un punto A rispetto a una retta r *è l'*A' *per cui il punto medio del segmento di estremi* A *e* A' *sia la p.o.* $P_A \in r$.
(7) *il* simmetrico di un punto A rispetto a un piano π *è l'*A' *per cui il punto medio del segmento di estremi* A *e* A' *sia la p.o.* $P_A \in \pi$.

ESEMPIO 7.3. *a*) Si trova la p.o. di $r : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ su $\alpha : z = 0$ scegliendo il $\pi \in \Phi_r$ con v.d. ortogonale a $(0, 0, 1)$; Φ_r è il luogo dei piani $\pi_{\lambda,\mu} : \lambda Y + \mu(Z - 1) = 0$ i.e. di v.d. $(0, \lambda, \mu)$, per cui la condizione è $(0, \lambda, \mu).(0, 0, 1) = \mu = 0$, ossia $\pi : Y = 0$, pertanto la p.o. di r su α è $s : \begin{cases} Y = 0 \\ Z = 0. \end{cases}$
b) Si trova il simmetrico di $\pi : X - 2Y + 1 = 0$ rispetto a $\pi' : 2X - Z = 0$, scrivendo la retta $\perp$ a π' per il punto $P_{s,t}(2t-1, t, s)$ (generico su π), $r : \begin{cases} x = 2t - 1 + 2\alpha \\ y = t \\ z = s - \alpha \end{cases}$, $2(2t-1+2\alpha) - (s-\alpha) = 0$ dà $r \cap \pi'$, via $\alpha = \frac{s-4t+2}{5}$, da cui $x = \frac{10t-5+2s-8t+4}{5}, y = t, z = \frac{5s-s+4t-2}{5}$, $x = \frac{2t+2s-1}{5}, y = t, z = \frac{4t+4s-2}{5}$. Infine, dall'uguaglianza $(\frac{x+2t-1}{2}, \frac{y+t}{2}, \frac{z+s}{2}) = (\frac{2t+2s-1}{5}, t, \frac{4t+4s-2}{5})$ si ottiene $5X + 10Y - 5 = 4Y + 4s - 2$ e $5Z + 5s = 8Y + 8s - 4$, da cui $\frac{5X+6Y-3}{4} = s = \frac{5Z-8Y+4}{3}$ e quindi $3X + 10Y - 4Z - 5 = 0$.

[18] Della retta congiungente A e B).
[19] Nel piano!
[20] Nello spazio!

7.3. Comune $\perp$ a due rette sghembe.

PROPOSIZIONE 7.4. *Date s, s'[21] rette sghembe $\exists!$ retta, denotata $r^{\perp}_{s,s'}$, incidente e $\perp$ a entrambe.*

Dim. Siccome $s \nparallel s'$ anche $v_s \nparallel v_{s'}$ e $u := v_s \times v_{s'}$ è $\perp$ a entrambi, si ha che il piano per s e $\parallel u$ e il piano per s' e $\parallel u$ si intersecano in una retta r ortogonale sia a s che a s', ossia $r = r^{\perp}_{s,s'}$.

OSSERVAZIONE 7.5. La retta $r^{\perp}_{s,s'}$ può essere anche individuato imponenedo alla retta congiungente un punto di s con uno di s', di essere $\perp$ a entrambe.

ESEMPIO 7.6. Date $r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ e $s : \begin{cases} X - Y = 0 \\ X - Z + 1 = 0 \end{cases}$, provare che sono sghembe e determinare $r^{\perp}_{r,s}$.
Scelti $A(0, 1, 1), B(1, 0, 3) \in r, C(-1, -1, 0), D(0, 0, 1 \in s)$ si ha

$$(B - A).(C - A) \times (D - A) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Usiamo i due metodi delineati sopra:

- essendo $v_r = (1, -1, 2), v_s = (1, 1, 1)$, un v.d. della $\perp$ comune è $u = (1, -1, 2) \times (1, 1, 1) = (-3, 1, 2)$, il piano contenente r e $\parallel (-3, 1, 2)$ è $\pi : (t-3s, 1-t+s, 1+2t+2s), (t, s) \in \mathbb{R}^2$, i.e. $\pi : 2X+4Y+Z-5 = 0$, il piano contenente s e $\parallel (-3, 1, 2)$ è $\pi' : (\tau-3s, \tau+s, \tau+2s+1)$, $(\tau, s) \in \mathbb{R}^2$, i.e. $\pi' : X - 5Y + 4Z - 4 = 0$ pertanto $r^{\perp}_{s,s'} : \begin{cases} 2X + 4Y + Z - 5 = 0 \\ X - 5Y + 4Z - 4 = 0 \end{cases}$.
- La generica retta incidente sia r che s ha equazioni:

$$\rho : \frac{x - t}{\tau - t} = \frac{y - 1 + t}{\tau - 1 + t} = \frac{z - 1 - 2t}{\tau + 1 - 1 - 2t} \quad \text{e}$$

  $\rho \perp r$ dà: $\tau - t - \tau + 1 - t + 2\tau - 4t = 0 \Longrightarrow \ldots$,
  $\rho \perp s$ dà: $\tau - t + \tau - 1 + t + \tau - 2t = 0 \Longrightarrow \ldots$,
  che dànno $r^{\perp}_{s,s'} : \begin{cases} 14X + 21Z - 41 = 0 \\ 14X + 42Y - 32 = 0 \end{cases}$,
  come si verifica se le 'due' soluzioni dànno la stessa retta?

7.4. Distanze.

DEFINIZIONE 7.7. (1) *La* distanza tra due punti A *e* B *(denotata $d(A, B)$) è la lunghezza del segmento di estremi A e B*[22].
(2) *La* distanza di un punto P da una retta r *è la distanza di P dalla sua p.o. su r.*
(3) *La* distanza di un punto P da un piano π *è la distanza di P dalla sua p.o. su π.*
(4) *La* distanza tra due rette sghembe *è la distanza tra i due punti intersezioni delle due rette con la comune $\perp$.*

[21] Ossia non complanari!
[22] Ossia, il modulo del vettore applicato $B - A$ o $A - B$.

Osservazione 7.8. (1) Dati due punti $A \neq B$ su una retta r e un punto P :
$$d(P,r) = \frac{|(P-A)\times(B-A)|}{|B-A|},$$
se $C - A \perp r$, si ha: $d(P,r) = \frac{|(P-A)\cdot(C-A)|}{|C-A|}$,
se $r : aX + bY + c = 0$ e $P(x_0, y_0)$, si ha: $d(P,r) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$[23].

(2) Dati un piano π, $A \in \pi$, $C - A \perp \pi$ e un punto P :
$$d(P,\pi) = \frac{|(P-A).(C-A)|}{|C-A|},$$
se $aX + bY + cZ + d = 0$ e $P(x_0, y_0, z_0)$, si ha: $d(P,\pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

(3) Date r e s rette sghembe, $d(r,s)$ è la distanza di un qualunque $P \in r$ dal piano per $s \parallel r$; operativamente si possono dare $A \in r, B \in s$, e u, v, rispettivamente v.d. di r e s, e si ha
$$d(r,s) = \frac{|(A-B).u \times v|}{|u \times v|}.$$

7.5. Asse di un segmento.

Definizione 7.9. *L'* asse di un segmento di estremi *A e B*[24] *è il luogo dei punti P equidistanti da A e B*[25].

Esempio 7.10. *L'asse del segmento di estremi* $A(1,0,0)$ *e* $B(0,1,1)$ *è il piano* π *luogo dei punti* $P(x,y,z)$ *tali che* $d(P,A) = d(P,B)$ *ossia tali che* $(X-1)^2+Y^2+Z^2 = X^2+(Y-1)^2+(Z-1)^2 \therefore -2X+1 = -2Y+1-2Z+1 \therefore \pi : 2X-2Y-2Z+1 = 0$.

Definizione 7.11. *Date nel piano due rette $r \neq s$ incidenti, il luogo dei punti equidistanti da esse è una coppia di rette tra loro $\perp$, dette* rette bisettrici degli angoli individuati da r e s.

8. Circonferenze

Definizione 8.1. (1) *Dati un punto $C \in \pi$ e $\rho \in \mathbb{R}_+$, la* circonferenza di centro C e raggio ρ *è il luogo (denotato $\gamma(C,\rho)$) dei $P \in \pi$ tali che*
$$d(P,C) = \rho;$$
(2) *Dati un punto $C \in \Sigma$ e $\rho \in \mathbb{R}_+$, la* sfera di centro C e raggio ρ *è il luogo (denotato $\varsigma(C,\rho)$) dei $P \in \pi$ tali che*
$$d(P,C) = \rho.$$

Osservazione 8.2. (i) Se $C(\alpha,\beta)$, $\gamma(C,\rho)$ ha equazione: $(X-\alpha)^2 + (Y-\beta)^2 = \rho^2$.
(ii) Se $C(\alpha,\beta,\gamma)$, $\varsigma(C,\rho)$ ha equazione: $(X-\alpha)^2 + (Y-\beta)^2 + (Z-\gamma)^2 = \rho^2$.
Svolgendo i calcoli si ottiene rispettivamente:
$X^2 + Y^2 - 2\alpha X - 2\beta Y + \alpha^2 + \beta^2 - \rho^2 = 0$,
$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2\alpha X - 2\beta Y - 2\gamma Z + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \rho^2 = 0$.

[23] Essendo $(a,b) \perp r$.
[24] Con A e B punti del piano o dello spazio.
[25] Siccome l'equazione $d(P,A) = d(P,B)$ è lineare, si tratta di una retta del piano e di un piano dello spazio.

Consideriamo ora il luogo dei punti del piano e dello spazio le cui coordinate soddisfano:

$$X^2 + Y^2 + aX + bY + c = 0, \tag{25}$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + aX + bY + cZ + d = 0, \tag{26}$$

completando i quadrati si ottiene:
$(X + \frac{a}{2})^2 + (Y + \frac{b}{2})^2 + c - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} = 0,$
$(X + \frac{a}{2})^2 + (Y + \frac{b}{2})^2 + (Z + \frac{c}{2})^2 + d - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{4} = 0,$
da cui, ponendo $\sigma = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$, e $\tilde{\sigma} = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d$, si ottiene:

$$(X + \frac{a}{2})^2 + (Y + \frac{b}{2})^2 = \sigma, \tag{27}$$

$$(X + \frac{a}{2})^2 + (Y + \frac{b}{2})^2 + (Z + \frac{c}{2})^2 = \tilde{\sigma}^{26}. \tag{28}$$

(iii) Date nel piano una retta r e una circonferenza $\gamma = \gamma(C, \rho)$:
- r è *esterna a* γ se $d(C, r) > \rho$, ossia $\gamma \cap r = \emptyset$,
- r è *tangente a* γ se $d(C, r) = \rho$, ossia $\gamma \cap r$ consiste in un singolo punto,
- r è *secante a* γ se $d(C, r) < \rho$, ossia $\gamma \cap r$ consiste in due punti distinti.

(iv) Dati nello spazio un piano π e una sfera $\varsigma = \varsigma(\tilde{C}, \tilde{\rho})$:
- π è *esterno a* ς se $d(\tilde{C}, \pi) > \tilde{\rho}$, ossia $\varsigma \cap \pi = \emptyset$,
- π è *tangente a* ς se $d(\tilde{C}, \pi) = \tilde{\rho}$, ossia $\varsigma \cap \pi$ consiste in un singolo punto,
- r è *secante a* ς se $d(\tilde{C}, \pi) < \tilde{\rho}$, ossia $\varsigma \cap \pi$ consiste in una circonferenza.

(v) Nel piano r è tangente a $\gamma(C, \rho)$ in un punto P se $P \in \gamma \cap r \cap r_{CP}$ con $r \perp r_{CP}$.

(vi) Nello spazio π è tangente a $\varsigma(\tilde{C}, \tilde{\rho})$ in un punto P se $P \in \varsigma \cap \pi \cap r_{CP}$ con $\pi \perp r_{CP}$.

Esercizio 8.3. (1) Scrivere la circonferenza γ passante per $A(1, 1)$, $B(1, 3)$ e $C(3, 1)$.
Imponendo che i tre punti soddisfino (25) otteniamo:
$1 + 1 + a + b + c = 0,$
$1 + 9 + a + 3b + c = 0,$
$9 + 1 + 3a + b + c = 0$
da cui $2a - 2b = 0$, $2 + 2a + c = 0$ e $10 + 3a + a - 2 - 2a = 0$, ossia
$a = -4, b = -4, c = 6$ e quindi $\gamma :\ X^2 + Y^2 - 4X - 4Y + 6 = 0.$

(2) Provare che $\gamma : \begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 - 2X - 4Y - 4 = 0 \\ 3X - 4Y + 15 = 0 \end{cases}$, è una circonferenza.
Completando i quadrati della prima equazione si ottiene:
$(X - 1)^2 + (Y - 2)^2 + Z^2 = 9$ ossia $\varsigma((1, 2, 0), 3)$,
posto $\pi :\ 3X - 4y + 15 = 0$, si ha $d(\pi, (1, 2, 0)) = \frac{|3-8+15|}{\sqrt{25}} = 2 < 3 \therefore \gamma$ è una circonferenza e π è secante ς.

---

[26] Ponendo inoltre: $C(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ e $\tilde{C}(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2})$, si ha che:
se $\sigma > 0$ (risp. $\tilde{\sigma} > 0$), (27) (risp. (28)) rappresenta la circonferenza (risp. la sfera) di centro C (risp. $\tilde{C}$) e raggio σ (risp. $\tilde{\sigma}$,)
se $\sigma = 0$ (risp. $\tilde{\sigma} = 0$), (27) (risp. (28)) rappresenta il punto C (risp. $\tilde{C}$),
se $\sigma < 0$ (risp. $\tilde{\sigma} < 0$), (27) (risp. (28)) rappresenta l'insieme $\emptyset$.

9. Curve e Superficie

Rette e circonferenze sono esempi di *curve*, piani e superficie sferiche sono esempi di *superficie*. Dando per intuitivi i concetti di curva e di superficie, accenneremo alla loro rappresentazione analitica, in particolare considereremo coni, cilindri e superficie di rotazione[27].

Notazione 9.1. *In opportune ipotesi di regolarità per le funzioni* $x(t), y(t), z(t), t \in I \subset \mathbb{R}$, $x(t,u), y(t,u),\ z(t,u)), (t,u) \in D^{28} \subset \mathbb{R}^2$,

(i) i punti descritti da equazioni

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad , \ t \in I \tag{29}$$

costituiscono[29] *una curva* $\mathcal{C}$ *dello spazio*[30]. Si scrive anche:

$$\mathcal{C}:\ (x(t), y(t), z(t)),\ t \in I \subseteq \mathbb{R}.$$

(ii) I punti descritti da equazioni

$$\begin{cases} x = x(t,u) \\ y = y(t,u) \\ z = z(t,u) \end{cases} \quad , \ (t,u) \in D \tag{30}$$

costituiscono una *superficie* $\mathcal{S}$, indicata anche

$$\mathcal{S}:\ (x(t,u), y(t,u), z(t,u)),\ (t,u) \in D \subseteq \mathbb{R}^2.$$

– Le linee ottenute ponendo $t =$ *costante* oppure $u =$ *costante* sono dette *linee coordinate della superficie* $\mathcal{S}$.

(iii) L'insieme dei punti $P(x,y,z)$ dello spazio soddisfacenti un'equazione:

$$f(X,Y,Z) = 0^{31} \tag{31}$$

'costituisce' una *superficie.*

(iv) L'intersezione di due superficie, ossia l'insieme dei punti $P(x,y,z)$ dello spazio soddisfacenti un sistema di equazioni:

$$\begin{cases} f(X,Y,Z) = 0 \\ g(X,Y,Z) = 0 \end{cases} \tag{32}$$

'costituisce' una *curva dello spazio.*

Di solito si può passare da rappresentazioni parametriche a cartesiane (di curve o superficie), *(anche se non sempre in modo elementare)* eliminando il parametro o i parametri. Di solito è invece piú complicato *(se non impossibile)* passare da rappresentazioni cartesiane a parametriche.

---

[27] Per studiare problemi di intersezione e di proiezione.

[28] I un intervallo di $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}$ stesso, D un 'dominio' di $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^2$ stesso.

[29] E sono dette *equazioni parametriche di* $\mathcal{C}$.

[30] Nel piano una curva $\mathcal{C}$ ha rappresentazione parametrica $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, o $\mathcal{C}:\ (x(t), y(t)),\ t \in I \subseteq \mathbb{R}$.

[31] Sotto opportune condizioni di regolarità per la funzione $f(X,Y,Z)$.

OSSERVAZIONE 9.2. Se $\mathcal{C}:\ (x(t),y(t),z(t)),\ t\in I\subseteq\mathbb{R}$ è una curva e $\mathcal{S}:\ f(X,Y,Z)=0$ è una superficie, si ha:

$$\mathcal{C}\subseteq\mathcal{S}\iff \text{vale } f(x(t),y(t),z(t))=0,\ \forall\ t\in I.$$

DEFINIZIONE 9.3. *Una curva* $\mathcal{C}$ *dello spazio è* piana *se* $\exists$ *un piano che la contiene, altrimenti* $\mathcal{C}$ *è* gobba.

OSSERVAZIONE 9.4.
1. $\mathcal{C}:\ (x(t),y(t),z(t)),\ t\in I\subseteq\mathbb{R}$ è piana $\iff$ $\exists a,b,c,d\in\mathbb{R}$ con $(a,b,c)\neq 0_{\mathbb{R}^3}$ tali che $ax(t)+by(t)+cz(t)+d=0\,\forall t\in\mathbb{R}$.
2. Per verificare se $\mathcal{C}$ è piana si può anche procedere prendendo tre punti $A,B,C\in\mathcal{C}$ non allineati, scrivendo il piano π da essi individuato, verificando se $\mathcal{C}$ è contenuta in π.
3. Rette e circonferenze sono curve piane.

ESEMPIO 9.5.
(1) La curva $\mathcal{C}:\ (t^2+1,t^3-t,2t^2+t-1),\ t\in\mathbb{R}$ non è piana infatti:
$a(t^2+1)+b(t^3-t)+(2t^2+t-1)+d=0\ \forall t\in\mathbb{R}$, dà

$$bt^3+(a+2c)t^2+(-b+c)t+a-c+d=0\ \forall t\in\mathbb{R},\ \begin{cases} b=0\\ a+2c=0\\ -b+c=0\\ a-c+d=0\end{cases}\iff a=b=c=d=0$$

(2) La curva $\mathcal{C}:\ (t^2+t^3,t^3-1,t^2+3),\ t\in\mathbb{R}$ è piana infatti:
$a(t^2+t^3)+b(t^3-1)+(t^2+3)+d=0\ \forall t\in\mathbb{R}$ dà:

$$(a+b)t^3+(a+c)t^2-b+3c+d=0\ \forall t\in\mathbb{R},\ \begin{cases} a+b=0\\ a+c=0\\ b-3c-d=0\end{cases}\iff a=-b=-c,2a=d$$

pertanto $\pi:\ X-Y-Z+2=0$ è il piano della curva.

DEFINIZIONE 9.6. *Una* superficie rigata *è una superficie* $\mathcal{S}$ *tale che*
$\forall P\in\mathcal{S}$ *passa una retta* $r_P\subset\mathcal{S}$,
una superficie doppiamente rigata *è una superficie* $\mathcal{S}$ *tale che*
$\forall P\in\mathcal{S}$ *passano due rette* $r_P,s_P\subset\mathcal{S}$.

OSSERVAZIONE 9.7. Una superficie $\mathcal{S}$ che ha una rappresentazione parametrica del tipo:

$$\begin{cases} x=\xi(t)+u\alpha(t)\\ y=\eta(t)+u\beta(t)\\ z=\zeta(t)+u\gamma(t)\end{cases} \tag{33}$$

è una rigata, infatti, $\forall\,\bar{t}\in\mathbb{R}$, (33) rappresenta una retta $r_{\bar{t}}$ contenuta in $\mathcal{S}$; se $P\in\mathcal{S}$ corrisponde ai valori $\bar{t},\bar{u}$ dei parametri, $r_{\bar{t}}$ è la retta per P contenuta in $\mathcal{S}$.

ESEMPIO 9.8. Si prova che $\mathcal{S}:\ (t+u,t^2,tu)$ è una superficie rigata con equazione cartesiana $(Z+Y)^2=X^2Y$ ($\mathcal{S}$ è della forma (33) e basta eliminare i parametri).

10. Cilindri

DEFINIZIONE 10.1. *Un* cilindro *è una superficie luogo di rette* $\parallel$ *a un vettore fissato, dette* generatrici, *una* direttrice *del cilindro è una curva sul cilindro che interseca tutte le generatrici.*

Osservazione 10.2. (i) Data $\mathcal{C}:\ (x(t),y(t),z(t))\ t\in I\subseteq\mathbb{R}$, una rappresentazione parametrica del cilindro che ha $\mathcal{C}$ come direttrice e generatrici $\parallel$ al vettore (l,m,n) è

$$\begin{cases} x=x(t)+lu \\ y=y(t)+mu \\ z=z(t)+nu \end{cases}, \tag{34}$$

in (34) t =costante rappresenta una generatrice e u =costante rappresenta una direttrice.

(ii) Sotto opportune ipotesi di regolarità un'equazione $f(X,Y)=0$ nello spazio rappresenta un cilindro con generatrici $\parallel$ all'asse z[32]. Infatti:
se $P_0(x_0,y_0,z_0)$ è t.c. $f(x_0,y_0)=0, \forall\, P\in r:(x_0,y_0,z_0+t),\ t\in\mathbb{R}$, sta su $f(X,Y)=0$.
Piú in generale, se $u=(a,b,c), u'=(a',b',c')$ con $u\nparallel u'$, di solito

$$f(aX+bY+cZ,a'X+b'Y+c'Z)=0$$

è la rappresentazione di un cilindro con generatrici $\parallel$ al vettore $v=u\times u'$.

Esempio 10.3. (1) L'equazione $e^{X+Y}=1$ rappresenta il piano $X+Y=0$.

(2) L'equazione $X^2+Y^2=-1$ rappresenta l'insieme $\emptyset$ (se X,Y assumono solo valori reali) una circonferenza, del piano complesso[33] (se X,Y assumono valori complessi).

10.1. Proiezione di una curva lungo una direzione. Dati una curva $\mathcal{C}$, un piano π e un vettore $v\nparallel\pi$, la *proiezione di $\mathcal{C}$ su π lungo la direzione di v*[34] è la curva intersezione tra π e il cilindro $\mathcal{S}$ avente $\mathcal{C}$ come direttrice e come generatrici rette $r\parallel v$.

Osservazione 10.4. Se $\mathcal{C}:\begin{cases} f(X,Y,Z)=0 \\ g(X,Y,Z)=0 \end{cases}$, una rappresentazione cartesiana del cilindro che proietta $\mathcal{C}$ ortogonalmente al piano xy può essere ottenuta eliminando Z dalle due equazioni.

Esempio 10.5. Verificare che la p.o. sul piano xy della curva $\mathcal{C}:\begin{cases} X^2+Y^2+Z^2-1=0 \\ X^2-Z^2-2Y+1=0 \end{cases}$ è $\mathcal{C}':\begin{cases} 2X^2+Y^2-2Y=0 \\ Z=0 \end{cases}$.

11. Coni

Definizione 11.1. *Un* cono *è una superficie luogo di rette (*generatrici del cono*) passanti tutte per uno stesso punto V (*vertice del cono*), che incontrano tutte (ciascuna in un sol punto) una curva una $\mathcal{C}$ (*direttrice del cono*).*

Esempio 11.2. Dati $\mathcal{C}:\ (x(t),y(t),z(t)),\ t\in I\subseteq\mathbb{R}$, e $V(x_0,y_0,z_0)$, una rappresentazione parametrica del cono, di direttrice $\mathcal{C}$ e vertice V, è

$$\begin{cases} x=x_0+(x(t)-x_0)u \\ y=y_0+(y(t)-y_0)u \\ z=z_0+(z(t)-z_0)u \end{cases}, \tag{35}$$

[32]Analogamente $f(X,Z)=0$ rappresenta un cilindro con generatrici $\parallel$ all'asse y ed $f(Y,Z)=0$ rappresenta un cilindro con generatrici $\parallel$ all'asse x.

[33]Ossia l'insieme dei $P(z,w)$, $z,w\in\mathbb{C}$, da non confondere con il piano di Argand-Gauss che costituisce un 'modello' della retta complessa.

[34]Se $v\perp\pi$ ritroviamo la p.o..

in (35) t=costante (risp. u=costante) dà una generatrice (risp. una direttrice).

NOTAZIONE 11.3. Una funzione $f(X,Y,Z)$ è detta *omogenea di grado* $d \in \mathbb{N}^*$ se $\forall t \in \mathbb{R}$ si ha:

$$f(tX,tY,tZ) = t^d f(X,Y,Z)^{35}. \tag{36}$$

OSSERVAZIONE 11.4. (1) Un'equazione $f(X,Y,Z) = 0$, con $f(X,Y,Z)$ funzione omogenea, è in generale la rappresentazione cartesiana di un cono con vertice $O(0,0,0)$. Discende infatti da (36) che se $f(X,Y,Z)$ è omogenea e $\tilde{P}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ soddisfa $f(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = 0$, allora $\forall P_t \in r : (t\tilde{x},t\tilde{y},t\tilde{z})$, risulta $f(P_t) = 0$.

(2) Se f è una funzione omogenea nelle variabili $(X-x_0, Y-y_0, Z-z_0), (x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$, l'equazione $f(X-x_0, Y-y_0, Z-z_0) = 0$ rappresenta un cono di vertice $V(x_0,y_0,z_0)$.

DEFINIZIONE 11.5. *Dati una curva $\mathcal{C} : (x(t),y(t),z(t))$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, e un punto $P \notin \mathcal{C}$, l'intersezione del cono $\mathcal{S}$, di vertice P e direttrice $\mathcal{C}$, con un piano $\pi : aX+bY+cZ+d = 0$, non contenente $\mathcal{C}$, è detta* proiezione di $\mathcal{C}$ da P su π.

12. Superficie di rotazione

DEFINIZIONE 12.1. *Data una retta r, si dice* superficie di rotazione di asse r *ogni superficie luogo di circonferenze aventi centro su r e giacenti ciascuna su un piano $\perp$ a r.*

OSSERVAZIONE 12.2. Se $\mathcal{C} : (x(t),y(t),z(t))$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, le circonferenze della superficie ottenuta facendo ruotare $\mathcal{C}$ attorno a una retta r possono essere determinate intersecando, $\forall P_t \in \mathcal{C}$, il piano π_{rt}, passante per P_t e $\perp$ a r, con la sfera Σ_{rt}, di centro un punto $C \in r$ e raggio $\rho = d(C,P_t)$.

ESEMPIO 12.3. Trovare un'equazione cartesiana della superficie ottenuta dalla rotazione di $\mathcal{C} : (t,t^2,t-t^2)$ $t \in \mathbb{R}$ attorno alla retta $r : X = Y = Z$.

Si ha $v_r = (1,1,1), \pi_{rt} : X+Y+Z = t+t^2+t-t^2 \therefore \pi_{rt} : X+Y+Z = 2t$, inoltre, posto $C = O(0,0,0)$, si ha

$$d(C,P_t) = \sqrt{t^2+t^4+t^2+t^4-2t^3} = \sqrt{2t^2(t^2-t+1)} \text{ e quindi}$$

$\varsigma_{rt} : X^2+Y^2+Z^2 = 2t^2(t^2-t+1)$ da cui, eliminando il parametro t, l'equazione $8(X^2+Y^2+Z^2) = (X+Y+Z)^2\left[(X+Y+Z)^2 - 2(X+Y+Z)+4\right]$.

13. Coordinate polari nel piano

DEFINIZIONE 13.1. *Fissata nel piano una semiretta orientata* (asse polare) ℓ, *di origine* O (polo)*, per ogni $P \neq O$ è individuata una coppia di numeri reali, detti* coordinate polari di P

$\rho = d(P,O) > 0$, raggio vettore

$\vartheta, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, *angolo*[36] *del* raggio vettore OP *con* ℓ (anomalia).

PROPOSIZIONE 13.2. *A ogni sistema di coordinate polari si associa in modo canonico un s.d.c.c. orientato positivamente e viceversa.*

Dim. A un sistema di coordinate polari (O,ℓ) si associa il s.d.c.c. ortogonali $\sigma(O;x,y)$ che ha come asse x la retta contenente ℓ, orientata come ℓ, e come asse y la retta $\perp$ a x passante per O. Viceversa, a un s.d.c.c. ortogonali $\sigma(O;x,y)$ si associa il sistema di coordinate polari (O,ℓ) che ha la semiretta positiva dell'asse x, come asse polare ℓ, e l'origine O di $\sigma(O;x,y)$, come polo O .

[35] n.b. Una funzione polinomiale è omogenea se e solo se tutti i suoi monomi sono omogenei dello stesso grado.

[36] Angolo di cui la semiretta ℓ deve ruotare in senso antiorario per sovrapporsi a P.

Osservazione 13.3. (1) Le formule di passaggio da coordinate polari a coordinate cartesiane sono:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$$

mentre quelle da coordinate cartesiane a coordinate polari sono:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \vartheta = \arctan\frac{x}{y} \end{cases},$$

da cui risulta anche $\cos\vartheta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\vartheta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(2) Se si fissa θ e si fa variare ρ, il punto descrive la una retta, se si fissa ρ e si fa variare θ il punto descrive una circonferenza.

14. Coordinate cilindriche e polari nello spazio

Definizione 14.1. *Fissato nello spazio un s.d.c.c. ortogonali $\sigma(O; x, y, z)$, per ogni $P \neq O$, posto $\rho = d(P, O)$, e ϑ l'angolo che la proiezione del* raggio vettore *OP sul piano xy forma con l'asse x le* coordinate cilindriche *di P sono:*

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \\ z = z \end{cases}.$$

Definizione 14.2. *Fissato nello spazio un s.d.c.c. ortogonali $\sigma(O; x, y, z)$, per ogni $P \neq O$, posto $\rho = d(P, O), \varphi$ l'angolo che la proiezione del* raggio vettore *OP sul piano xy forma con l'asse x e e ϑ l'angolo che il raggio vettore OP forma con l'asse z le* coordinate polari *di P sono:*

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\vartheta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = \rho\cos\vartheta \end{cases}.$$

CHAPTER 5

Funzioni vettoriali e Funzioni (scalari) di piú variabili

1. Definizione e prime proprietà

Finora sono state considerate funzioni (di una sola variabile)

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \mapsto f(x), \end{aligned}$$

e gli insiemi:

$$D(f) := \{x \in \mathbb{R}, f(x) \text{ è definita}\} \qquad \textit{dominio (o campo) di definizione di } f,$$

$$I(f) := \{y \in \mathbb{R}, y = f(x) \text{ per qualche } x \in D(f)\} \quad \textit{immagine (o rango) di } f,$$

$$\Gamma(f) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = f(x), \text{ al variare di } x \in D(f)\} \qquad \textit{grafico di } f,$$

Esempio 1.1. Se $f(x) = \lg x$, si ha $D(f) = \mathbb{R}^*_+, I(f) = \mathbb{R}$.

Per descrivere fenomeni concreti sono spesso necessarie funzioni di piú variabili.

Esempio 1.2.
(1) Sia $T :=$ temperatura di un punto P della superficie terrestre (a un istante fissato), T dipende dalla longitudine (x) e dalla latitudine (y) di P, cioè: $T(P) = F(x,y)$; invece, facendo variare anche l'istante (z), risulta $T(P) = F(x,y,z)$, rispettivamente si ha dunque:

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

(2) Sia $V :=$ velocità del vento in un punto P dell'atmosfera terrestre (a un istante fissato), identificando l'atmosfera terrestre con $\mathbb{R}^3$ ogni punto P è individuato dalle sue coordinate (x,y,z), quindi $V(P) = V(x,y,z) = (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z)$[1]$)$, si ha dunque:

$$V : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

Definizione 1.3. *Dati* $n \geq 1, m \geq 1, D \subset \mathbb{R}^n$ *una* funzione vettoriale di n variabili, definita su $D \subset \mathbb{R}^n$, a valori in $\mathbb{R}^m$, con componenti $f_i : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *è un'applicazione*

$$\begin{aligned} \underline{F} \quad : \quad & D \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ & \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \underline{F}(\underline{x}) := (f_1(\underline{x}), \dots, f_m(\underline{x})); \end{aligned}$$

se $m = 1$ *la funzione è detta* funzione scalare di n variabili *e si scrive*

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & D \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \underline{x} \mapsto f(\underline{x}). \end{aligned}$$

$D \subset \mathbb{R}^n$ *è il* dominio o campo di definizione *di* $\underline{F}$ *(risp.* f*) ed è denotato* $D(\underline{F})$ *(risp.* $D(f)$*).*

---

[1] Dalla fisica sappiamo infatti che la velocità nello spazio è un vettore con tre componenti.

l'insieme $\{\underline{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m : y_i = f_i(\underline{x}), 1 \leq i \leq m, \underline{x} \in D\}$ *(risp.* $\{y \in \mathbb{R} : y = f(\underline{x}), \underline{x} \in D\}$*)* *è detto* codominio o rango di $\underline{F}$ *(risp.* f*) e denotato* $I(\underline{F})$ *(risp.* $I(f)$*)*;
l'insieme $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \supset \{(\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : y_i = f_i(\underline{x}), 1 \leq i \leq m, \underline{x} \in D\}$ *(risp.* $\{(\underline{x}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y = f(\underline{x}), \underline{x} \in D\}$*) è il* grafico di $\underline{F}$ *(risp* f*) e denotato* $\Gamma(\underline{F})$ *o* $\Gamma_{\underline{F}}$ *(risp.* $\Gamma(f)$ *o* Γ_f*)*[2].

OSSERVAZIONE 1.4. 1. Per studiare una funzione vettoriale o anche una funzione scalare di piú variabili[3] (come nel caso di funzioni di una sola variabile) si usano gli strumenti di *limite, continuità, derivazione* che definiremo via via.

2. Nei casi in cui $n = 2$ e le funzioni scalari da studiare sono semplici si può anche usare la tecnica di intersecare con piani $\parallel$ agli assi coordinati[4].

3. Noi considereremo prevalentemente funzioni vettoriali di una variabile e funzioni scalari di due o tre variabili.

DEFINIZIONE 1.5. *data* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, *la* curva di livello relativa alla quota $c \in \mathbb{R}$ *è la curva* $\Gamma_f \cap \{z = c\}$ *(intersezione fra il grafico e il piano corrispondente alla quota data).*

ESEMPIO 1.6. (1) Sia $f(x, y) = x^2 + y^2$. Si ha:
$D(f) = \mathbb{R}^2$,
$I(f) = \mathbb{R}_+$,
$\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y) = x^2 + y^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
Intersecando Γ_f con piani $z = c, c \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = c \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} c = x^2 + y^2 \\ z = c \end{cases} .$$

Ossia: per $c = 0$ il solo punto $(0, 0, 0)$, per $c > 0$ una circonferenza del piano $z = c$, per $c < 0$ l'insieme $\emptyset$.[5]
Intersecando Γ_f con piani $\parallel$ agli altri due piani coordinati, cioè rispettivamente $x = c, y = c, c \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x = c \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ y = c \end{cases} ,$$

ossia parabole contenute rispettivamente nei diversi piani $\parallel$ a $x = 0$ e $y = 0$[6].
Pertanto, il grafico $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^3$ è un *paraboloide ellittico*[7] (di rotazione con asse l'asse z, ossia la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z per esempio la parabola di equazioni $\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$).

(2) Sia $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$[8]. Si ha:

---

[2]Se $n = 2, m = 1$ oppure $n = 2, m = 1$, risulta $\gamma_f \subset \mathbb{R}^3$ (risp. $\Gamma_{\underline{F}} \subset \mathbb{R}^3$) e quindi è possibile darne una visualizzazione geometrica.

[3]E tracciarne il grafico nei casi succitati.

[4]Passando cioè a una rappresentazione consistente in 'fette' bidimensionale del grafico.

[5]Proiettando sul piano $z = 0$ queste diverse curve di livello si ricopre il piano stesso con circonferenze concentriche (nell'origine).

[6]Proiettando queste diverse curve di livello sul piano $x = 0$ (risp. $y = 0$), se ne ricopre il semipiano positivo $z > 0$ con parabole aventi lo stesso asse.

[7]Piú in generale, $\forall\, ab \neq 0$, il grafico della funzione $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ è un paraboloide ellittico.

[8]n.b. scrivendo $\sqrt{9 - x^2 - y^2}$ si intende la radice aritmetica e dunque un numero reale positivo.

$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9 - x^2 - y^2 \geq 0 \;\therefore\; x^2 + y^2 \leq 9\}$,
$I(f) = [0, 3] \subset \mathbb{R}_+$,
$\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}\}$.
Elevando al quadrato ambo i membri di $z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ si ottiene $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, ossia la sfera di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 3, pertanto Γ_f è la mezza sfera contenuta nel semispazio $z \geq 0$.

Osservazione 1.7. In generale è difficile[9] disegnare il grafico anche di una $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, se $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$ ciò è addirittura impossibile dal momento che Γ_f è contenuto in uno spazio $(n + 1 \geq 4)$-dimensionale.

Esempio 1.8. (1) Sia $f(x, y) = \sqrt{x^3 - xy}$. Si ha:
$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 - xy \geq 0$[10],
$I(f) = \mathbb{R}_+$,
$\Gamma_f = ?$

(2) Sia $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$. Si ha:
$D(f) = \mathbb{R}^2$,
$I(f) = \mathbb{R}_+$,
per determinare Γ_f, a differenza dell'esercizio precedente, possiamo utilizzarne le curve di livello, al variare di $c \in \mathbb{R}$,

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = e^{x^2 - y^2}, (x, y) \in \mathbb{R}^2, z = c\}$$

ossia, si tratta di studiare le intersezioni di Γ_f (sconosciuto) con i piani $z = c, c \in \mathbb{R}_+$ (e vedere quello che succede su ciascuno di essi).
Da $e^{x^2 - y^2} = c, c > 0$ si ottiene $x^2 - y^2 = \lg c$, ossia $\frac{x^2}{\lg c} - \frac{2}{\lg c} = 1$, poiché $\lg c \begin{cases} > 0 & \text{se } c > 1 \\ = 0 & \text{se } c = 1 \\ < 0 & \text{se } c < 1, \end{cases}$
otteniamo per $c > 1$ una famiglia di iperboli con asintoti le bisettrici degli assi e rami che tagliano l'asse x, per $c = 1$ le bisettrici degli assi e per $c < 1$ una famiglia di iperboli con asintoti le bisettrici degli assi e rami che tagliano l'asse y.

Osservazione 1.9. Nell'esempio 1.6.1. disegnando le proiezioni ortogonali delle diverse curve di livello, al variare di $c \in \mathbb{N}$, di Γ_f sul piano $z = 0$. si ottengono circonferenze[11] con centro in $O \in D$ e raggi $\sqrt{n}$ ossia:
$0; 1; 1,414..; 1,732..; 2; 2,236..; 2,449..; 2,645..; 2,828..; 3; \ldots,$
calcolando le differenze fra questi (che esprimono la distanza fra le diverse circonferenze) si ottiene la successione decrescente:

---

[9]Ci si può aiutare col computer disegnando molte curve di livello per capire l'andamento.

[10]Siccome $x^3 - xy = x(x^2 - y)$, si ha: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - y \geq 0, \end{cases}$ e $\begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - y \leq 0 \end{cases}$, pertanto $D(f)$ risulta essere l'unione delle due regioni del piano individuate dai due sistemi di disequazioni.

[11]Spesso chiamate ancora *curve di livello*.

$1; 0,414..; 0,318..; 0,268..; 0,236..; 0,213..; 0,196..; 0,183..; 0,172..; \ldots$ [12], ciò significa che, all'aumentare costante della quota, le proiezioni delle curve di livello si infittiscono e questo corrisponde all'aumentare della 'ripidità' di Γ_f [13].

Esercizio 1.10. Ripetere le considerazioni precedenti per l'esempio 1.6.2..

Esempio 1.11.

(1) *Moto di una particella lungo una retta.* Sia r la retta data, per ogni $\bar{t} \in \mathbb{R}$ sia $I = [0, \bar{t}]$, identificando r con $\mathbb{R}$ e la posizione della particella con un punto di r, $\forall\ t \in I, P(t) \in r$ indica il punto di r raggiunto dalla particella in movimento all'istante t. La funzione:
posizione è la coordinata $x(P(t)) =: x(t)$, ossia $t \mapsto x(t)$,
velocità è la derivata prima di $x(t)$, ossia $t \mapsto x'(t) := v(t)$,
accelerazione è la derivata seconda di $x(t)$, ossia $t \mapsto x''(t) = v'(t) := a(t)$,
moto è la legge del moto di $P(t)$, ossia $t \mapsto (x(t), v(t), a(t)) \in \mathbb{R}^3$.

(2) *Moto di una particella in un piano.* Sia π il piano dato, per ogni $\bar{t} \in \mathbb{R}$ sia $I = [0, \bar{t}]$, identificando π con $\mathbb{R}^2$ e la posizione della particella con un punto di π,
$\forall\ t \in I, P(t) \in \pi$ indica il punto di π raggiunto dalla particella in movimento all'istante t. La funzione:
posizione è la coppia di coordinate $(x(P(t)), y(P(t))$, ossia $t \overset{\xi}{\mapsto} (x(t), y(t))$,
velocità è la derivata prima di $(x(t), y(t))$, ossia $t \overset{\xi'}{\mapsto} (x'(t), y'(t))$,
accelerazione è la derivata seconda di $x(t)$, ossia $t \overset{\xi''}{\mapsto} (x''(t), y''(t))$,
moto è la legge del moto di $P(t)$, ossia $t \mapsto (\xi(t), \xi'(t), \xi''(t)) \in \mathbb{R}^6$.

(3) *Curve del piano e dello spazio.* Le (29)[14] possono leggersi come funzione vettoriale continua

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} \quad : \quad & I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & t \mapsto \underline{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t)). \end{aligned}$$

Ossia, le curve del piano o dello spazio possono essere pensate come tracciate da una particella in movimento, la cui posizione P_t all'istante t_0 sia $P_t(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$, ossia descritta da una funzione vettoriale $\underline{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Diverse funzioni vettoriali $\underline{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (o rappresentazioni parametriche) possono dare luogo alla stessa curva, per esempio:

$$\begin{aligned} \underline{\gamma}_1 \quad : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & t \mapsto \underline{\gamma}_1(t) = (1 - t, 1 + t^2, -3t^3) \quad \text{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\gamma}_2 \quad : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & \tau \mapsto \underline{\gamma}_2(\tau) = (\tau, \tau^2 - 2\tau + 2, 3\tau^3 - 9\tau^2 + 9\tau - 3), \end{aligned}$$

basta porre $\tau = 1 - t$ per accorgersene.

[12] n.b. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 0$.

[13] Fenomeno dovuto al comportamento delle pendenze delle parabole ottenute tagliando Γ_f con i piani del fascio di asse l'asse z (per esempio la pendenza di $\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ tende all'infinito al tendere all'infinito di y).

[14] Equazioni parametriche di una curva dello spazio.

Osserviamo in particolare che per ogni $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile, l'equazione funzionale $y = f(x)$ può essere essere pensata come curva in forma parametrica

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t), \end{cases} \quad t \in I,$$

ossia, il grafico Γ_f di f è la curva $\mathcal{C} :\ (t, f(t)), t \in I$[15].

Viceversa, data una curva $\mathcal{C} :\ (x(t), y(t)) \subset \mathbb{R}^2, t \in I$, non sempre esiste $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\mathcal{C} = \Gamma_f$[16].

2. Proprietà delle funzioni vettoriali e scalari di piú variabili

Osservazione 2.1. Le operazioni algebriche su funzioni vettoriali di uguale dominio sono definite punto per punto, come nel caso di funzioni scalari (di una o piú variabili).

2.1. Limiti e continuità di funzioni vettoriali.

Definizione 2.2. *Dati $t_0 \in \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}$ intorno bucato di t_0 e $\underline{F} : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ funzione vettoriale definita su I, se $\forall\, i, 1 \leq i \leq m,\ \exists$ finito $\lim\limits_{t \to t_0} f_i(t), t \in I$, il* limite di $\underline{F}$ in t_0 è il vettore

$$\lim_{t \to t_0} \underline{F}(t) := (\lim_{t \to t_0} f_1(t), \dots, \lim_{t \to t_0} f_m(t)).$$

Se tutti i $\lim\limits_{t \to t_0} f_i(t), t \in I, \exists$ e almeno uno è infinito, $\underline{F}$ diverge in t_0. *Se per almeno un indice i, $\nexists \lim\limits_{t \to t_0} f_i(t)$, $\underline{F}$* non ha limite in t_0.

Esempio 2.3. Sia $\underline{F}(t) = (\lg t, \frac{1}{t-1})$. Si ha che:
$D(\underline{F}) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ed $\underline{F}(t)$ diverge in $0, +\infty, -\infty$, non ha limite in 1, ha limite in ogni altro $t \in \mathbb{R}$.

Definizione 2.4. *Una funzione vettoriale $\underline{F}$ è* continua in $a \in D(\underline{F})$ *se*

$$\lim_{t \to a} \underline{F}(t) = \underline{F}(a)^{17}.$$

È continua in $D(\underline{F})$ se è tale in ogni $a \in D(\underline{F})$.

2.2. Derivazione di funzioni vettoriali.

Definizione 2.5. *Dati $t_0 \in \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}$ intorno bucato di $t_0, h \in \mathbb{R}^*_+, t_0 + h \in I$ e $\underline{F} : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ funzione vettoriale definita su I, se*

$$\exists \ \lim_{h \to 0} \frac{\underline{F}(t_0 + h) - \underline{F}(t_0)}{h} := \underline{F}'(t_0) = \frac{d}{dt}\underline{F}(t),$$

$\underline{F}$ è derivabile in t_0 *e il vettore $\underline{F}'(t_0)$* è la derivata *di $\underline{F}$ in t_0.*

Se $\underline{F}$ è derivabile su tutto $D := D(\underline{F})$ la sua derivata *è la funzione*

$$\underline{F}' := (f_1', \dots, f_m'),\ \underline{F}' : D \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

[15]Per esempio la funzione $f(x) = x^3$ dà luogo alla curva (grafico) $(t, t^3) \subset \mathbb{R}^2$.

[16]Per esempio data la curva $\mathcal{C} :\ (\cos t, \sin t) \subset \mathbb{R}^2, t \in [0, 2\pi]$, da $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ si ricava l'equazione $x^2 + y^2 = 1$ della circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

[17]n.b. risulta $\underline{F}$ continua in $a \in D(\underline{F}) \iff$ lo sono tutte le sue componenti.

2.2.1. *Interpretazione geometrica* $(m = 3)$. [18]

Dati $\underline{F}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, definita su $I \subset \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$, $t_0, t_0+h \in I$, $P = \underline{F}(t_0), Q = \underline{F}(t_0+h) \in \mathcal{C} = I(\underline{F}), \overrightarrow{PQ}$ è il *vettore secante* $\mathcal{C}$ in P e Q, se $\underline{F}'(t_0) \neq 0$ esso rappresenta il *vettore tangente* a $\mathcal{C}$ in P e $\frac{\underline{F}'(t_0)}{|\underline{F}'(t_0)|}$ il suo versore.

La retta passante per P e Q ha rappresentazione parametrica

$$\begin{aligned} x - x(t_0) &= \tau(x(t_0+h) - x(t_0)) \\ y - y(t_0) &= \tau(y(t_0+h) - y(t_0)) \qquad\qquad \tau \in \mathbb{R}, \\ x - x(t_0) &= \tau(z(t_0+h) - z(t_0)) \end{aligned}$$

ossia

$$\frac{x - x(t_0)}{x(t_0+h) - x(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y(t_0+h) - y(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z(t_0+h) - z(t_0)}, \tag{37}$$

se gli sviluppi di Taylor(1685-1731) delle componenti di $\underline{F}$ sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} x(t_0+h) - x(t_0) &= x'(t_0) + \varepsilon_1(h^2) \\ y(t_0+h) - y(t_0) &= y'(t_0) + \varepsilon_2(h^2) \\ z(t_0+h) - z(t_0) &= z'(t_0) + \varepsilon_3(h^2), \end{aligned}$$

sostituendo in (37), dividendo per h e passando al $\lim\limits_{h \to 0^+}$ si ottiene

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0) + \frac{\varepsilon_1(h^2)}{h}} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0) + \frac{\varepsilon_2(h^2)}{h}} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0) + \frac{\varepsilon_3(h^2)}{h}},$$

ossia

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

è una rappresentazione cartesiana della retta tangente a $\mathcal{C}$ in P .

Esempio 2.6.
(1) Sia $\mathcal{C} : (t, t^2, t^3) \subset \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}$, provare che $\exists$ retta tangente in ogni punto di $\mathcal{C}$ e calcolarla.
(2) Sia $\mathcal{C} : (\cos t, 1 - t^2, t \sin 2t) \subset \mathbb{R}^3, t \in [-\pi, \pi]$, provare che in$P(0) = (1, 1, 0), \nexists$ retta tangente a $\mathcal{C}$. Trovare il versore tangente a $\mathcal{C}$ in $P(\frac{\pi}{2}) = (0, \frac{4-\pi^2}{4}, 0)$.
(3) Sia $\mathcal{C} : (t^3, t^2) \subset \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}$, disegnare $\mathcal{C}$, trovare un'equazione cartesiana per $\mathcal{C}$ e determinare la tengente a $\mathcal{C}$ nei punti in cui $\exists$.

Definizione 2.7. *Sia* $\underline{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{R}^m, (m = 2, 3)$ *derivabile in* I, *se* $\underline{\gamma}'$ *è derivabile, la sua derivata* $(\underline{\gamma}')'$ *è detta* derivata seconda *di* $\underline{\gamma}$ *e indicata* $\underline{\gamma}''$.

Esempio 2.8. Sia $\mathcal{C} : (t^2, \arctan t) \subset \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}$, ossia $\mathcal{C} = I(\underline{\gamma}), \underline{\gamma} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, si ha $\underline{\gamma}'(t) = (2t, \frac{1}{1+t^2}), \underline{\gamma}''(t) = (2, \frac{-2t}{(1+t^2)^2})$.

[18] In realtà vale per $(m \leq 3)$.

2.3. Proprietà delle curve.

DEFINIZIONE 2.9. *Una curva $\mathcal{C}$ (del piano o dello spazio), data via $\underline{\gamma}: I \longrightarrow \mathbb{R}^m, (m = 2, 3)$ è:*
(1) semplice *se $\underline{\gamma}$ è continua e iniettiva,*
(2) chiusa *se $\underline{\gamma}(a) = \underline{\gamma}(b)$, dove $I = [a, b]$,*
(3) regolare *se:*
   (a) *è derivabile e $\underline{\gamma}'$ è continua in I,*
   (b) *$\underline{\gamma}'(t) \neq 0, \forall\, t \in I$, eccetto al piú gli estremi.*

ESERCIZIO 2.10. Disegnare le curve
$\mathcal{C}:\ (t, t^2, t^3) \subset \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}$,
$\mathcal{C}:\ (t^2, t^3) \subset \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}$,
$\mathcal{C}:\ (\sin t, \cos t) \subset \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}$,
e dire se sono semplici, chiuse, regolari.

DEFINIZIONE 2.11. *Dati $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e una particella con traiettoria:*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad x, y, z \in C^2(I)^{19}, \\ z = z(t), \end{cases}$$

$$\underline{r}(t) := \underline{i}x(t) + \underline{j}y(t) + \underline{k}z(t)$$
$$\underline{r}'(t) := \underline{i}x'(t) + \underline{j}y'(t) + \underline{k}z'(t) =: \underline{v}(t) \qquad \textit{con} \qquad \|\underline{v}(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$
$$\underline{r}''(t) := \underline{i}x''(t) + \underline{j}y''(t) + \underline{k}z''(t) =: \underline{a}(t) \qquad \textit{con} \qquad \|\underline{a}(t)\| = \sqrt{(x''(t))^2 + (y''(t))^2 + (z''(t))^2},$$

sono dette rispettivamente legge oraria del moto, velocità istantanea, accelerazione istantanea.

ESERCIZIO 2.12. (1) Data $\underline{r}(t) := \underline{i}t^3 + \underline{j}(1 - t^2) + \underline{k}t$, $t \in \mathbb{R}$, determinare $\underline{v}(t), \underline{a}(t)$.
(2) Dati $\mathcal{C}:\ (t^2, t^3) \subset \mathbb{R}^2, t \in [0, 5]$, $\underline{v}(0) = (0, 0, 1)$, $\underline{r}(0) = (0, 0, 0)$, determinare $\underline{r}(t)$.

2.3.1. *Ascissa curvilinea.* Dato un arco di curva regolare $\mathcal{C} : (x(t), y(t), z(t)), t \in I = [a, b]$, suddividiamo I in n sub-intervalli mediante i punti

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b,$$

siano ordinatamente

$$P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n \in \mathcal{C}$$

i punti corrispondenti ai valori $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n \in \mathbb{R}$, in particolare P_0, P_n sono gli estremi dell'arco di curva.

DEFINIZIONE 2.13. *La poligonale $\mathfrak{P}$ di vertici $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ si dice* inscritta nell'arco $\widehat{P_0P_n}$.

Dalla geometria elementare sappiamo che $\mathfrak{P}$ ha lunghezza

$$p = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \Big[\big(x(t_{i+1}) - x(t_i)\big)^2 + \big(y(t_{i+1}) - y(t_i)\big)^2 + \big(z(t_{i+1}) - z(t_i)\big)^2 \Big]}.$$

Posto poi $\delta = \max\limits_{0 \le i \le n-1} (t_{i+1} - t_i)$, diamo la seguente definizione:

[19] Ricordare che l'insieme delle funzioni definite e derivabili su $I \subset \mathbb{R}$ fino all'ordine i è denotato $C^i(I)$, l'insieme delle funzioni derivabili a ogni ordine è denotato $C^\infty(I)$,

DEFINIZIONE 2.14. *La* lunghezza dell'arco $\mathcal{C}$, di estremi P_0, P_n *è*

$$\lim_{\delta\to 0^+} p.$$

OSSERVAZIONE 2.15. Nell'ipotesi $\mathcal{C}$ regolare $\lim_{\delta\to 0^+} p$ è finito

(1) ossia $\exists\, \ell \in \mathbb{R}$, tale che $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $\exists\, \delta_\varepsilon$ con $|p-\ell| < \varepsilon, \forall\, \delta < \delta_\varepsilon$,
(2) e precisamente

$$\ell = \lim_{\delta\to 0^+} p = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}.$$

3. Nozioni metriche e topologiche

Enunciamo, senza dimostrazione, ulteriori proprietà del prodotto scalare(standard)[20]in $\mathbb{R}^n$.

PROPOSIZIONE 3.1. *Per ogni* $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$ *si ha:*

(1) $\|\alpha \underline{x}\| = |\alpha| \cdot \|\underline{x}\|$;
(2) $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$ diseguaglianza triangolare*;*
(3) $|\underline{x} \cdot \underline{y}| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$ diseguaglianza di Cauchy(1789-1857)-Schwartz(1915-2003)*;*

OSSERVAZIONE 3.2. Dalla diseguaglianza triangolare di Prop. 3.1, ricordando la Def. 4.7.7[21], discende che vale

$$d(\underline{x}, \underline{y}) \leq d(\underline{x}, \underline{z}) + d(\underline{z}, \underline{y}), \;\; \forall\, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n,$$

si ha infatti $\underline{x} - \underline{y} = (\underline{x} - \underline{z}) + (\underline{z} - \underline{y})$.

DEFINIZIONE 3.3. *Per ogni* $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}_+$, *l'*intorno di $\underline{x}_0$ di raggio r *è l'insieme*

$$B_r(\underline{x}_0) := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : d(\underline{x}, \underline{x}_0) < r\}.$$

ESEMPIO 3.4. (1) Se $n = 1$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha $B_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$.
(2) Se $n = 2$ e $(\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, si ha $B_r(\underline{x}_0) := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$.
(3) Se $n = 3$ e $(\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, si ha $B_r(\underline{x}_0) := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2\}$.

DEFINIZIONE 3.5. (1) *Dati* $A \subset \mathbb{R}^n, P_0 \in \mathbb{R}^n$, P_0 *è un:*
- punto di accumulazione per A *se ogni suo intorno contiene punti di* A *distinti da* P_0,
- punto isolato per A, *se* $P_0 \in A$, *e non ne è punto di accumulazione.*
- punto esterno per A, *se* $P_0 \notin A$, *e non ne è punto di accumulazione.*

(2) *Un punto (di accumulazione)* P_0 *di* A *è un* punto interno ad A *se* $\exists\, B_r(P_0) \subset A$ *(ossia* 'A è intorno di' P_0).
(3) *Un* aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ *è un insieme intorno di ogni suo punto (ossia* $\forall\, \underline{x}_0 \in A, \exists\, B_r(\underline{x}_0) \subset A$).
L'insieme dei punti interni di un insieme A *è indicato* $\overset{\circ}{A}$.
(4) *Un* chiuso $A \subset \mathbb{R}^n$ *è un insieme tale che* $\mathfrak{C}(A) := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{x} \notin A\}$ *è aperto.*
(5) *Un punto* $P_0 \in \mathbb{R}^n$ *è esterno ad* A *se* $\exists\, B_r(P_0) \subset \mathfrak{C}(A)$ *(ossia* P_0 *è interno a* $\mathfrak{C}(A)$.
(6) *Un punto* $P_0 \in \mathbb{R}^n$ *è un* punto di frontiera per A *se ogni suo intorno contiene sia punti di* A *che punti di* $\mathfrak{C}(A)$.
L'insieme dei punti di frontiera di un insieme A *è indicato* $\mathcal{F}(A)$.

---

[20]È stato definito in Def. 3.3.3, via $\underline{x} \cdot \underline{y} := x_1y_1 + \ldots + x_ny_n \in \mathbb{R}$, $\forall\, \underline{x} = (x_1, \ldots, x_n), \underline{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e in Prop. 4.3.4 ne sono stae date le prime proprietà.

[21]Ossia che la distanza di $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ da $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ è: $d(\underline{x}, \underline{y}) := \|\underline{x} - \underline{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$.

ESEMPIO 3.6. (1) $\emptyset, \mathbb{R}^n$ sono sia aperti che chiusi.
(2) $(0,1) \subset \mathbb{R}$ è aperto e quindi $(-\infty, 0] \cup [0, +\infty)$ è chiuso.
(3) $(0,1] \subset \mathbb{R}$ non è né aperto né chiuso.

OSSERVAZIONE 3.7. Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ è aperto se e solo se non ha punti di frontiera, è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di frontiera .

DEFINIZIONE 3.8. (1) *Un insieme* $A \subset \mathbb{R}^n$ *è* limitato *se* $\exists\, B_r(O) \supset A$.
(2) *Una funzione* $\underline{F} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m, A \subset \mathbb{R}^n, n, m \geq 1$ *è* limitata *se lo è* $I(\underline{F})$.

ESERCIZIO 3.9. Dire se sono limitati o meno:
(1) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\}$.
(2) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.
(3) $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2+1}$.
(4) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^4)$.

4. Limiti di funzioni scalari di piú variabili

DEFINIZIONE 4.1. *Dati* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n, P_0 \in \mathbb{R}^n$ *punto di accumulazione di* A, f tende a $\ell \in \mathbb{R}$ per P tendente a P_0 *se,* $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, *tale che* $\forall\, P \in A \setminus \{P_0\}$, *con* $\|P - P_0\| < \delta$, *valga* $|f(P) - \ell| < \varepsilon$, *e si scrive*

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = \ell \qquad \textit{oppure} \qquad \lim_{(x_1,\dots,x_n) \to (x_1^0,\dots,x_n^0)} f(x_1, \dots, x_n) = \ell,$$

f tende a $\pm\infty$ per P tendente a P_0 *se,* $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, *tale che* $\forall\, P \in A \setminus \{P_0\}$, *con* $\|P - P_0\| < \delta$, *valga* $|f(P)| > \varepsilon$.

ESEMPIO 4.2. (1) $\lim_{(x,y) \to (0,0)} (x^2 + y^2) = 0$.
(2) $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \lg(x^2 + y^2) = -\infty$.
(3) $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = +\infty$.
(4) $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \nexists$[22].

OSSERVAZIONE 4.3. Valgono teoremi di unicità del limite, limite della somma e del prodotto di funzioni, permanenza del segno, limitatezza locale, dei carabinieri.

4.1. Limite in un punto lungo una direzione. (Solo per $n = 2$)

Dati $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^2, P_0(x_0, y_0)$ punto interno ad A

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = \ell, \tag{38}$$

si considerino la retta

$$r : \begin{cases} z = 0 \\ y - y_0 = \mu(x - x_0) \end{cases} \tag{39}$$

e la funzione

$$\varphi_\mu(x) := f(x, y_0 + \mu(x - x_0)). \tag{40}$$

[22] Lo vedremo dopo.

Studiare l'intersezione di Γ_f col piano $y = y_0 + m(x - x_0)$ intorno a x_0 aiuta a verificare se vale (38), infatti, usando la definizione di limite si verifica che se vale (38), allora vale anche

$$\ell = \lim_{x \to x_0} \varphi_\mu(x)^{23} = \lim_{x \to x_0} f(x, y_0 + m(x - x_0)),\ \forall\ \mu \in \mathbb{R}, \tag{41}$$

ossia, (41) è condizione necessaria affinché valga (38).

Esempio 4.4. Si verifica che le seguenti funzioni non hanno limite in $(0,0)$
(1) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.
(2) $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$.
(3) $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
usiamo il criterio delineato sopra:
$\varphi_\mu(x) = f(x, \mu x)$,
- $\varphi_\mu(x) = \frac{\mu x^2}{x^2+\mu x^2} = \frac{\mu}{1+\mu^2}$,
- $\varphi_\mu(x) = \frac{1}{1+\mu^2}$,
- $\varphi_\mu(x) = \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}$;

n.b. la condizione (41) è necessaria ma non sufficiente, infatti se $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$, lungo tutte le rette per l'origine il limite è 0, infatti $\varphi_\mu(x) = \frac{\mu^2 x^3}{x^2+\mu^4 x^4} = \frac{\mu^2 x}{1+\mu^4 x^2}$, $f(0,y) = \frac{0}{y^4}$, se invece si calcola $\lim (x,y) \to (0,0)$ lungo la parabola $x = y^2$, si ottiene $f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2} \neq 0$.

Osservazione 4.5. (1) Se è noto che $\exists \lim\limits_{P \to P_0} f(P)$, per trovarlo basta calcolarlo in una sola direzione; se il limite in una direzione r vale ℓ, se ne deduce che se il limite $\exists$ deve valere ℓ; se $\exists$ due direzioni lungo le quali i limiti sono $\neq$, il limite $\nexists$.
(2) Per calcolare ili limite di funzioni di due variabili può essere utile usare le *coordinate polari del piano* (vedi (4.13.1)).

Esempio 4.6. Verifichiamolo nelle funzioni di Esem. (4.4)
(1) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, in coordinate polari dipende da ϑ, infatti

$$f(\rho\cos\vartheta, \sin\vartheta) = \frac{\rho^2 \cos\vartheta \sin\vartheta}{\rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\sin^2\vartheta} = \cos\vartheta\sin\vartheta.$$

(2) $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$, in coordinate polari dipende da ϑ, infatti

$$f(\rho\cos\vartheta, \sin\vartheta) = \frac{\rho^2 \cos^2\vartheta}{\rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\sin^2\vartheta} = \cos^2\vartheta.$$

(3) $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, in coordinate polari dipende da ϑ, infatti

$$f(\rho\cos\vartheta, \sin\vartheta) = \frac{\rho^2 \cos^2\vartheta - \rho^2\sin^2\vartheta}{\rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\sin^2\vartheta} = \cos 2\vartheta.$$

Enunciamo, senza dimostrazione, il seguente risultato che fornisce un criterio per calcolare il limite in un punto di una funzione (scalare) di due variabili.

[23] Detto *limite di f lungo la direzione r*.

PROPOSIZIONE 4.7. *Vale* $\lim_{P \to P_0} f(P) = \ell$ *se* $\exists$ *una funzione* $M(\rho) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tale che* $\lim_{\rho \to 0^+} M(\rho) = 0$ *ed* $\exists\ \overline{\rho} \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$|f(x_0 + \rho \cos \vartheta, y_0 + \rho \sin \vartheta) - \ell| < M(\rho),\ \forall\ \rho < \overline{\rho}.$$

ESEMPIO 4.8. Data $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$, si ha $f(\rho \cos \vartheta, \sin \vartheta) = \rho \cos^2 \vartheta \sin \vartheta$ e, poiché $\forall\, \rho, \vartheta$ si ha $|\rho \cos^2 \vartheta \sin \vartheta - 0| < \rho$, risulta $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$ (in questo caso si ha $M(\rho) = \rho$).

4.1.1. *Limiti iterati.*

OSSERVAZIONE 4.9. Accanto alla nozione di limite $\lim_{P \to P_0} f(P)$ $\exists$ la nozione di *limiti iterati,* che illustriamo solo per $n = 2$.

I limiti iterati di una funzione $f(x,y)$ in un punto $x_0 \in D(f)$ sono

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x,y) \text{ e } \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y)$$

da non confondere con $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y)$, che può $\nexists$ mentre gli altri due possono $\exists$ ed essere $=$ o $\neq$ fra loro.

ESEMPIO 4.10. Calcoliamo, come esempio, i limiti iterati in $(0,0)$ delle funzioni:

(1) Se $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x,y) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$,
$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x,y) = \lim_{y \to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$;
(2) Se $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x,y) = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x^2} = 0$,
$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x,y) = \lim_{y \to 0} \frac{0}{y^2} = 0$.

4.1.2. *Limiti all'infinito.*

OSSERVAZIONE 4.11. Se $n = 1, \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ è stato esteso mediante 2 *punti all'infinito* $-\infty$ *e* $+\infty$, questo perché $\mathbb{R}$ è ben ordinato, per contro, siccome se $n > 1, \mathbb{R}^n$ non può essere ordinato totalmente, $\mathbb{R}^n$ è esteso con un unico *punto all'infinito, denotato* ∞.

DEFINIZIONE 4.12. (1) *In* $\mathbb{R}^n$ *si dice che* $P \to \infty$ *se vale* $\|P\| \to +\infty$.
(2) *Dicesi* intorno di ∞ *un insieme* $B_r(\infty) := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{x}\| > r, r \in \mathbb{R}_+\}$.
(3) *Una funzione* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, *definita su un* $A \subset \mathbb{R}^n, n > 1$, *illimitato,* tende al limite ℓ per $P \to \infty$ *e si scrive*

$$\lim_{P \to \infty} f(P) = \ell,$$

se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ *tale che* $\forall P \in B_\delta(\infty) \cap A$ *risulti* $|f(P) - \ell| < \varepsilon$.

ESERCIZIO 4.13. Provare che:

(1) $\lim_{(x,y) \to \infty} xy = \infty$,
(2) $\lim_{(x,y) \to \infty} \frac{1}{x^2+y^2} = 0$,
(3) $\lim_{(x,y) \to \infty} e^{\frac{1}{x^2+y^2}} = 1$.
(4) Determinare $\lim_{(x,y) \to \infty} - \lg(x^2 + y^2)$.

5. Funzioni composte

DEFINIZIONE 5.1. *Dati* $n, m, s \in \mathbb{N}, A \subset \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R}^m, \underline{F} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *e* $\underline{G} : D \longrightarrow \mathbb{R}^s$, *con* $\underline{F}(A) \subset D \subset \mathbb{R}^m$, *la funzione*

$$\underline{F} \circ \underline{G} : A \longrightarrow \mathbb{R}^s, \text{ definita da } (\underline{F} \circ \underline{G})(P) := \underline{G}(\underline{F}(P)), \ \forall \ P \in A,$$

è detta funzione composta di $\underline{F}$ *e* $\underline{G}$.

ESEMPIO 5.2. (1) Date

$$\begin{aligned} \underline{F} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t, t^2) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \underline{G} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto (x^2 + y^2), \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} \underline{F} \circ \underline{G} \quad : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & t \mapsto t^2 + t^4. \end{aligned}$$

(2) Dati

$$I = [0,1], \ \begin{aligned} \underline{F} : I \times I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s,t) &\mapsto (s, s+t, t^2) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \underline{G} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\mapsto (x + y^2 + \sin z), \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} \underline{F} \circ \underline{G} \quad : \quad & I \times I \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (s,t) \mapsto s + (s+t)^2 + \sin t^2. \end{aligned}$$

PROPOSIZIONE 5.3. (1) *La composizione di funzioni continue è una funzione continua.*
(2) *Data una funzione (scalare) continua di una variabile,* $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}$, *la funzione (scalare) di n variabili, definita da*

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & I \times \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x_1, y_2, \ldots, y_n) \mapsto \varphi(x_1), \end{aligned}$$

è continua in $I \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Dim. Basta applicare le definizioni.

COROLLARIO 5.4. *Ogni funzione (scalare) di piú variabili, costruita 'montando' insieme funzioni continue di una variabile, è continua.*

ESEMPIO 5.5. Date:

(1) $f(x,y) = \sin x \cos y$, si pone

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin x \\ \psi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto \cos y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \sin x \\ f_2 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \cos y, \end{aligned}$$

e risulta $\quad f(x,y) = f_1(x,y) \cdot f_2(x,y).$

(2) $f(x,y) = x^2 + xy^3$, si pone

$$\begin{array}{rlrl} \varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & & f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} & \\ x \mapsto x^2 & & (x,y) \mapsto x^2 & \\ \psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & & f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} & \\ x \mapsto x & & (x,y) \mapsto x & \\ \chi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & & f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} & \\ y \mapsto y^3 & & (x,y) \mapsto y^3, & \end{array}$$

e risulta $\quad f(x,y) = f_1(x,y) + f_2(x,y) \cdot f_3(x,y)$.

6. Funzioni (scalari) continue

DEFINIZIONE 6.1. *Una funzione* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$ *è* continua in un punto $P_0 \in A$ *se*

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0),$$

f *è* continua in A *se è tale in ogni punto di* A[24].

PROPOSIZIONE 6.2. *Date* $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$ *continue in* $P_0 \in A$*, sono tali pure* $f \pm g$ *e* $f \cdot g$*; inoltre, se* $g(P_0) \neq 0$*, anche* $\frac{f}{g}$ *è continua in* $P_0 \in A$.

ESERCIZIO 6.3. Dire se sono continue nel loro campo di definizione le funzioni:

(1) $f(x,y) = x^2 + y^2$,
(2) $f(x,y) = \lg \frac{x}{y},$,
(3) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$.

Enunciamo, senza dimostrazione, alcuni importanti teoremi sulle funzioni (scalari) continue di piú variabili.

TEOREMA 6.4 (Teorema di Weierstrass(1815-97)). *Una funzione continua* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$*, definita su* $A \subset \mathbb{R}^n$*, chiuso e limitato, possiede in* A *massimo e minimo.*

ESERCIZIO 6.5. Provare che per le seguenti funzioni vale il teorema di Weierstrass.

(1) $f(x,y) = x^2 + \sin(x+y), A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |y| \leq |x| \leq 2\}$,
(2) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, A = D(f)$.

Ricordiamo la formulazione del teorema dei valori intermedi, per funzioni di una variabile definite su un intervallo.

TEOREMA 6.6 (Teorema dei valori intermedi). *Una funzione continua, definita su un intervallo chiuso* $I = [a,b], a, b \in \mathbb{R}$*,* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *assume tutti i valori compresi fra* $f(a)$ *e* $f(b)$[25].

Per poter enunciare l'analogo risultato per funzioni (scalari) continue di piú variabili, occorre introdurre un'altra nozione topologica.

DEFINIZIONE 6.7. *Un insieme* $A \subset \mathbb{R}^n$ *è* connesso per archi *se,* $\forall\, P \neq Q \in A, \exists\, a, b \in \mathbb{R}$ *e un* arco (di curva) $\underline{\gamma} : [a,b] \longrightarrow A$ *che li congiunge*[26] *ed è interamente contenuto in* A.

---

[24]Cfr. Def. 2.4.
[25]Altrimenti detto: $f(I)$ è un intervallo.
[26]Ossia $\underline{\gamma}(a) = P, \underline{\gamma}(b) = Q$.

Teorema 6.8 (Teorema dei valori intermedi). *Una funzione continua* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, *definita su* $D \subset \mathbb{R}^n$ *connesso per archi, per ogni coppia di punti* $P \neq Q \in D$, *assume tutti i valori compresi fra* $f(P)$ *e* $f(Q)$.

7. Derivate parziali e gradiente

Definizione 7.1. *Siano* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, \mathbb{R}^2 \supset A \ni P_0 = (x_0, y_0)$ *un punto interno,*
fissando y_0 *e variando* x *otteniamo* $g(x) := f(x, y_0)$[27] $: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
fissando x_0 *e variando* y *otteniamo* $\tilde{g}(y) := f(x_0, y)$[28] $: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}, \tag{42}$$

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}, \tag{43}$$

se $\exists$, *(42) è detta* derivata parziale di f rispetto a x in P_0 *ed è denotata*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \ \ o \ \ f_x(x_0, y_0),$$

se $\exists$, *(43) è detta* derivata parziale di f rispetto a y in P_0 *ed è denotata*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \ \ o \ \ f_y(x_0, y_0).$$

Osservazione 7.2 (Interpretazione geometrica).
(1) $f_x(x_0, y_0)$ è il coefficiente angolare della retta r_1 tangente alla curva $\Gamma_f \cap \{y = y_0\}$,
(2) $f_y(x_0, y_0)$ è il coefficiente angolare della retta r_2 tangente alla curva $\Gamma_f \cap \{x = x_0\}$.

Esercizio 7.3.
(1) Verificare che le equazioni delle rette r_1, r_2 in Oss. 7.2., sono:
$r_1 : \begin{cases} z - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases}, r_2 : \begin{cases} z - f(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ x = x_0 \end{cases}$
(2) Data $f(x, y) = e^{xy}$, scrivere l'equazione della retta tangente alla curva $\Gamma_f \cap \{x = 2\}$ nel punto $f(2, 1)$.

Definizione 7.4. *Piú in generale, se* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$ *e* $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in A$ *è un punto interno,* le derivate parziali di f in P_0 *sono:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial_{x_1}}(P_0) &:= \lim_{x_1 \to x_1^0} \frac{f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)}{x_1 - x_1^0}, \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial_{x_n}}(P_0) &:= \lim_{x_n \to x_n^0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)}{x_n - x_n^0}. \end{aligned}$$

Osservazione 7.5.
(1) Nel caso $n > 2$ non c'è interpretazione geometrica.
(2) La derivata parziale rispetto a una variabile si calcola con le solite regole di derivazione, considerando le altre variabili come costanti.

[27] Funzione della sola x!
[28] Funzione della sola y!

ESEMPIO 7.6. (1) Se $f(x,y) = x^2 + y$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 = D(f)$, si ha

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2 + y_0 - (x_0^2 + y_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 + y_0 - x_0^2 - y_0}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x_0+h)}{h} = 2x_0 \qquad \therefore\ \frac{\partial f}{\partial x} = 2x,\end{aligned}$$

similmente si prova che $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$;

(2) se $f(x,y) = \sin(x^2+y^4)$, si ha $f_x(x,y) = 2x\cos(x^2+y^4), f_y(x,y) = 4y^3\cos(x^2+y^4)$;

(3) $f(x,y,z) = xy^2z^3$, $f_x(x,y,z) = y^2z^3, f_y(x,y,z) = 2xyz^3, f_z(x,y,z) = 3xy^2z^2$.

DEFINIZIONE 7.7. *Una* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$ *è* derivabile in un punto interno $P_0 \in A$ *se ha tutte le derivate parziali in* P_0.

DEFINIZIONE 7.8. Il gradiente di $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$, *derivabile in* A *è il vettore:*

$$\nabla(f) := (f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}).$$

ESEMPIO 7.9. Se $f(x,y,z) = e^{-x^2+3yz^2}$, si ha

$$\nabla(f) = (-2xe^{-x^2+3yz^2}, 3z^2e^{-x^2+3yz^2}, 6yze^{-x^2+3yz^2}).$$

OSSERVAZIONE 7.10. Le derivate parziali esprimono la rapidità di variazione della funzione nelle direzioni degli assi. $\exists$ una derivata che esprime la rapidità di variazione in ogni direzione data.

8. Derivata direzionale

Supporremo per semplicità che $n = 2$.
Scegliamo nel piano $z = 0$ una retta r per $P_0 = (x_0, y_0, 0)$ con versore $\omega = (u, v, 0)$[29].
La funzione $\varphi(t) = f(x_0 + ut, y_0 + vt)$ è la restrizione di f alla retta r.

DEFINIZIONE 8.1. *La* derivata direzionale di f, in (x_0, y_0), nella direzione $\omega = (u, v)$ *è*

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+ut, y_0+vt) - f(x_0,y_0)}{t},$$

se $\exists$ *finito, ed è denotata* $\frac{\partial f}{\partial \omega}(x_0, y_0)$ *o* $\frac{\partial f}{\partial \omega}(P_0)$.

OSSERVAZIONE 8.2. (1) In particolare:
se $\omega = (0,1)$, $\frac{\partial f}{\partial \omega}(P_0) = f_y(P_0)$,
se $\omega = (1,0)$, $\frac{\partial f}{\partial \omega}(P_0) = f_x(P_0)$,
la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \omega}(x_0, y_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente a $\Gamma_f \cap \pi$, con $\pi : v(x - x_0) - u(y - y_0) = 0$.

---

[29]Ricordiamo che nello spazio $r : \begin{cases} x = x_0 + ut \\ y = y_0 + vt \\ z = 0 \end{cases}$, mentre nel piano $\begin{cases} x = x_0 + ut \\ y = y_0 + vt \end{cases}$.

ESEMPIO 8.3. Se $f(x,y)=e^{-xy}$, $P_0=(1,2)$ e $\omega=(u,v)$, $\frac{\partial f}{\partial\omega}(P_0)$ è

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{e^{-(1+ut)(2+vt)}-e^{-2}}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{e^{-(2+vt+2ut+uvt^2)}-e^{-2}}{t}=\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{e^{-2}\{e^{-t[((2u+v)+uvt]}-1\}}{t}=\\ &= -(2u+v)e^{-2}\text{ (applicando la regola di de l'Hôpital(1661-1704)).}\end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 8.4. Mentre per funzioni (scalari) di una sola variabile $f:A\longrightarrow\mathbb{R}, A\subset\mathbb{R}$ se f è derivabile f è anche continua, se $A\subset\mathbb{R}^n, n\geq 2$ l'esistenza delle derivate direzionali[30] non implica la continuità.

ESEMPIO 8.5. Se $f(x,y)=\begin{cases}\left(\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right)^2 & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ $\forall\,\omega=(u,v)$, si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial\omega}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left\{\left[\frac{u^2t^2vt}{t^2(u^4t^2+v^2)}\right]^2-0\right\}=\frac{t^6}{t\cdot t^4}\left[\frac{u^4v^2}{u^4t^2+v^2}\right]=0,$$

mentre per $n\to+\infty$ si ha $(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2})\to(0,0)$ e

$$\lim_{n\to+\infty}f(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2})=\left(\frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}}\right)^2=\frac{1}{4}\neq 0.$$

9. Differenziabilità

Per una funzione (scalare) di una sola variabile $f:A\longrightarrow\mathbb{R}, A\subset\mathbb{R}$ se $x_0\in A$ è un punto interno ed f è derivabile in x_0 si ha $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ ossia

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\omega(x_0)(x-x_0),\text{con }\omega\text{ infinitesimo.}$$

Per piú variabili occorre introdurre un'altra definizione.

DEFINIZIONE 9.1. *Una funzione $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$, definita su $A\subset\mathbb{R}^2$, derivabile in $P_0=(x_0,y_0)\in A$, è* differenziabile *in P_0 se*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0,\tag{44}$$

o anche, posto $P=(x,y)$

$$\lim_{P\to P_0}\frac{f(P)-f(P_0)-\nabla f(P_0)\cdot(P-P_0)}{\|P-P_0\|}=0,\tag{45}$$

PROPOSIZIONE 9.2. *Una funzione $f(x,y)$ differenziabile ha derivata direzionale $\forall$ versore $\omega=(u,v)$ e vale*

$$\frac{\partial f}{\partial\omega}(P_0)=\nabla f(P_0)\cdot\omega.$$

[30]In particolare, delle derivate parziali.

Dim. Per ogni $P \in A$, sia $\omega = (u, v)$, con $u^2 + v^2 = 1$, il versore direzionale della retta r congiungente P_0 a P $\therefore$ $P - P_0 = t\omega$[31] per qualche $t \in \mathbb{R}$, si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + ut, y_0 + vt) - f(x_0, y_0)}{t} = f_x(x_0, y_0)u + f_y(x_0, y_0)v = \nabla f(P_0) \cdot \omega. \tag{46}$$

Esempio 9.3. (1) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ non è differenziabile in $(0, 0,)$ infatti, $\forall\, \omega = (u, v)$ si ha :

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{u^2 t^2 vt}{t^2(u^2 + v^2)} = \frac{t^3 u^2 v}{t^3(u^2 + v^2)} = \frac{u^2 v}{u^2 + v^2} = \begin{cases} 0 & \text{in}\,(0, v) \\ \neq 0 & \text{se } uv \neq 0 \\ 0 & \text{in}\,(u, 0) \end{cases} .$$

(2) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ è differenziabile in $(0, 0)$, si tratta di verificare se vale (44) ossia di calcolare $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ o, passando a coordinate polari di centro l'origine, $\lim\limits_{\rho\to 0} \frac{\rho^4 \cos^2\theta \sin^2\theta}{\rho^3}$, poiché $\lim\limits_{\rho\to 0} |\rho \cos^2\theta \sin^2\theta| \leq \lim\limits_{\rho\to 0} \rho = 0$ possiamo concludere che vale (44).

Osservazione 9.4. (1) L'equazione

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{47}$$

è l'equazione del piano $\pi \ni P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ individuato dalle rette

$r_1 : \begin{cases} z - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases}$, $r_2 : \begin{cases} z - f(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ x = x_0 \end{cases}$

Si verifica che se f è differenziabile in $P_0 = (x_0, y_0), \pi$ contiene anche tutte le rette tangenti alle curve che si ottengono intersecando Γ_f con ogni piano del fascio di asse la retta $\parallel$ all'asse z passante per P_0, per questo motivo π è detto *piano tangente a* Γ_f *in* $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

(2) Posto

$$\sigma_{P_0}(P) := \frac{f(P) - f(P_0) - \nabla f(P_0) \cdot (P - P_0)}{\|P - P_0\|},$$

se vale (45) risulta $\lim\limits_{P\to P_0} \sigma_{P_0}(P) = 0$, ossia

$$f(P) = \underbrace{f(P_0) + \nabla f(P_0) \cdot (P - P_0)}_{\text{parte lineare}} + \underbrace{\sigma_{P_0}(P)}_{\text{infinitesimo}} \|P - P_0\|. \tag{48}$$

Teorema 9.5. *Una funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, definita su $A \subset \mathbb{R}^2$, differenziabile è continua.*

Dim. Da $f(P) - f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot (P - P_0) + \underbrace{\sigma_{P_0}(P)}_{\text{infinitesimo}} \|P - P_0\|$, passando ai valori assoluti e tenendo conto della diseguaglianza di Cauchy-Schwartz (vedi Prop. 3.1.(3)), si ha

$$|f(P) - f(P_0)| \leq |\sigma_{P_0}(P)| \|P - P_0\| + \|\nabla f(P_0)\| \|P - P_0\|$$

[31]Ossia $P - P_0 = (x - x_0, y - y_0) = (ut, vt)$.

e poiché il 2° membro tende a zero per $P \to P_0$, si ha la tesi.

Osservazione 9.6. Siano $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, definita su $A \subset \mathbb{R}^2, P_0 \in A$ punto interno, f differenziabile in P_0, per ogni versore $\omega = (u, v)$, la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \omega}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \omega$ (vedi Prop. 9.2), diventa (per Teor. 3.3.5)

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(P_0) = \|\nabla f(P_0)\| \cos\theta, \quad \theta \text{ angolo formato dal vettore } \nabla f(P_0) \text{ col versore } \omega,$$

la derivata direzionale è massima nella direzione del gradiente e nulla nella direzione ortogonale a esso.

Vale inoltre il seguente teorema (che noi non dimostriamo).

Teorema 9.7. *Se $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, definita su $A \subset \mathbb{R}^2$, con $P_0 \in A$ punto interno, ha derivate parziali (definite!) continue in P_0 è ivi differenziabile.*

Esempio 9.8.
(1) La funzione $f(x, y) = e^{xy}$ è differenziabile su tutto $D(f) = \mathbb{R}^2$, si ha infatti:
$f_x(x, y) = ye^{xy}, f_y(x, y) = xe^{xy} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Le equazioni dei piani tangenti a Γ_f in $(0, 0, 1)$ e $(1, 2, e^2)$ sono rispettivamente:
$z - 1 = 0(x - 0) + 0(y - 0)$ e $z - e^2 = 2e^2(x - 1) - e^2(y - 2)$.
(2) La funzione $f(x, y) = \frac{x+y^3}{x^2-y^2}$ è differenziabile su tutto $D(f)$[32], calcoliamo il piano tangente a Γ_f in $(0, 1, -1)$.
Siccome $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = -1, \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = -1$, il piano cercato è $z + 1 = -1(x - 0) - 1(y - 1) \;\therefore\; x + y + z = 0$.

Osservazione 9.9. Siano $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, definita su $A \subset \mathbb{R}^2, P_0 \in A$ punto interno, se $\exists$ il piano tangente a Γ_f in $f(P_0)$ un suo v.d. è $(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial x}(P_0), -1)$.

Proposizione 9.10. *Se $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}^2$ è differenziabile su A le curve di livello sono $\perp$ a ∇f.*

Dim. Scriviamo $z = f(x, y)$ e $\forall\, c \in \mathbb{R}$ consideriamo $\gamma_c := \Gamma_f \cap \{z = c\}$, denotiamo poi $\widetilde{\gamma_c}$ la proiezione di γ_c sul piano $z = 0$[33]. Se $P_0 = (x_0, y_0) \in \widetilde{\gamma_c}$ e $\nabla f(P_0) = (\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0))$, la retta tangente a $\widetilde{\gamma_c}$ in P_0 è

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 0 \;\therefore\; x\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) + y\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) - c = 0^{34}.$$

Esempio 9.11. Nei casi seguenti si verifica facilmente che le curve di livello di Γ_f sono $\perp$ a ∇f.
(1) Se $f(x, y) = x^2 + y^2$ si ha $\nabla f = (2x, 2y), \widetilde{\gamma_c} : x^2 + y^2 - c = 0$ e
$(x - x_0)2x_0 + (y - y_0)2y_0 = 0 \;\therefore\; xx_0 + yy_0 - c = 0$;
(2) se $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ si ha $\widetilde{\gamma_c} : 9 - c^2 - x^2 - y^2 = 0$ e
$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{9-x^2-y^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$, se poniamo $c = \sqrt{5}$ otteniamo $\widetilde{\gamma_{\sqrt{5}}} : 4 - x^2 - y^2 = 0$, siano $P_0 = (2, 0), P_1 = (0, 2), P_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$, si ha rispettivamente $\nabla f(P_0) = (\frac{-2}{\sqrt{5}}, 0), \nabla f(P_1) = (0, \frac{-2}{\sqrt{5}}), \nabla f(P_2) = (\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{5}})$ e quindi

[32] Da determinare e da verificare la differenziabilità di f.

[33] Nello spazio γ_c è individuata dalle equazioni $\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = c \end{cases}$, nel piano xy l'equazione di $\widetilde{\gamma_c} \subset A$ è $f(x, y) = c$.

[34] Poiché se $r : ax + by + c = 0, (a, b) \perp r$, la tesi segue immediatamente.

$r_0 : -(x-2)\frac{2}{\sqrt{5}} = 0, r_1 : -(y-2)\frac{2}{\sqrt{5}} = 0, r_2 : -(x-2)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} - (y-2)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = 0;$

(3) infine, se $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$ si ha $\widetilde{\gamma}_c : \frac{x^2}{\lg c} - \frac{y^2}{\lg c} = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2-y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{x^2-y^2}$, ponendo $c = e$ otteniamo $\widetilde{\gamma}_e : x^2 - y^2 = 1$, se $P = (1,0)$ si ha $\nabla f(P) = (2e, 0)$ e quindi $r : (x-1)2e = 0$.

Osservazione 9.12. Data $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, definita su $A \subset \mathbb{R}^2, \forall\,(x,y) \in A$, si ponga $z = f(x,y)$, se f è differenziabile in A, per (44),

$$z - z_0 = (x - x_0) f_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f_y(x_0, y_0), \tag{49}$$

abbiamo visto in Teor.9.5 che se $(x,y) \to (x_0, y_0)$ risulta $z \to z_0$, pertanto, ponendo

$x - x_0 = dx$,
$y - y_0 = dy$,
$z - z_0 = dz$

(49) diventa

$$dz = dx f_x(x,y) + dy f_y(x,y)$$

ed è definita[35]

$$\begin{aligned}(df)_{(x,y)} \quad : \quad & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (dx, dy) \mapsto dz = dx f_x(x,y) + dy f_y(x,y)\end{aligned}$$

10. Derivazione delle funzioni composte

Per funzioni (scalari) di una sola variabile $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, derivabili rispettivamente in $t_0 \in \mathbb{R}$ e in $f(t_0) \in \mathbb{R}$, è derivabile in t_0 anche la funzione composta

$$\begin{aligned}h := g \circ f \quad : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & t \mapsto g(f(t))\end{aligned}$$

e vale

$$h'(t_0) = g'(f(t_0)) f'(t_0) \qquad (\textit{regola della catena}).$$

Per funzioni (scalari) di piú variabili occorre distinguere due casi:

funzioni interne di una variabile
funzioni interne di piú variabili.

Proposizione 10.1 (Derivazione di funzioni composte con funzioni interne di una variabile). *Date* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^2, \varphi, \psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, *definite in un intervallo aperto* I *di* $\mathbb{R}$ *e tali che* $(\varphi(t), \psi(t)) \in A$, $\forall\, t \in I$, *siano*

[35]n.b. Nel caso di funzioni di una sola variabile si ha

$$\begin{aligned}f \quad : \quad & I \longrightarrow \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R} \\ & x \mapsto y = f(x),\end{aligned}$$

se f è derivabile è definita

$$\begin{aligned}df \quad : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & dx \mapsto dy = f'(x) dx.\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rlcrl} \underline{F}: I \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2 & & e & & \Phi : I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \underline{F}(t) := (\varphi(t), \psi(t)) & & & & t \mapsto \Phi(t) := f(\varphi(t), \psi(t)) = f(\underline{F}(t)), \end{array}$$

se f è differenziabile nel punto $(\varphi(t_0), \psi(t_0)) \in A$ e φ, ψ sono derivabili in t_0, Φ è derivabile in t_0 e vale

$$\Phi'(t_0) = f_x(\varphi(t_0), \psi(t_0))\varphi'(t_0) + f_y(\varphi(t_0), \psi(t_0))\psi'(t_0) = \nabla f(\underline{F}(t_0)) \cdot \underline{F}'(t_0).$$

Osservazione 10.2.
(1) Se $\underline{F}(t)$ dà luogo a una curva di livello per f, ossia $\Phi(t) = f(\underline{F}(t)) = c$, $\forall\, t \in I$, la derivata di $\Phi(t)$ è nulla.
(2) Il gradiente ∇f è $\perp$ a ogni curva di livello, infatti:
$$0 = \Phi(t) = [f(\underline{F}(t))]' = \nabla f(\underline{F}(t)) \cdot \underline{F}'(t)\, \forall\, t \in I.$$
(3) La derivata direzionale di f è nulla lungo ogni curva di livello ed è massima lungo la direzione normale, infatti la derivata direzionale di $f(\underline{F}(t))$ lungo una direzione ω qualsiasi è $\frac{\partial}{\partial \omega} f(\underline{F}(t)) = \nabla f(\underline{F}(t)) \cdot \omega$, massima se i vettori sono $\|$.

Definizione 10.3.
(1) *Una funzione vettoriale $\underline{F} = (f_1, \ldots, f_m) : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$, definita su $A \subset \mathbb{R}^n$, con $f_i : A \longrightarrow \mathbb{R}, 1 \le i \le m$ componenti, è* differenziabile *in un punto interno $P_0 \in A$ se lo sono le sue componenti.*
(2) *La* matrice jacobiana[36] *di $\underline{F}$ in P_0 è la matrice*
$$J_{P_0}(\underline{F}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(P_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(P_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(P_0) & \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(P_0) & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P_0) & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(P_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(P_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(P_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P_0) \end{pmatrix}.$$

Osservazione 10.4. La k-ima riga $1 \le k \le m$ di $J_{P_0}(\underline{F})$ è $\nabla f_k(P_0)$; se $m = 1$ $J_{P_0}(\underline{F})$ è un gradiente; se $n = 1$ $J_{P_0}(\underline{F})$ è la derivata di una funzione vettoriale di una variabile.

Proposizione 10.5 (Derivazione di funzioni composte con funzioni interne di piú variabili). *Date $\underline{F} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m, A \subset \mathbb{R}^n$ e $g : B \longrightarrow \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R}^m, \underline{F}(A) \subset B$ se $\underline{F}$ è differenziabile in $P_0 \in A$, e g è differenziabile in $\underline{F}(P_0)$, la funzione composta $h = g \circ \underline{F} : A \longrightarrow \mathbb{R}$, definita da $h(\underline{x}) := g(\underline{F}(\underline{x})), \underline{x} \in A$, è differenziabile in P_0 e si ha*

$$J_{P_0}(h) = J_{\underline{F}(P_0)}(g) \cdot J_{P_0}(\underline{F}).$$

Osservazione 10.6. Siccome $J_{P_0}(h)$ e $J_{\underline{F}(P_0)}(g)$ sono gradienti, si scrive anche
$$\nabla h(P_0) = \nabla g(\underline{F}(P_0)) \cdot J_{P_0}(\underline{F}).$$

Esempio 10.7.
(1) Siano
$$\begin{array}{rlcrl} g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} & & \text{e} & & \underline{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto z = g(x, y) & & & & P = (s, t) \mapsto (x(s, t), y(s, t)) = \underline{F}(P), \end{array}$$
$$J_{(s,t)}(\underline{F}) = \begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{pmatrix},$$
$$\nabla g = (g_x, g_y) \text{ e } \nabla h = (g_x, g_y) \begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_x x_s + g_y y_s \\ g_x x_t + g_y y_t \end{pmatrix}.$$

[36] Dal nome del matematico prussiano C.G. Jacobi(1804-51)

(2) Siano $g(x,y) = 3x^2 + y$, $\underline{F}(s,t) = (st, 2t + s^2)$ si ha:
$g_x = 6x, g_y = 1$,
$x(s,t) = st$, $y(s,t) = 2t + s^2$, $x_s = t, x_t = s, y_s = 2s, y_t = 2$ e quindi
$J_{(s,t)}(\underline{F}) = \begin{pmatrix} t & s \\ 2s & 2 \end{pmatrix}, \nabla h = (6st \cdot t + 1 \cdot 2s, 6st \cdot s + 1 \cdot 2) = (6st^2 + 2s, 6s^2t + 2)$.

11. Derivate parziali di ordine superiore

Definizione 11.1. *Se $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$ è tale che $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \exists \ \forall\ 1 \leq i \leq n$, ed è derivabile rispetto a $x_k, 1 \leq k \leq n$, la* derivata seconda di f rispetto a x_i e x_k *è*

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial f}{\partial x_i})$$

denotata:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} & o \quad f_{x_i x_k} \quad se \quad i \neq k \\ \frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2} & o \quad f_{x_i x_i} \quad se \quad i = k. \end{cases}$$

Esempio 11.2. Le derivate parziali seconde di $f(x,y) = e^{x^2+y^2+2x}$ sono le derivate parziali delle derivate parziali prime $f_x = (2x+2)e^{x^2+y^2+2x}$, $f_y = 2ye^{x^2+y^2+2x}$, ossia:
$f_{xx} = 2e^{x^2+y^2+2x} + 4(x+1)^2 e^{x^2+y^2+2x} = 2e^{x^2+y^2+2x}(2x^2 + 4x + 3)$,
$f_{xy} = 4(x+1)ye^{x^2+y^2+2x} = f_{yx}$,
$f_{yy} = 2e^{x^2+y^2+2x} + 4y^2 e^{x^2+y^2+2x} = 2e^{x^2+y^2+2x}(1 + 2y^2)$.

Notazione 11.3. Dati $A \subset \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, C^r(A)$ denota l'insieme delle funzioni continue con derivate parziali continue e derivabili fino all'ordine r.

Teorema 11.4 (Teorema di Schwartz). *Se $f \in C^2(A)$ risulta $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}, \forall\, i, k$.*

12. Formula di Taylor (di ordine 2)

Per una funzione (scalare) di una sola variabile $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}, f \in C^k(A)$ se $x_0 \in A$ è un punto interno il *polinomio di Taylor di ordine k centrato in x_0* è:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \mathcal{O}(|x - x_0|^k), \tag{50}$$

o anche, ponendo $h = x - x_0$,

$$f(x_0 + h) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} h^j + \mathcal{O}(h^k).$$

Per funzioni (scalari) di piú variabili $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$ differenziabili in $A, \forall\, P_0 \in A$, l'espressione (48)

$$f(P) = \underbrace{f(P_0) + \nabla f(P_0) \cdot (P - P_0)}_{\text{parte lineare}} + \underbrace{\sigma_{P_0}(P)}_{\text{infinitesimo}} \|P - P_0\|$$

è detta *Formula di Taylor di ordine* 1 *centrata in* P_0 e, posto $\underline{H} = P - P_0$, diventa

$$f(P_0+\underline{H}) = \underbrace{f(P_0)+\nabla f(P_0)\cdot \underline{H}}_{\text{parte lineare}} + \underbrace{\sigma_{P_0}(P)}_{\text{infinitesimo}}\ \|\underline{H}\|.$$

Teorema 12.1. *Siano $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n, P_0 \in A$ punto interno, $f \in C^k(B_r(P_0)), k \geq 2$ per ogni $\underline{H} = (h_1, \dots, h_n)$ tale che $P_0 + \underline{H} \in B_r(P_0) \cap A$, si ha:*

$$f(P_0+\underline{H}) = \underbrace{f(P_0)+\nabla f(P_0)\cdot \underline{H} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P_0)h_ih_j}_{\textit{polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in} P_0} + \underbrace{\omega_{P_0}(\underline{H})}_{\textit{infinitesimo}}\ \|\underline{H}\|^2. \tag{51}$$

Notazione 12.2. Il polinomio di Taylor di ordine 2 di $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$ centrato in P_0 è talvolta denotato $T^2_{f,P_0}(\underline{H})$.

Vogliamo trovare una scrittura piú concisa per il complesso dei termini di 2° di $T^2_{f,P_0}(\underline{H})$.

Definizione 12.3. *Se $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$ è tale che $f \in C^2(\mathring{A})$ la* matrice Hessiana di f in P_0 interno ad A *è*

$$\mathcal{H}_f(P_0) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(P_0) & f_{x_1x_1}(P_0) & \dots & f_{x_1x_n}(P_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(P_0) & f_{x_nx_2}(P_0) & \dots & f_{x_nx_n}(P_0) \end{pmatrix},$$

$$\textit{se } n=2,\ \mathcal{H}_f(P_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{xy}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{pmatrix}.$$

Il terzo addendo di (51) si scrive allora

$$\frac{1}{2}(\mathcal{H}_f(P_0)\underline{H})\cdot\underline{H}, \quad \text{con } \underline{H} = (h_1, h_2),$$

e quindi

$$f(P_0+\underline{H}) = f(P_0)+\nabla f(P_0)\cdot \underline{H} + \frac{1}{2}(\mathcal{H}_f(P_0)\underline{H})\cdot\underline{H} + \omega_{P_0}(\underline{H})\|\underline{H}\|^2. \tag{52}$$

Esempio 12.4. Per determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 in $O = (0, 0)$ per $f(x, y) = e^{x^2+y}$, si calcolano:

$f_x = 2xe^{x^2+y}, f_y = e^{x^2+y}$, $\nabla f(0,0) = (0,1),^t \underline{H} = (x,y)$,

$f_{xx} = e^{x^2+y}(2+4x^2), f_{xy} = 2xe^{x^2+y} = f_{yx}, f_{yy} = e^{x^2+y}$ e $\mathcal{H}_f(O) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$$\text{ottenendo finalmente } T^2_{f,O}(\underline{H}) = 1 + (0,1)\cdot(x,y) + \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]\cdot(x,y) + \omega =$$

$$= 1 + y + \frac{1}{2}(2x,y)\cdot(x,y) + \omega = 1 + y + x^2 + \frac{y^2}{2} + \omega.$$

13. Estremi relativi

DEFINIZIONE 13.1. *Una funzione* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$ *ha un* massimo relativo in $P_0 \in A$ *se* $\exists$ *un intorno* $B_r(P_0)$ *di* P_0 *tale che*

$$f(P) \leq f(P_0), \forall\ P \in B_r(P_0) \cap A.$$

Analogamente si definisce la nozione di punto di minimo relativo[37].

Ricordiamo che per una funzione (scalare) di una sola variabile $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}, f$ derivabile in $x_0 \in A$, c.n.s. di estremo relativo in x_0 è $f'(x_0) = 0$. Ovviamente, nel caso di funzioni di piú variabili la situazione è piú complicata.

DEFINIZIONE 13.2.
(1) *Un* punto critico *o* stazionario *per una funzione* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n, n > 1$, *è un punto* $P_0 \in \overset{\circ}{A}$ *tale che* $f \in C^1(B_r(P_0))$, *per qualche intorno di* P_0, *e* $\nabla f(P_0) = 0$;
(2) *un* punto di sella *per* f *è un punto critico* P_0 *per* f *tale che in ogni suo intorno cadono sia punti* P *con* $f(P) < f(P_0)$ *che punti* Q *con* $f(Q) > f(P_0)$.

LEMMA 13.3 (c.n. di estremo relativo). *Se* P_0 *è un punto di estremo relativo per una funzione* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n, n > 1, f \in C^1(B_r(P_0))$, *risulta* $\nabla f(P_0) = \underline{0}$.

Dim. Supponiamo $n = 2$. Sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto di massimo relativo, la funzione di una sola variabile $g(x) := f(x, y_0), g(x)$ ha in x_0 un punto di massimo relativo, quindi $g'(x_0) = 0$, ma $g'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$.
Analogamente da $h(y) := f(x_0, y)$ si ottiene $f_y(x_0, y_0) = 0$.
Se P_0 è un punto di minimo relativo la dimostrazione è la stessa.

OSSERVAZIONE 13.4. Siano $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n, n \geq 1, f \in C^2(B_r(P_0))$, per qualche intorno di $P_0 \in A$, punto interno.

(1) Se $n = 1$ e $x_0 \in A$ soddisfa $f'(x_0) = 0$, dalla formula di Taylor (50) di ordine 2, si ricava

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \underbrace{\sigma_{x_0}(x)}_{\text{infinitesimo}}\ |x - x_0|^2 \Longrightarrow \\ f(x) - f(x_0) &= \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \underbrace{\sigma_{x_0}(x)}_{\text{infinitesimo}}\ |x - x_0|^2 \end{aligned}$$

ossia, se $f''(x_0) > 0, x_0$ è punto di minimo relativo.

(2) Se $n \geq 2$ e P_0 un punto critico per $f \in C^2(B_r(P_0))$, la formula di Taylor (51), ponendo $P = P_0 + \underline{H}$ e quindi $\underline{H} = P - P_0$, si scrive

$$f(P) - f(P_0) = \frac{1}{2}(\mathcal{H}_f(P_0)(P - P_0)) \cdot (P - P_0) + \underbrace{\omega_{P_0}((P - P_0))}_{\text{infinitesimo}}\|(P - P_0)\|^2,$$

ossia il segno del 2° membro è dato da $(\mathcal{H}_f(P_0)(P - P_0)) \cdot (P - P_0)$.

[37] Complessivamente, i punti di massimo relativo o minimo relativo sono chiamati *punti di estremo relativo*.

DEFINIZIONE 13.5. *Data una matrice simmetrica* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$[38] *la* forma quadratica associata ad A *è la funzione*[39]

$$\begin{aligned} Q_A \quad : \quad & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ & v \mapsto \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_i v_j, \end{aligned}$$

Q_A *è* definita positiva *se* $Q_A(v) > 0$, $\forall\ v \neq \underline{0}$,
Q_A *è* definita negativa *se* $Q_A(v) < 0$, $\forall\ v \neq \underline{0}$,
Q_A *è* indefinita *se* Q_A *assume sia valori che positivi su vettori nonnulli.*

ESEMPIO 13.6. Le forme quadratiche associate alle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sono:

$$Q_A(v) = (Av) \cdot v = \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right] \cdot (v_1, v_2) = (2v_1, v_2) \cdot (v_1, v_2) = 2v_1^2 + v_2^2;$$

$$Q_B(v) = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right] \cdot (v_1, v_2) = (v_2, v_1) \cdot (v_1, v_2) = 2v_1 v_2;$$

$$Q_C(v) = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right] \cdot (v_1, v_2) = (-v_1, -v_2) \cdot (v_1, v_2) = -v_1^2 - v_2^2.$$

OSSERVAZIONE 13.7. I casi elencati in Def.13.15 non esauriscono tutte le possibilità, per esempio

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

non sono né definite né indefinite[40], infatti: $Q_D(v) = v_1^2$, cioè $Q_D(v) = 0$, $\forall\ (0, v_2)$ (ossia anche se $v_2 \neq 0$) e $Q_E(v) = (v_1 + v_2)^2$, cioè $Q_E(v) = 0$, $\forall\ (-v_2, v_2)$ (ossia anche se $(-v_2, v_2) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$).

TEOREMA 13.8 (Test delle derivate seconde per estremi relativi). *Siano* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n, n \geq 1, f \in C^2(B_r(P_0))$, *per qualche intorno di un punto critico* P_0 *per* f, *posto:*

$$Q(v) := \frac{1}{2}(\mathcal{H}_f(P_0)v) \cdot v = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P_0) v_i v_j \quad con\ \ v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n,$$

si ha

(1) *se* Q *è definita positiva,* f *ha un minimo relativo in* P_0,
(2) *se* Q *è definita negativa,* f *ha un massimo relativo in* P_0,
(3) *se* Q *è indefinita,* f *ha un punto di sella in* P_0.

OSSERVAZIONE 13.9. Per Oss.13.7, ci sono casi in cui dal test delle derivate seconde non si ottengono informazioni sulla natura del punto stazionario.

---

[38] i.e. $A = {}^tA, a_{ij} = a_{ji}, \forall 1 \leq i, j \leq n$.

[39] n.b. Vale $Q_A(v) = (Av) \cdot v$, dove Av è il prodotto delle matrici A (quadrata) e v (colonna).

[40] Entrambe sono *semidefinite positive,* ossia vale $Q_\star(v) \geq 0$, $\forall\ v$. La nozione di *semidefinita negatività* è del tutto analoga.

Esempio 13.10. (1) Data $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ si ha
$\nabla f = (-2x, -2y), \mathcal{H}_f(O) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, Q_f = -x^2 - y^2$ è definita positiva e O, unico punto critico, è punto di massimo;

(2) Data $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$ si ha
$\nabla f = (2x, 2y), \mathcal{H}_f(O) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, Q_f = x^2 + y^2$ è definita positiva e O, unico punto critico, è punto di minimo;

(3) Data $f(x,y) = 1 + x^2 - y^2$ si ha
$\nabla f = (2x, -2y), \mathcal{H}_f(O) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, Q_f = x^2 - y^2$ è indefinita e O, unico punto critico, è punto di sella;

(4) Data $f(x,y) = x^2 + y^4$ si ha
$\nabla f = (2x, 4y^3), \mathcal{H}_f(O) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q_f = 2x^2$ è semidefinita positiva, poiché $f(x,y) \geq 0, \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2, O$, unico punto critico, è punto di minimo;

(5) Data $f(x,y) = x^2 - y^3$ si ha
$\nabla f = (2x, -3y^2), \mathcal{H}_f(O) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q_f = 2x^2$ è semidefinita positiva, poiché
$g(x) := f(x,0) = x^2$ ha in 0 l'unico punto di minimo relativo e
$h(y) := f(0,y) = -y^3$ ha in 0 l'unico punto di flesso,
O, unico punto critico di f, è punto di sella.

Teorema 13.11 (Criterio per il segno di una forma quadratica di ordine 2 in base al segno del primo elemento e del determinante della matrice). *Siano $A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica $Q_A(v) = (Av) \cdot v$, la forma quadratica a essa associata e $\Delta = \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, se*

(1) *se $\Delta > 0, a_{11} > 0, Q_A$ è definita positiva,*
(2) *se $\Delta > 0, a_{11} < 0, Q_A$ è definita negativa,*
(3) *se $\Delta < 0, Q_A$ è indefinita.*

Teorema 13.12. *Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^2, f \in C^2(B_r(P_0))$, per qualche intorno $B_r(P_0)$ di un punto critico P_0 per f, posto $\Delta = \det(\mathcal{H}_f(P_0)v) = \begin{vmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{xy}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{vmatrix}$, si ha:*

(1) *se $\Delta > 0, f_{xx} > 0, f$ ha un minimo relativo in P_0,*
(2) *se $\Delta > 0, f_{xx} < 0, f$ ha un massimo relativo in P_0,*
(3) *se $\Delta < 0, f$ ha un punto di sella in P_0.*

n.b. Se $\Delta = 0, f$ può avere in P_0 sia un $\begin{cases} \text{minimo relativo} \\ \text{massimo relativo} \\ \text{punto di sella.} \end{cases}$

Esempio 13.13. (1) Siano:

- $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$ si ha: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, f_{xx}(0) = 2$, quindi O, unico punto critico, è punto di minimo relativo;
- $f(x,y) = 1 - (x^2 + y^2)$ si ha: $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4, f_{xx}(0) = 2$, quindi O, unico punto critico, è punto di massimo relativo;

- $f(x,y) = 1 + x^2 - y^2$ si ha: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$ quindi O, unico punto critico, è punto di sella.

(2) Calcoliamo gli estremi relativi di $f(x,y) = x^3 + y^2 + xy - x$ si ha $\nabla f = (3x^2 + y - 1, 2y + x)$ e risulta $\nabla f = (0,0)$ se $x = -2y, y = \begin{cases} \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{3} \end{cases}$, ossia $A = (\frac{-1}{2}, \frac{1}{4}), B = (\frac{2}{3}, \frac{-1}{3},)$ da cui, essendo $\mathcal{H}_f(P) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, si ottiene $\mathcal{H}_f(A) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, con $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7 < 0$ quindi A punto di sella e $\mathcal{H}_f(B) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, con $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 > 0$ quindi B punto di minimo.

(3) Determinare (se $\exists$) il parallelepipedo rettangolo di massimo volume tra quelli di data superficie totale $2S = 54$, dette $x > 0, y > 0, z > 0$ le dimensioni del parallelepipedo si ha $54 = 2S = 2xy + 2xz + 2yz = 2xy + 2z(x+y)$, da cui $z = \frac{27-xy}{x+y}$, poiché $V = xyz = \frac{27xy - x^2y^2}{x+y}$, dobbiamo determinare gli eventuali punti critici di $f(x,y) = \frac{27xy-x^2y^2}{x+y}$.
Si ha $\nabla f = (\frac{27y^2 - x^2y^2 - 2xy^3}{(x+y)^2}, \frac{27x^2 - x^2y^2 - 2x^3y}{(x+y)^2})$ e $\nabla f = (0,0)$ se
$\begin{cases} y^2(27 - x^2 - 2xy) = 0 \therefore y = 0 \text{ o } 27 - x^2 - 2xy = 0 \\ x^2(27 - y^2 - 2xy) = 0 \therefore x = 0 \text{ o } 27 - y^2 - 2xy = 0 \end{cases}$ essendo per ipotesi $(x,y) \neq (0,0)$
deve essere $x^2 = 27 - 2xy = y^2$, ossia $x^2 - y^2 = 0$ e quindi $x = y > 0$, da cui $x = y = \sqrt{\frac{27}{3}} = 3$ e $z = \frac{27-9}{6} = 3$, cioè, qualunque sia S, il parallelepipedo deve essere il cubo di lato $\sqrt{\frac{S}{3}}$.
Bisogna ancora decidere se si tratta di massimo, minimo o punto di sella[41].
Si ha $f_{xx} = \frac{-2y^2(y^2+27)}{(x+y)^3}, f_{yy} = \frac{-2x^2(x^2+27)}{(x+y)^3}, f_{xy} = \frac{2xy(27-x^2-3xy-y^2)}{(x+y)^3}$, ossia $f_{xx}(3,3) = -3 < 0, f_{yy}(3,3) = -3, f_{xy}(3,3) = \frac{-3}{2}$ e
$\det \mathcal{H}_f(3,3) = \begin{vmatrix} -3 & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & -3 \end{vmatrix} = 9 - \frac{9}{4} > 0$, ossia $(3,3)$ è effettivamente l'unico punto di massimo[42].

Osservazione 13.14. Il test delle derivate seconde non è semplice da applicare per funzioni di piú di 2 variabili (non è semplice determinare il segno di una forma quadratica definita su $\mathbb{R}^n, n \geq 3$). diamo un criterio per stabilire il segno di una forma quadratica qualsiasi, che generalizza quello visto per $n = 2$.

Notazione 13.15. *Date una matrice simmetrica $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ e la forma quadratica associata Q_A, $\forall\ 1 \leq k \leq n$, A_k è la sottomatrice quadrata di ordine k ottenuta da A, eliminandone le ultime $n-k$ righe e colonne,* $D_k := \det(A_k)$.

$$A_1 = (a_{11}),\ A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \ldots A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1k} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix}, \ldots A_n = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

[41] L'intuizione geometria suggerisce che si tratta di massimo!
[42] Sebbene $V > 0$ si può far tendere V a 0 (come?), ossia $\nexists$ minimo.

Teorema 13.16 (Criterio per il segno di una forma quadratica di ordine n). *Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica, la forma quadratica a essa associata $Q_A(v) = (Av) \cdot v$, è definita positiva se e solo se i $D_k, 0 \leq k \leq n$ sono tutti positivi, dove si è posto $D_0 := 1$ e $D_n = \det A$, mentre Q_A è definita negativa se e solo se $(-1)^k D_k > 0, 0 \leq k \leq n$.*

14. Alternativa

Definizione 14.1. *Una* forma di grado m (in n variabili) *è un polinomio omogeneo di grado m (nelle n variabili $X_1, \ldots, X_n$), in particolare, una* forma quadratica (in n variabili) *è un polinomio della forma:*

$$q(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} q_{ij} X_i X_j.$$

Si associa a q la matrice simmetrica

$$A_q = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}) \quad \textit{definita da}: \begin{cases} a_{ii} = q_{ii} \\ a_{ij} = \frac{q_{ij}}{2} \;\; i \neq j \end{cases} .$$

Definizione 14.2. *Gli* autovalori *di una matrice quadrata $A_q = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ sono le radici del* polinomio caratteristico $P_A(T) := \det(A - TI_n)$[43].

Lo studio dei segni degli autovalori della matrice associata a una forma quadratica dà una via alternativa per la classificazione dei punti critici.

Teorema 14.3. *Date una forma quadratica (in n variabili) q e la matrice associata A_q, siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}, 1 \leq r \leq n$ gli autovaloti di A_q, q è:*

1. *definita positiva (negativa)* $\iff \lambda_j > 0$ $(\lambda_j < 0)$, $\forall\ 1 \leq j \leq r$,
2. *semidefinita positiva (negativa)* $\iff \lambda_j \geq 0$ $(\lambda_j \leq 0)$, $\forall\ 1 \leq j \leq r$,
3. *indefinita* $\iff \exists$ *sia autovalori positivi che negativi.*

Esempio 14.4. Data $f(x, y, z) = x^2 + y^4 + y^2 + z^3 - 2xz$ si ha:

$$\nabla f = (2x - 2z, 4y^3 + 2y, 3z^2 - 2x) \text{ e } \nabla f = (0,0,0) \text{ se } \begin{cases} 2x = 2z \\ 2y(2y^2+1) = 0 \\ 3z^2 - 2x = 0, \end{cases} \text{ ossia } \begin{cases} x = z \\ y = 0 \\ z(3z-2) = 0. \end{cases}$$

da cui si ricava che i punti critici sono $(0,0,0)$ e $(\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3})$.
Inoltre, essendo $f_{xx} = 2, f_{yy} = 12y^2 + 2, f_{xy} = 0, f_{xz} = -2, f_{yz} = 0, f_{zz} = 6z$, si ha

$\mathcal{H}_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i cui autovalori sono le radici di

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2-T & 0 & -2 \\ 0 & 2-T & 0 \\ -2 & 0 & -T \end{vmatrix} &= -T(2-T)^2 - 4(2-T) = (2-T)(T^2 - 2T - 4) = \\ &= (2-T)(T - 1 - \sqrt{5})(T - 1 + \sqrt{5}) \end{aligned}$$

ossia $T = 2 > 0, T = 1 + \sqrt{5} > 0, T = 1 - \sqrt{5} < 0$.

[43] Si dimostra che se la matrice A è simmetrica, le radici di $P_A(T)$ sono tutte reali.

$\mathcal{H}_f(\frac{2}{3}, 0, (\frac{2}{3}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, i cui autovalori sono le radici di

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{ccc} 2-T & 0 & -2 \\ 0 & 2-T & 0 \\ -2 & 0 & -T \end{array} \right) &= (4-T)(2-T)^2 - 4(2-T) = (2-T)(T^2 - 6T + 4) = \\ &= (2-T)(T-3-\sqrt{5})(T-3+\sqrt{5}) \end{aligned}$$

ossia $T = 2 > 0, T = 3 + \sqrt{5} > 0, T = 3 - \sqrt{5} > 0$.
Si conclude cosí che $(0, 0, 0)$ è punto di sella e che $(\frac{2}{3}, 0, (\frac{2}{3})$ è punto di minimo.

CHAPTER 6

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

1. Preliminari

In molti problemi scientifici è necessario determinare certe quantità a partire dal loro *tasso di variazione*, per esempio:

determinare la posizione di una particella in movimento, note la sua velocità e accelerazione,

determinare la quantità di materiale di una sostenza radioattiva dopo un certo tempo, conoscendone il tasso di disintegrazione,

rappresentare la propagazione di una vibrazione lungo una retta *(problema delle corde vibranti)*, si deve cioè determinare una *funzione incognita* a partire da un'equazione contenente almeno una delle sue derivate.

DEFINIZIONE 1.1.

1. Un'*equazione differenziale* è una relazione tra *variabili indipendenti* (che possono cioè assumere qualsiasi valore) *variabili dipendenti* (cioè funzioni sconosciute delle variabili indipendenti) e almeno una derivata di variabile dipendente.
2. Con dipendenza da una sola variabile indipendente si hanno *equazioni differenziali ordinarie di ordine n* (se n è il massimo ordine di derivazione presente), con dipendenza da piú variabili si hanno *equazioni differenziali alle derivate parziali*[1].
3. *Risolvere* o *integrare* un'equazione differenziale (o un sistema di equazioni differenziali) consiste nel determinare tutte le funzioni (delle variabili indipendenti) che soddisfano identicamente (ossia qualunque valore assumano le variabili indipendenti) l'equazione o il sistema di equazioni differenziali.

L'esperienza dimostra che è difficile (se non per alcune classi ristrette di equazioni differenziali) ottenere una teoria matematica generale per la risoluzione delle equazioni differenziali.

ESEMPIO 1.2.

1. $y'(x) = y(x)$ equazione differenziale ordinaria del 1° ordine, x variabile indipendente, $y(x)$ variabile dipendente (sconosciuta). Chiaramente $y(x) = e^x$ è una soluzione, infatti $(e^x)' = e^x$, ($\exists$ teorema facile che caratterizza tutte le soluzioni).
2. *Equazione di Laplace*[2] : $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$
   - $f(x, y) = \alpha xy + ax + by + c,\ \forall\ \alpha, a, b, c \in \mathbb{R}$, è soluzione[3];
   - $f(x, y) = e^{ax} \cos ay,\ \forall\ a, \in \mathbb{R}$, è soluzione[4];
   - $f(x, y) = \lg(x^2 + y^2)$ è soluzione[5]

     $\nexists$ teorema facile che caratterizzi tutte le soluzioni dell'equazione di Laplace.

---

[1]Importanti nella modellizzazione dei fenomeni la cui evoluzione dipende da due o piú variabili indipendenti, per esempio il flusso di un liquido in un tubo rigido o elastico, in particolare il flusso del sangue nelle arterie.

[2]Interviene per esempio nella teoria dell'elettricità e dell'elettromagnetismo.

[3]Infatti $f_{xx} = f_{yy} = 0$ e banalmente $f_{zz} = 0$.

[4]Infatti $f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(ae^{ax} \cos ay) = a^2 e^{ax} \cos ay$, $f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(-ae^{ax} \sin ay) = -a^2 e^{ax} \cos ay$.

[5]Infatti $f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{2x}{x^2+y^2}) = \frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{x^2+y^2)^2}$, $f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{2y}{x^2+y^2}) = \frac{2(x^2+y^2)-4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{x^2+y^2)^2}$.

(3) *Equazione delle corde vibranti*: rappresenta la propagazione di una vibrazione s lungo una retta, se x è l'ascissa della retta, t il tempo e v la velocità di propagazione, si ha: $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$, il cui integrale generale è $s = f(t - \frac{x}{v}) + \varphi(t + \frac{x}{v})$ con f, φ funzioni arbitrarie; L'equazione delle corde vibranti è un caso particolare della:

(4) *Equazione delle onde*: $f_{tt} = v^2(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz})$, con v velocità di propagazione, nello spazio-tempo a 4 dimensioni x, y, z, t[6] le soluzioni descrivono onde sonore o luminose.

(5) *Equazioni del calore*: $f_t = k(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz})$, con k costante che esprime la conducibilità termica del materiale in esame.

NOTAZIONE 1.3. Un'equazione differenziale ordinaria di ordine n è un'equazione di uno dei due tipi seguenti:

$$\underline{F}(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \tag{53}$$

forma implicita

dove x è la variabile indipendente, $y(x)$ è la variabile dipendente (ossia una funzione sconosciuta che rende (53) un'identità), $y^{(i)}(x)$ è la derivata i-ma della variabile dipendente.

$$y^{(n)}(x) = \Phi(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)). \tag{54}$$

forma normale

OSSERVAZIONE 1.4. Integrando un'equazione differenziale (ordinaria) di ordine n si ottengono n costanti arbitrarie $c_1, \dots, c_n$ (ossia, un'equazione differenziale di ordine n ha infinite soluzioni che dipendono da n costanti).

DEFINIZIONE 1.5. (1) L' *integrale generale di (53) o (54)*[7] è

$$y = f(x, c_1, \dots, c_n) \text{ o } \Psi(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0 \text{ (forma implicita)}.$$

(2) Assegnando determinati valori $\widetilde{c_1}, \dots, \widetilde{c_n}$ alle costanti arbitrarie si ottiene una *soluzione particolare.*

Di solito non interessa trovare tutte le soluzioni di un'equazione differenziale, ma una soluzione che verifichi *particolari* (proprietà dette) *condizioni iniziali.*

DEFINIZIONE 1.6. Il problema di trovare le soluzioni di un'equazione differenziale soddisfacenti determinate condizioni è detto *problema ai valori iniziali.*

ESEMPIO 1.7. (1) *(Ricerca delle primitive di una funzione assegnata)*:
Data $g(x)$ trovare $y(x)$ tale che $y'(x) = g(x)$, sappiamo che se $g(x) \in C^0([a, b])$, $\forall\ x \in [a, b]$ si ha $y(x) = \int_a^x g(t)dt + C$.

(2) Se $y'' = ay', a \neq 0$[8], ponendo $y' = u$ ci si riconduce a studiare $u' = au$, e siccome $u = ce^{ax}$ ne rappresenta la totalità delle soluzioni, se poniamo $y' = ce^{ax}$ siamo ridotti al problema della ricerca di primitive, ossia $y = ce^{ax} + D$ è l'integrale generale dell'equazione data.
Con le condizioni iniziali $\begin{cases} y'(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ si ricava $c = \frac{1}{a}, D = 2 - \frac{1}{a}$,
con le condizioni iniziali $\begin{cases} y'(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ si ricava $c = \frac{1}{a}, D = 1 - \frac{1}{a}$,

[6] Nello spazio-tempo a 2 dimensioni x, t le soluzioni sono le vibrazioni di una corda, nello spazio-tempo a 3 dimensioni x, y, t le soluzioni sono le vibrazioni di un tamburo.

[7] Ossia la totalità delle soluzioni di (53) o (54).

[8] Per $a = 0$ si ha $y'' = 0$ che, per (1), significa $y' = C$ e quindi $y = Cx + D$ è l'integrale generale.

con le condizioni iniziali $\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y(0) = 10 \end{cases}$ si ricava $c = 0, D = 10$.

OSSERVAZIONE 1.8. Viceversa, data una famiglia di curve (piane)

$$\Psi(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0 \tag{55}$$

eliminando i parametri $c_1, \dots, c_n$ dal sistema di equazioni $\begin{cases} \Psi = 0 \\ \frac{d}{dx}\Psi = 0 \\ \vdots \\ \frac{d^n}{dx^n}\Psi = 0 \end{cases}$ si ottiene un'equazione differenziale (54) il cui integrale generale è proprio (55).

O, anche, se di un'equazione differenziale $y^{(n)}(x) = \Phi(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ sono date le condizioni iniziali $\begin{cases} y(x_0) = y_0^0 \\ y'(x_0) = y_1^0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)} = y_{n-1}^0 \end{cases}$ e l'integrale generale $y = f(x, c_1, \dots, c_n)$, le costanti arbitrarie sono determinabili risolvendo[9] il sistema si equazioni: $\begin{cases} y_0^0 = f(x_0, c_1, c_2, \dots, c_n) \\ y_1^0 = f'(x_0, c_1, c_2, \dots, c_n) \\ \vdots \\ y_{n-1}^0 = f^{(n-1)}(x_0, c_1, c_2, \dots, c_n) \end{cases}$

ESEMPIO 1.9.

(1) La famiglia di curve (piane) $y = \frac{1+ce^x}{1-ce^x}, c \in \mathbb{R}$ è l'integrale generale dell'equazione differenziale $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$.
Si ha: $\frac{dy}{dx} = \frac{ce^x(1-ce^x)+ce^x(1+ce^x)}{(1-ce^x)^2} = \frac{2ce^x}{(1-ce^x)^2}$, inoltre vale

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(y^2 - 1) &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1+ce^x}{1-ce^x}\right)^2 - 1\right] = \\ &= \frac{1}{2}\frac{1 + c^2e^{2x} + 2ce^x - 1 - ce^x + 2ce^x}{(1-ce^x)^2} = \frac{2ce^x}{(1-ce^x)^2}. \end{aligned}$$

Trovare le soluzioni che soddisfano la condizione iniziale $y(0) = 2$, si ha $2 = \frac{1+c}{1-c}$ $\therefore$ $2 - 2c = 1 + c$ $\therefore c = \frac{1}{3}$ ossia $y = \frac{3+e^x}{3-e^x}$.

(2) Trovare l'equazione differenziale del 1° ordine soddisfatta da tutte le circonferenze di centro l'origine.
Una circonferenza con centro l'origine $O(0, 0)$ e raggio r ha equazione $x^2+y^2 = r^2, r \in \mathbb{R}_+^*$, per trovare un'equazione differenziale di cui la totalità delle curve di tali equazioni sia l'integrale generale basta solo derivare l'equazione stessa ottenendo: $2x + 2yy' = 0$, ossia, ogni circonferenza di centro l'origine è soluzione dell'equazione differenziale: $y' = -\frac{x}{y}$.

(3) Trovare un'equazione differenziale per la famiglia delle circonferenze passanti per l'origine e aventi centro sull'asse x .

[9] Se possibile!

Una circonferenza con centro nel punto $C(c, 0)$ dell'asse x e passante per l'origine $O(0, 0)$, ha equazione

$$(\bullet) \qquad (x-c)^2 + y^2 = c^2, c \in \mathbb{R}^*_+,$$

per trovare un'equazione differenziale di cui le curve con tali equazioni siano soluzione possiamo derivare l'equazione stessa ottenendo: $2(x-c) + 2yy' = 0$, ossia,

$$(\star) \qquad x + yy' = c,$$

che, contenendo c, è soddisfatta solo dalla circonferenza che ha centro in C, derivando ancora l'equazione $(\star)$ si ottiene

$$(\star\star) \qquad 1 + y'^2 + yy'' = 0,$$

È possibile ricavare un'equazione del 1° ordine da $(\bullet)$ e $(\star)$ eliminando algebricamente c, infatti, se (ricavandolo da $(\star)$) sostituiamo $x + yy'$ al posto di c in $(\bullet)$, otteniamo: $x^2 + y^2 - 2x(x + yy') = 0$ e, in forma normale, $y' = \frac{(y^2-x^2)}{2xy}$ il cui integrale generale vedremo dopo come si calcola[10].

(4) Determiniamo le soluzioni dell'equazione differenziale $y'' = y$, per cui $y(0) = 1, y'(0) = 1$, vedremo poi che l'integrale generale è $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$[11], $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$, pertanto,

$$\begin{array}{lll} y(0) = c_1 + c_2 & 1 = c_1 + c_2 & c_1 = 1 \\ y'(0) = c_1 - c_2 & 1 = c_1 - c_2 & c_2 = 0. \end{array}$$

(5) L'equazione differenziale $(y')^2 - xy' + y + 1 = 0$ non ammette nessuna soluzione verificante la condizione iniziale $y(0) = 0$, infatti se esistesse risulterebbe $(y')^2(0) = -1$.

(6) L'equazione differenziale $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$ ha due soluzioni distinte che soddisfano la condizione iniziale $y(0) = 0$ e precisamente $y_1(x) = 0, y_2(x) = x^3$.

2. Curve integrali campi di direzioni

È impossibile risolvere[12] la maggior parte delle equazioni differenziali, $\exists$ però alcuni artifici che permettono di farsi un'idea delle soluzioni. Per semplicità noi considereremo solo equazioni del 1° ordine espresse nella forma normale

$$y' = f(x, y).$$

Esempio 2.1. Dato il problema $\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1, \end{cases}$ si può considerare l'equazione ausiliaria[13] $y' = y$ di cui abbiamo già osservato che $u = e^x$ è soluzione. Posto $y =: uz$, si ha $y' = u'z + uz' = u(z + z')$, siccome $u' = u$, ossia $u(z + z') = x + uz$ e quindi $uz' = x$ da cui $e^x z' = x$ che possiamo scrivere nella forma $\frac{dz}{dx} = \frac{x}{e^x}$ o anche $dz = \frac{x}{e^x}dx$ questa, una volta integrata, dà $z = \int \frac{x}{e^x}dx + C$, essendo $y = e^x z$, otteniamo $y(x) = e^x \left(\int \frac{x}{e^x}dx + C\right)$, da cui, essendo $\int \frac{x}{e^x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C'$, si ricava $y = De^x - x - 1, D \in \mathbb{R}$, e siccome $y(0) = 1$, si ha $D = 2$, ossia: $y = 2e^x - x - 1$ è la soluzione cercata.

La condizione $y' = x + y$ significa che la pendenza in un punto $(x, y(x))$ del grafico $\Gamma_{y(x)}, (y(x)$ soluzione sconosciuta dell'equazione differenziale), detto *curva soluzione dell'equazione differenziale,* è pari a $x + y(x)$, in particolare, $(0, 1) \in \Gamma_{y(x)}$ e la pendenza è $0 + 1 = 1$.

---

[10] È un'equazione del 1° ordine *omogenea.*

[11] Chiaramente $y' = c_1e^x - c_2e^{-x}$, $y'' = c_1e^x + c_2e^{-x}$

[12] Ossia ottenere un'espressione esplicita delle soluzioni.

[13] Detta *equazione omogenea associata.*

Disegnando piccoli segmenti di pendenza $x+y$ in molti punti (x,y) otteniamo un *campo di direzioni* o *pendenze* che indicano le direzioni lungo le quali si muovono le curve soluzioni.

- Con una suddivisione dell'asse x in segmenti di lunghezza 1 otteniamo:
  – la retta di pendenza 1 per $P_0 = (0,1)$[14] fornisce $P_1 = (1,2)$, nel quale la pendenza è $1+2=3$,
  – la retta di pendenza 3 per $P_1 = (1,2)$[15] fornisce $P_2 = (2,5)$, nel quale la pendenza è $2+5=7$,
  – la retta di pendenza 7 per $P_2 = (2,5)$[16] fornisce $P_3 = (3,12)$, nel quale la pendenza è $3+12=15$, eccetera.
- Con una suddivisione dell'asse x in segmenti di lunghezza $0,5$ otteniamo:
  – la retta di pendenza 1 per $P_0 = (0,1)$[17] fornisce $P_1 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, nel quale la pendenza è $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$
  – la retta di pendenza 2 per $P_1 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$[18] fornisce $P_2 = (1, \frac{5}{2})$, nel quale la pendenza è $1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$,
  – la retta di pendenza $\frac{7}{2}$ per $P_2 = (1, \frac{5}{2})$[19] fornisce $P_3 = (\frac{3}{2}, \frac{17}{4})$, nel quale la pendenza è $\frac{3}{2} + \frac{17}{4} = \frac{23}{4}$,
  – la retta di pendenza $\frac{23}{4}$ per $P_3 = (\frac{3}{2}, \frac{17}{4})$[20] fornisce $P_4 = (2, \frac{57}{8})$, nel quale la pendenza è $2 + \frac{57}{8} = \frac{73}{8}$ eccetera.

Osservazione 2.2. Il procedimento può essere ripetuto per ogni $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ e, quanto maggiore è il numero di segmenti disegnati del campo di direzioni, tanto migliore è l'approssimazione ottenuta del grafico della soluzione.
Calcolare a mano (per un n° elevato di punti) è noioso, ma utilizzando (bene) il computer si ottengono ottimi risultati.

L'idea base su cui poggia l'uso dei campi di direzioni può essere sfruttata per trovare *approssimazioni numeriche* delle soluzioni di equazioni differenziali.

Proposizione 2.3 (Metodo di Eulero (1707-83)). *Dato un problema iniziale generico*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & \star \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

troviamo valori approssimati della soluzione per valori equispaziati della variabile indipendente.

Dim. Il primo passo consiste nel calcolare, via l'equazione $\star$, la pendenza in $x=0$ e nello scegliere come prima approssimazione della soluzione l'approssimazione lineare data dalla retta per $(0,1)$ con la pendenza trovata, ossia come prima approssimazione della curva Γ_y, grafico della soluzione sconosciuta $y(x)$, prendiamo la sua retta tangente in un intorno di $(0,1) \in \Gamma_y$. L'idea di Eulero consiste nel migliorare questa approssimazione seguendo la retta tangente solo per un

[14] Che ha equazione $u_1 = x+1$ per $0 \le x \le 1$.
[15] Che ha equazione $u_2 = 3(x-1)+2$ per $1 \le x \le 2$.
[16] Che ha equazione $u_3 = 7(x-2)+2$ per $2 \le x \le 3$.
[17] Che ha equazione $u_1 = x+1$ per $0 \le x \le \frac{1}{2}$.
[18] Che ha equazione $u_2 = 2(x-\frac{1}{2}) + \frac{3}{2}$ per $\frac{1}{2} \le x \le 1$.
[19] Che ha equazione $u_3 = \frac{7}{2}(x-1) + \frac{5}{2}$ per $1 \le x \le \frac{3}{2}$.
[20] Che ha equazione $u_3 = \frac{23}{4}(x-\frac{3}{2}) + \frac{17}{4}$ per $\frac{3}{2} \le x \le 2$.

piccolo tratto e correggere la direzione nel modo indicato dal campo di pendenze, costruendo cosí una spezzata che approssima ${\Gamma_y}$[21]. Precisamente:

$x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, x_3 = x_2 + h, \dots \ h \in \mathbb{R}$ "piccolo", detto *passo*.

Dall'equazione differenziale $\star$ si ricava che in (x_0, y_0) la pendenza è $y_0' = f(x_0, y_0)$, pertanto, il valore approssimato della soluzione in x_1 è

$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$,

e, procedendo in modo analogo a partire dall' (x_1, y_1) appena determinato si ottiene

$y_2 = y_1 + hf(x_0, y_0)$,

e cosí via

$\vdots$

$y_n = y_{n-1} + hf(x_0, y_0)$,

$\vdots$

Esempio 2.4. Illustreremo il Metodo di Eulero nell'Es. 2.1, verificandone la precisione. Ossia, usiamo il *Metodo di Eulero* per calcolare una tabella di valori approssimati (con passo 0.1) per la soluzione del problema ai valori iniziali di Es. 2.1.

$u_0(x) = x + 1$, $0 \le x \le 0.1$, $u_0(0.1) = 1.1$, in $(0.1, 1.1)$ la pendenza è 1.2;

$u_1(x) - 1.1 = (x - 0.1)1.2$, $0.1 \le x \le 0.2$, $u_1(0.2) = 1.1 + 0.1 \cdot 1.2 = 1.1 + 0.12 = 1.22$,

in $(0.2, 1.22)$ la pendenza è 1.42;

$u_2(x) - 1.22 = (x - 0.2)1.42$, $0.2 \le x \le 0.3\, u_2(0.3) = 1.22 + 0.1 \cdot 1.42 = 1.22 + 0.142 = 1.362$,

in $(0.3, 1.362)$ la pendenza è 1.662;

$u_3(x) - 1.362 = (x - 0.3)1.662$, $0.3 \le x \le 0.4\, u_3(0.4) = 1.362 + 0.1 \cdot 1.662 = 1.362 + 0.1662 = 1.528$,

in $(0.4, 1.528)$ la pendenza è 1.928;

$u_4(x) - 1.528 = (x - 0.4)1.928$, $0.4 \le x \le 0.5\, u_4(0.5) = 1.528 + 0.1 \cdot 1.928 = 1.528 + 0.193 = 1.1721$;

ricordiamo che il valore ottenuto in Es. 2.1, con passo 0.5, era 2, calcoliamo anche il valore che si ottiene dalla formula risolutiva $y = 2e^x - x - 1$, si ha

$y(0.5) = 2e^{0.5} - 0.5 - 1 = 2 \cdot 1.648 - 1.5 = 3.296 - 1.5 = 1.796$, il confronto tra questi dati convince che diminuendo il passo l'approssimazione migliora[22].

3. Problemi

(1) *(Ricerca delle primitive di una funzione assegnata)* vedi (Es.1.7). Un esempio concreto è costituito dal *Moto rettilineo individuato dalla velocità*: una particella si muove di moto rettilineo uniforme con velocità istantanea all'istante t data da $v(t) = 2\sin t$, denotando $s(t)$ la posizione della particella al tempo t, si ha $s'(t) = v(t) = 2\sin t$ e, integrando si ottiene, $s(t) = \int_0^t 2\sin u du = -2\cos t + 2 + C$, per determinare univocamente la posizione della particella occorre fissare un ulteriore dato, per esempio la posizione iniziale $s(0) = -2 + 2 + C$.

(2) *(Ricerca delle funzioni proporzionali alla derivata prima)*: trovare le $y(x)$ tali che $y'(x) = ay(x), a \in \mathbb{R}^*$[23].

[21]Tanto piú accuratamente quanto piú frequenti sono le correzioni.

[22]Come era logico aspettarsi!

[23]Sappiamo che $y'(x) = 0y(x) = 0$ ha come soluzione $y(x) = k$, $\forall\, k \in \mathbb{R}$.

TEOREMA 3.1. *Dati* $a, c \in \mathbb{R}, \exists!\, f(x)$ *soddisfacente*

$$\begin{cases} f'(x) = af(x), \forall\, x \in \mathbb{R}\ , (\circledast) \\ f(0) = c \end{cases}$$

e vale $f(x) = ce^{ax}$.

Dim. Poiché $\forall\, c \in \mathbb{R}^*, (ce^{ax})' = ace^{ax}, y(x) = ce^{ax}$ è soluzione di $(\circledast)$ $\forall\, c \in \mathbb{R}$ e $c = c \cdot e^{a0}$; sia $g(x)$ tale che $g'(x) = ag(x), \forall\, x \in \mathbb{R}$ e $g(0) = c$. Posto $h(x) = g(x)e^{-ax}$, risulta $h'(x) = (g(x)e^{-ax})' = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = e^{-ax}(g'(x) - ag(x)) = 0$, ossia $h(x) = costante$, siccome $h(0) = g(0) = c$ si ha necessariamente $g(x) = ce^{ax}$.

Esempi concreti sono costituiti da: *Decadimento radioattivo, crescita di una popolazione, eccetera*[24].

(3) *(Ricerca delle funzioni proporzionali alla derivata seconda)*: trovare le $y(x)$ tali che $y''(x) + by(x) = 0$, occorre distinguere a seconda del segno di b.
   per $b = 0$ si ha $y''(x) = 0 \Longrightarrow y'(x) = c_1 \Longrightarrow y(x) = c_1x + c_2, \forall\ (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ è soluzione;
   per $b < 0 \therefore b = -k^2$ si ha $y''(x) = k^2y(x)$ chiaramente e^{kx} ed e^{-kx} sono soluzioni quindi $y(x) = c_1e^{kx} + c_2e^{-kx}$, $\forall\ (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ è soluzione;
   per $b > 0 \therefore b = k^2$ si ha $y''(x) = -k^2y(x)$ chiaramente $\cos kx$ e $\sin kx$ sono soluzioni quindi $y(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$, $\forall\ (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ è soluzione.

$(ce^{ax})' = ace^{ax}$

TEOREMA 3.2. *Se* $f(x), g(x)$ *soddisfano* $y''(x) + by(x) = 0$ $(\bullet)$ *su tutto* $\mathbb{R}$ *ed entrambe soddisfano le stesse condizioni iniziali (ossia* $f(0) = g(0), f'(0) = g'(0)$*) si ha* $f(x) = g(x)$.

Dim. La funzione $h(x) := f(x) - g(x)$ chiaramente soddisfa $(\bullet)$, inoltre, poiché $y''(x) = -by(x)$ vale $y'''(x) = -by'(x), y''''(x) = -by''(x) = b^2y(x)$ e quindi $y^{(2n)}(x) = (-1)^n b^n y(x), y^{(2n-1)(x)} = (-1)^{n-1}b^{n-1}y'(x)$, da cui, utilizzando le approssimazioni di $h(x)$ mediante il polinomio di Taylor, si dimostra che $h(x) = 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

(4) *(Problema di Cauchy)*: Dati $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in D$, il *Problema di Cauchy* (P.d.C. per brevità) per l'equazione differenziale ordinaria del 1° ordine in forma normale $y'(x) = f(x, y)$ $(\diamond)$, con dato iniziale (x_0, y_0), è la ricerca di funzioni $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ con $x_0 \in I$, $y(x_0) = y_0$ che risolvano $(\diamond)$[25].

ESEMPIO 3.3. Illustriamo alcuni esempi concreti di equazioni differenziali ordinarie

(1) $y'' + 2y' + y = 0$, *equazione differenziale ordinaria lineare*[26] *del* 2° *ordine a coefficienti costanti.*
   Si verifica facilmente che $\forall\ (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$, $y(x) = (c_1x + c_2)e^{-x}$ è soluzione.
(2) $xy' + y = y^2$, *equazione differenziale ordinaria del* 1° *ordine a coefficienti non costanti.*
   Scrivendo prima $xy' = y^2 - y$ poi $y' = \frac{y^2-y}{x}$ e infine $\frac{y'}{y^2-y} = \frac{1}{x}$ o anche
   $\frac{dy}{y^2-y} = \frac{dx}{x}$ *(forma normale* ottenuta mediante la *separazione delle variabili),*
   si ottiene $\int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right) dy = \int \frac{1}{x}dx + C$ da cui $\lg|y-1| - \lg|y| = \lg|x| + C$,

[24] Lo vedremo dopo.

[25] Si dimostra che sotto condizioni abbastanza generali il P.d.C. ammette un'unica soluzione.

[26] Un'equazione differenziale in cui la funzione incognita e le sue derivate compaiono con esponente 1 è detta *lineare*.

ossia $\lg\left|\frac{y-1}{y}\right| = \lg|x| + C$ e quindi:

$$\left|\frac{y-1}{y}\right| = |x|e^C \ \text{ o } \ \frac{y-1}{y} = kx, \text{ per qualche } k \in \mathbb{R}$$
integrale generale in forma implicita,

scrivendo $y - 1 = ykx$ ossia $y(1 - kx) = 1$ si ottiene:

$$y = \frac{1}{1-ky} \text{ per qualche } k \in \mathbb{R}$$
integrale generale in forma esplicita.

(3) $y'' + y = x^3$ *equazione differenziale ordinaria del* $2°$ *ordine a coefficienti costanti.* La totalità delle soluzioni dell' *equazione omogenea associata* $y'' + y = 0$ è $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$[27]; vediamo se l'equazione data ammette soluzione polinomiale[28], sia $P(X) = AX^3 + BX^2 + CX + D$, si ha $P'(X) = 3AX^2 + 2BX + C, P''(X) = 6AX + 2B$, si tratta di vedere se $\exists A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tali che $6AX + 2B + AX^3 + BX^2 + CX + D = X^3$ ossia $(A-1)X^3 + BX^2 + (6A + C)X + D = 0$, per il principio di identità dei polinomi[29], deve essere $A - 1 = B = 6A + C = D = 0$ da cui $A = 1, B = 0, C = -6, D = 0$, pertanto $P(X) = X^3 - 6X$ è la soluzione cercata.

Come succede per le equazioni algebriche, la totalità delle soluzioni dell'equazione differenziale assegnata è data dalla somma di una sua soluzione (particolare) con la totalità delle soluzioni dell'equazione omogenea associata, pertanto è della forma:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^3 - 6x.$$

(4) Dire per quali $r \in \mathbb{R}, y = e^{rx}$ soddisfa l'equazione differenziale $y'' + y' - 6y = 0$, se $y = e^{rx}$ si ha $y' = ry, y'' = r^2 y$, sostituendo nell'equazione differenziale data $r^2 y + ry - 6y = 0$ se $y \neq 0$, $\forall r, x \in \mathbb{R}$ da $y(r^2 + r - 6) = 0$ si ricava $0 = (r^2 + r - 6) = (r + 3)(r - 2)$ ossia $y = e^{-3x}, y = e^{2x}$ sono soluzioni.

4. Equazioni differenziali (lineari) dei $1°$ ordine

Definizione 4.1. Un'*equazione differenziale lineare del* $1°$ *ordine* è un'equazione differenziale della forma

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x) \ \ (\blacklozenge)$$

con $P(x), Q(x)$ funzioni note della variabile indipendente su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$.

Vogliamo determinare le soluzioni $y(x)$ di $(\blacklozenge)$, definite su I con $y(a) = b$ per qualche $a \in I, b \in \mathbb{R}$.

I $Q(x) = 0$, ossia consideriamo l'equazione omogenea associata a $(\blacklozenge)$,

$$y'(x) + P(x)y(x) = 0 \ \ (\blacklozenge)',$$

se $y(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, l'equazione $(\blacklozenge)'$, è equivalente a $\frac{y'(x)}{y(x)} = -P(x)$, ossia $(\lg y(x))' = -P(x)$ e quindi $\lg|y(x)| = -\int P(x)dx + C \ \therefore \ y(x) = e^{-A(x)}$, con $A(x) = \int_a^x P(t)dt$[30].

Abbiamo cosí il seguente

[27] Lo vedremo dopo.

[28] Ossia se $\exists$ polinomio $P(X)$ che è soluzione, poiché $\deg P'' < \deg P$, dovrà esseredeg $P \leq 3$.

[29] Due polinomi sono uguali se e solo se hanno i coefficienti ordinatamente uguali.

[30] In particolare per $P(x) = -\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, ritroviamo l'equazione $y'(x) = \alpha y(x)$ che ha come soluzione $y(x) = ce^{\alpha x}$.

Teorema 4.2. *Data* $P(x) \in C^0(I), I \subset \mathbb{R}, \forall a \in I, b \in \mathbb{R}, \exists! y(x)$ *soddisfacente il P.d.C.*

$$\begin{cases} y'(x) + P(x)y(x) = 0 \\ y(a) = b \end{cases}$$

e precisamente:

$$y(x) = be^{-\int_a^x P(t)dt}.$$

II $Q(x) \neq 0$, sia $g(x)$ una funzione soddisfacente l'equazione (♦), poniamo

$$h(x) := g(x)e^{A(x)} \text{ con } A(x) = \int_a^x P(t)dt^{31},$$

si ha

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(x)e^{A(x)} + g(x)e^{A(x)} \cdot A'(x) = e^{A(x)}(g'(x) + g(x)A'(x)) = \\ &= e^{A(x)}(g'(x) + g(x)P(x)) = e^{A(x)}Q(x), \end{aligned}$$

da cui

$$\int_a^x h'(t)dt = \int_a^x e^{A(t)}Q(t),$$

(ossia $h(x) - h(a) = \int_a^x e^{A(t)}Q(t) \Longrightarrow h(x) = g(a) + \int_a^x e^{A(t)}Q(t)$),

e quindi
$$g(x)e^{A(x)} = g(a) + \int_a^x e^{A(t)}Q(t),$$

$$g(x) = g(a)e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_a^x e^{A(t)}Q(t)dt$$

se vale $g(a) = b$ è cosí risolto il P.d.C..

Esempio 4.3. *(P.d.C. relativi a equazioni differenziali lineari del* 1° *ordine)*

(1) Dato

$$\begin{cases} xy' + (1-x)y = e^{2x} \quad \forall x \in (0, +\infty) \\ y(1) = b, \end{cases}$$

si ha $y' + \frac{1-x}{x}y = \frac{e^{2x}}{x}$, ossia $P(x) = \frac{1}{x} - 1, Q(x) = \frac{e^{2x}}{x}$ e $y' + \frac{1-x}{x}y = 0$ è l'equazione omogenea associata; pertanto $A(x) = \int_1^x P(t)dt = \lg x - (x-1)$ e:

$$\begin{aligned} y(x) &= be^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_1^x e^{A(t)}Q(t)dt = \\ &= be^{-[\lg x - (x-1)]} + e^{-[\lg x - (x-1)]} \int_1^x e^{\lg t - (t-1)} \frac{e^{2t}}{t} dt = \\ &= b\frac{e^{x-1}}{x} + \frac{e^{x-1}}{x} \int_1^x \frac{t}{e^{t-1}} \cdot \frac{e^{2t}}{t} dt = \frac{e^{x-1}}{x}\left[b + \int_1^x e^{t+1}dt\right] = \\ &= \frac{e^{x-1}}{x}\left[b + e(e^x - e)\right]. \end{aligned}$$

[31] n.b. risulta $h(a) = g(a)e^0 = g(a)$.

(2) Dato

$$\begin{cases} y' - 3y = e^{2x} & \forall\, x \in \mathbb{R}_+ \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

si ha $P(x) = -3, Q(x) = e^{2x}$ e $y' - 3y = 0$ è l'equazione omogenea associata; pertanto $A(x) = \int_0^x -3dt = -3x$, e:
$y(x) = 0e^{3x} + e^{3x}\int_0^x e^{2t}e^{-3t}dt = e^{3x}\int_0^x e^{-t}dt = e^{3x}\left[-e^{-t}\right]_0^x = e^{3x} - e^{2x}$.

(3) Riprendiamo ora l'Es.2.1

$$\begin{cases} y' = x + y & \forall\, x \in (0, +\infty) \\ y(0) = b, \end{cases}$$

si ha $P(x) = -1, Q(x) = x$ e $y' - y = 0$ è l'equazione omogenea associata; si ha pertanto $A(x) = \int_0^x -dt = -x$, e:

$$\begin{aligned} y(x) &= be^x + e^x \int_0^x te^{-t}dt = be^x + \left\{ \left[-te^{-t}\right]_0^x - \int_0^x -e^{-t}dt \right\} = \\ &= be^x + e^x \left\{ -xe^{-x} + 0 - \left[e^{-t}\right]_0^x \right\} = be^x - x - 1 + e^x = e^x(b+1) - (x+1). \end{aligned}$$

4.1. Equazioni differenziali lineari del 1° ordine: problemi concreti.

1. *(Decadimento dei neutroni)* Detto $N(t)$ il n° di *neutroni* presenti al tempo t e con $\wp$ la probabilità che un neutrone[32] si disgreghi in un secondo, si ha l'equazione

$$N'(t) = -\wp N(t),$$

ossia $\frac{N'(t)}{N(t)} + \wp = 0$, da cui
$\int_0^x \frac{N'(t)}{N(t)}dt = \int_0^x -\wp dt$, $[\lg N(t)]_0^x = -\wp x$, $\lg N(x) - \lg N(0) = -\wp x$, quindi
$\lg N(x) = -\wp x + \lg N(0)$, e infine $N(x) = N(0)e^{-\wp x}$.

2. *(Decadimento radioattivo)* Detta $f(t)$ la quantità di materiale radioattivo presente al tempo t, $f'(t)$ ne rappresenta il tasso di variazione[33] al tempo t e vale

$$f'(t) = -\mathbf{k}f(t),\ \mathbf{k} > 0 \quad \text{costante di decadimento}^{34},$$

pertanto, ogni sua soluzione ha la forma $f(t) = f(0)e^{-\mathbf{k}t}$, essendo $e^{-\mathbf{k}t} \neq 0$, $\forall\ t \in \mathbb{R}_+$, $f(t)$ non si annulla mai, in effetti non interessa tanto studiare la durata della 'vita totale' di una sostanza radioattiva, quanto il tempo richiesto per il decadimento di una porzione[35]

3. *(Caduta libera in un mezzo resistente)* Un corpo di massa m, inizialmente fermo, cade da grande altezza[36], $s(t)$ indica lo spazio percorso nella caduta al tempo t, $v(t) = s'(t)$ indica

[32] Il neutrone n non è una particella stabile, ma si disgrega spontaneamente in un *protone* p^+, un *elettrone* e^- e un *neutrino* ν, ossia $n \mapsto p^+ + e^- + \nu$.

[33] Per tutti gli elementi radioattivi il tasso con cui una determinata sostanza si decompone è proporzionale in ogni istante alla quantità (che diminuisce al crescere di t) di materiale presente in quell'istante.

[35] Di solito interessa $\frac{f(\bar{t})}{f(0)} = \frac{1}{2}$ *tempo di dimezzamento* o *semiperiodo*, ossia
$\frac{1}{2}f(0) = f(0)e^{-\mathbf{k}\bar{t}}$, $\lg\frac{1}{2} = -\mathbf{k}\bar{t}$, $\bar{t} = \frac{\lg 2}{\mathbf{k}}$, (il semiperiodo è lo stesso per ogni quantità di un dato materiale).

[36] Supponiamo il moto rettilineo e che le sole forze siano la forza di gravità mg, diretta verso il basso, e la forza di accelerazione $-kv$, diretta verso l'alto.

la velocità all'istante $t, s'(0) = 0$ e $a(t) = (v(t))'$ indica l'accelerazione all'istante t, dalla 2° *legge di Newton del moto* si ha: $ma = mg - kv$ quindi

$$v'(t) + \frac{k}{m}v(t) = g$$

da cui $v(t) = e^{-\frac{k}{m}t} \int_0^t ge^{\frac{k}{m}u}du = e^{-\frac{k}{m}t} \frac{mg}{k} \left[e^{\frac{k}{m}t} - 1\right] = \frac{mg}{k} \left[1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right]$ ossia, $v(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{mg}{k}$, poiché $a(t) = v'(t) = \frac{mg}{k}\frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t}$ si ha $a(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, poiché $v(t) = s'(t)$ si ha

$$s(t) = \int_0^t \frac{mg}{k} \left[1 - e^{-\frac{k}{m}u}\right] du = \frac{mg}{k}t + \frac{mg}{k}\frac{m}{k} \left[e^{-\frac{m}{k}t} - 1\right].$$

4. *(Legge di Newton del raffreddamento)* La velocità con cui un corpo cambia temperatura è proporzionale allo scarto fra la sua temperatura e la temperatura dell'ambiente circostante. Siano $T(t)$ la temperatura (ignota) del corpo in questione al tempo t ed $M(t)$ la temperatura (nota) dell'ambiente circostante al medesimo istante, si ha $T'(t) = -k[T(t) - M(t)]$, ossia il P.d.C.

$$\begin{cases} T'(t) + kT(t) = kM(t), & k > 0, t \in [a, \tau], a, \tau \in \mathbb{R} \\ T(a) = b, \end{cases}$$

la cui soluzione sappiamo essere $T(t) = be^{-kt} + e^{-kt} \int_0^t kM(u)e^{ku}du.$

Come esempio effettivo supponiamo $t \in [0', 40']$, $T(0') = 200°C$, $T(40') = 100°C$, $M(t) = 10°C,\ \forall t \in [0', 40']$. Si ha:

$$100 = 200e^{-k40} + 10e^{-k40} \left[e^{k40} - e^0\right], \text{ ossia } 100 = e^{-k40}(200 - 10) + 10,$$

da cui $90 = e^{-k40}190$ cioè $e^{-k40} = \frac{9}{19}$ ovvero $-k40 = \lg \frac{9}{19}$ e $k = \frac{1}{40} \lg \frac{19}{9}$.
Calcoliamo ora il tempo necessario per passare da $200°C$ a $100°C$, con ambiente a $5°C$: essendo $100 = T(t) = 200e^{-kt} + 5e^{-kt} \left(e^{kt} - e^0\right) = 5 + 195e^{-kt}$, si ricava $95 = 195e^{-kt}$ ossia $19 = 39e^{-kt}$ e quindi $\lg 19 = \lg 39 - kt$ cioè $kt = \lg \frac{39}{19}$, complessivamente si ha dunque $t = 40\frac{\lg 39 - \lg 19}{\lg 19 - \lg 9} \sim 38, 5'$.
Calcolando invece l tempo necessario per passare da $100°C.$ a $10°C.$, con ambiente a $5°C.$: si ottiene $10 = T(t) = 100e^{-kt} + 5e^{-kt} \left(e^{kt} - e^0\right)$ cioè $5 = 95e^{-kt}$, ossia $1 = 19e^{-kt}$ e quindi $\lg \frac{1}{19} = -kt \therefore \lg 19 = kt$ e $t = \frac{1}{k} \lg 19$, dunque complessivamente $t = \frac{40 \lg 19}{\lg 19 - \lg 9} \sim 158'$.
Ossia, la velocità di raffreddamento decresce quando la temperatura del corpo da raffreddare si avvicina alla temperatura ambiente.

5. *(Problemi di diluizione o miscelazione[37])* Detta $y(t)$ la quantità di sostanza presente nel serbatoio al tempo t, ci sono due fattori che causano la variazione di $y(t)$: la soluzione in ingresso (che aumente la concentrazione), la miscela in uscita (che diminuisce la concentrazione).

Supponendo di avere un serbatoio S, di capacità 5000ℓ, contenente $20Kg$ di $NaCl$ disciolto in H_2O, una soluzione salina di concentrazione pari a $0,03Kg/\ell$ entra alla velocità di $25\ell/'$; il contenuto (continuamente rimescolato) esce da S alla stessa velocità[38]. Determiniamo la quantità di $NaCl$ presente dopo $30'$.
In S entrano $0,03\frac{Kg}{\ell} \cdot 25\frac{\ell}{'} = 0,75\frac{Kg}{'}$ di $NaCl$, da S escono $\frac{y(t)}{5000}\frac{Kg}{\ell} \cdot 25\frac{\ell}{'} = \frac{y(t)}{200}\frac{Kg}{'}$ di $NaCl$, il processo è descritto dal P.d.C.:

[37]In un serbatoio di capacità fissata, riempito di una soluzione di una qualche sostanza, entra (a velocità costante) una soluzione di data concentrazione della medesima sostanza, rimescolando continuamente (in modo che la miscela sia uniforme), il liquido esce (con velocità costante, in genere diversa da quella di entrata).

[38]Ossia il serbatoio S contiene sempre 5000ℓ di liquido.

$$\begin{cases} y'(t) = 0,75 - \frac{y(t)}{200} \\ y(0) = 20, \end{cases}$$

da $\frac{dy}{dt} = \frac{150-y(t)}{200}$ si ottiene $\int \frac{dy}{150-y} = \int \frac{1}{200}dt$ e quindi $-\lg|150 - y(t)| = \frac{t}{200} + C$, da cui, essendo $y(0) = 20$, $C = -\lg 130$ e $\lg|150 - y(t)| = \lg 130 - \frac{t}{200}$, infine $150 - y(t) = 130e^{-\frac{t}{200}}$, $y(t) = 150 - 130e^{-\frac{t}{200}}$ e $y(30) \sim 38,1Kg$.

6 *(Inversione dello zucchero*[39]*)* Dette a la quantità di zucchero su cui avviene la reazione e $x(t)$ quella dello zucchero trasformato dall'inizio all'istante t, l'equazione differenziale che descriva il processo è:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{k}(a - x(t)), \quad \text{ossia} \quad \int \frac{dx}{a-x} = \int \mathbf{k}dt, \quad \text{da cui} \quad \lg(a-x) = -\mathbf{k}t + C$$

e quindi $a - x = e^{-\mathbf{k}t - C}$, $x = a - C'e^{-\mathbf{k}t}$, la quantità di zucchero non ancora invertito sarà dunque

$$x(t) = a - a(1 - e^{-\mathbf{k}t}) = ae^{-\mathbf{k}t}$$

7. *(Dissociazione dell'acido iodidrico in H e I)*[40] Alla temperatura di $440°C$, detti $x(t)$ il $n°$ di grammi-molecole di HI decomposte al tempo t, V il volume (in litri) occupato inizialmente da una grammo-molecola di HI, $K = 0,02$ (a $440°C$), $\mathbf{k}$, $a^2 = 4K^2$ coefficienti di proporzionalità, l'equazione differenziale che descriva il processo è:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\mathbf{k}}{4V}\left[a^2(1-x(t))^2 - x(t)^2\right] \quad \text{da cui} \quad \int \frac{dx}{a^2(1-x)^2 - x^2} = \frac{\mathbf{k}}{4V}\int dt,$$

n.b. $a^2(1-x(t))^2 - x(t)^2$ può scriversi nella forma $x^2\left[a^2\left(\frac{1}{x}-1\right)^2 - 1\right]$, inoltre, siccome vale $d(\frac{1}{x} - 1) = -\frac{1}{x^2}dx$, si ha

$$\int \frac{dx}{a^2(1-x)^2 - x^2} = \int \frac{dx}{x^2\left[a^2\left(\frac{1}{x}-1\right)^2 - 1\right]} = -\int \frac{d(\frac{1}{x}-1)}{a^2\left(\frac{1}{x}-1\right)^2 - 1},$$

ponendo poi $z = a(\frac{1}{x} - 1)$, si ha $dz = ad(\frac{1}{x} - 1)$, ossia

$$\frac{\mathbf{k}}{4V}\int dt = \int \frac{dx}{a^2(1-x)^2 - x^2} = -\frac{1}{a}\int \frac{dz}{z^2-1}, \qquad \text{da cui}$$

$$\frac{\mathbf{k}}{4V}t + C = -\frac{1}{2a}\lg\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = -\frac{1}{2a}\lg\frac{a(\frac{1}{x}-1)-1}{a(\frac{1}{x}-1)+1} = \frac{1}{2a}\lg\frac{a(1-x)+x}{a(1-x)-x}, \quad \text{ossia}$$

$$\frac{a\mathbf{k}}{2V}t + C' = \lg\frac{a(1-x)+x}{a(1-x)-x}, \quad \text{da cui, essendo } x(0) = 0,\ C' = \lg 1 = 0, \ \text{pertanto}$$

$$\frac{a(1-x)+x}{a(1-x)-x} = e^{\frac{a\mathbf{k}}{2V}t} \quad \text{e quindi } a + x(1-a) = [a - x(1+a)]e^{\frac{a\mathbf{k}}{2V}t}$$

[39]Lo zucchero di canna disciolto in acqua acidulata (contenente HCl) si trasforma in modo che, mentre all'inizio faceva deviare verso destra il piano di polarizzazione della luce, dopo lo fa deviare verso sinistra(inverte cioè la rotazione del piano di polarizzazione da destrogira a levogira). La trasformazione avviene a poco a poco, a un certo istante dall'inizio lo zucchero sarà in parte destrogiro e in parte levogiro e la velocità di reazione è, in ogni istante, proporzionale alla quantità di sostanza non ancora trasformata.

[40]Processo descritto in un testo di chimica del 1940!

ossia $x\left[(1-a)+(1+a)e^{\frac{a\mathbf{k}}{2V}t}\right]=a\left(e^{\frac{a\mathbf{k}}{2V}t}-1\right)$ e finalmente

$$x=\frac{a\left(e^{\frac{a\mathbf{k}}{2V}t}-1\right)}{1+e^{\frac{a\mathbf{k}}{2V}t}+a\left(e^{\frac{a\mathbf{k}}{2V}t}-1\right)}.$$

8. *(Modelli di crescita di popolazioni)*[41] Detto $P(t)$ il numero[42] di individui della popolazione all'istante t, il tasso di crescita è $\frac{dP}{dt}$ e l'equazione differenziale che descrive il processo è:

$$\frac{dP}{dt}=kP(t)^{43},$$

in cui, escluso il caso di popolazione vuota, si ha $P(t)>0$, $\forall\ t\in\mathbb{R}_+$. Si ha $\int\frac{dP}{P}=\int kdt$, da cui $\lg P(t)=kt+C$, essendo $0<P(t)$, quindi $P(t)=e^{kt+C}=Ae^{kt}$, $A\in\mathbb{R}_+$.
Se $k>0$ si ha $\frac{dP}{dt}>0$ e al crescere di $P(t)$ anche $\frac{dP}{dt}$ cresce.

$\overline{8}$. Un modello piú realistico di crescita deve tenere conto almeno della limitatezza delle risorse: precisamente, il livello della popolazione non può indefinitamente oltrepassare la capacità K dell'ambiente[44]. Si arriva cosí all'*equazione differenziale logistica*:

$$\frac{dP}{dt}=kP(t)\left(1-\frac{P(t)}{K}\right),$$

n.b. se $P\ll K$, $\frac{P}{K}\to 0$, se $P>K$, $1-\frac{P}{K}<0$ e $\frac{dP}{dt}=0 \iff P(t)=0$ o $P(t)=K$ *soluzioni di equilibrio.*
Integrando: $\int\frac{dP}{P\left(1-\frac{P}{K}\right)}=\int kdt$, ossia $\int\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{K-P}\right)dP=\int kdt$ si ottiene:

$$\lg|P|-\lg|K-P|=kt+C \quad \text{cioè} \quad \lg\left|\frac{K-P}{P}\right|=-kt-C, \qquad \text{da cui:}$$

$$\frac{K-P}{P}=\pm e^{-kt-C} \quad \text{e quindi} \quad \frac{K}{P}=Ae^{-kt}+1,\ \text{ossia } P=\frac{K}{Ae^{-kt}+1},$$

per $t=0$, $P=P_0$, $P_0=\frac{K}{A+1}$, pertanto $A+1=\frac{K}{P_0}$, $A=\frac{K-P_0}{P_0}$.

$\overline{\overline{8}}$. Un ulteriore modello è detto *preda-predatore*[45], se $R(t)$ è il numero delle prede presenti all'istante t e $W(t)$ è il numero dei predatori allo stesso istante, la crescita di entrambi in

---

[41] Nell'ipotesi che queste crescano con un tasso proporzionale al $n°$ di individui presenti, ipotesi ragionevole per popolazioni di batteri o animali in condizioni ideali: ambiente illimitato, nutrimento adeguato, assenza di predatori, immunità da malattie.

[42] Per dare senso alle considerazioni che seguono si deve supporre che la popolazione sia molto numerosa, anzi, a rigore, sarebbe necessario sostituire la situazione reale (di una popolazione numerosa ma pur sempre finita) con una schematizzazione nel continuo.

[43] Ossia la stessa del decadimento dei neutroni o radioattivo, ma anche dell'aumento di un capitale investito a un tasso di interesse composto continuo, della crescita della massa di una cellula posta in un ambiente ideale.

L'equazione differenziale lineare ordinaria $\frac{dy(t)}{dt}=\mathbf{k}y(t)$ che descrive fenomeni $y(t)$ il cui tasso di variazione è in ogni istante t proporzionale a $y(t)$, è detta *legge di crescita narurale* se $\mathbf{k}>0$, *legge di decadimento* se $\mathbf{k}<0$.

[44] Se a un certo istante la popolazione supera il valore K, dovrà cominciare a decrescere verso K, avremo cioè:

$$\frac{dP}{dt}=kP \quad \text{finché}\, P\ll K,\ \frac{dP}{dt}<0 \quad \text{se}\, P>K.$$

[45] Perché tiene conto del fatto che in uno stesso ambiente spesso convivono *prede* (e.g. conigli, pesci, afidi, batteri) e *predatori* (e.g. lupi, pescicani, cimici, amebe) costituendo le prime il cibo per i secondi.

assenza degli altri è espressa da:

$$\frac{dR}{dt} = kR,\ k > 0, \quad \frac{dW}{dt} = -rW,\ r > 0.$$

L'interazione fra R e W è regolata dal fatto che le rispettive crescite sono proporzionali a entrambe le popolazioni, ossia al prodotto RW, si hanno quindi le *equazioni prede-predatori di Lotka-Volterra:*

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = kR - aRW & a \in \mathbb{R}_+ \\ \frac{dW}{dt} = -rW + bRW & b \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Per trovare la soluzione di equilibrio (ossia R e W costanti) basta annullare le $\frac{dR}{dt}, \frac{dW}{dt}$. Espletiamo i calcoli con $k = 0.08, a = 0.001, r = 0.02, b = 0.00002$, si ha:

$$\begin{cases} 0 = 8 \cdot 10^{-2}R - 10^{-3}RW, \\ 0 = -2 \cdot 10^{-2}W + 2 \cdot 10^{-5}RW, \end{cases}$$

da cui, escludendo la soluzione banale $R = 0 = W$, ci si riconduce a un sistema di Cramer (ossia con un'unica soluzione), $W = 80, R = 10^3$.

Pensando W come funzione di R, si ha un'unica equazione differenziale:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dR} \cdot \frac{dR}{dt}, \quad \text{ossia:} \quad \frac{dW}{dR} = \frac{\frac{dW}{dt}}{\frac{dR}{dt}} = \frac{-rW + bRW}{kR - aRW}.$$

9. *(Modelli di diffusione di un'epidemia*[46]*)* Dette $y(t)$ la porzione di popolazione già contagiata all'istante t e $1 - y(t)$ quella della popolazione non ancora contagiata al medesimo istante t[47], si arriva all'equazione differenziale:

$$y' = ay(1 - y), \quad a \text{ costante, tasso istantaneo di diffusione dell'epidemia,}$$

il cui integrale generale è: $y = \frac{1}{1+Ce^{-ax}}$[48].

10. *(Legge allometrica*[49]*)* Detti rispettivamente $x(t), y(t)$ i volumi (o i pesi) di due organi di uno stesso individuo all'istante t, le quantità $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}, \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}$ risultano proporzionali secondo un fattore k[50], nella relazione:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = k\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}.$$

Notiamo che in quest'equazione differenziale compaiono tre variabili: t (variabile indipendente) e $x(t), y(t)$ (variabili dipendenti), si dimostra che in realtà è possibile eliminare la t pervenendo a un'equazione differenziale della forma:

$$\frac{dy}{dx} = k\frac{y}{x}{}^{51},$$

[46]Nell'ipotesi che la velocità di diffusione sia proporzionale sia alla porzione di popolazione già contagiata sia alla porzione non ancora contagiata, otteniamo un ulteriore caso di equazione differenziale logistica.

[47]Per comodità il totale della popolazione è pensato normalizzato a 1.

[48]Come risulterà dalla risoluzione delle equazioni differenziali del 1° ordine a varaibili separabili.

[49]È noto che due organi diversi di uno stesso individuo (e.g. cervello e fegato) crescono in genere con velocità diverse, indagini sperimentali suggeriscono tuttavia che ∃ una notevole relazione tra le velocità di crescita dei due organi.

[50]Che dipende dalla coppia di organi considerata e non dal tempo!

[51]Si osservi che in tal modo la variabile indipendente non è piú il tempo, ma lo è diventata il volume di uno dei due organi, mentre il volume dell'altro organo è diventato la sola variabile dipendente.

la soluzione generale di questa equazione differenziale che, *(separando le variabili)*, possiamo scrivere $\frac{dy}{y} = k\frac{dx}{x}$, è $\lg y = k \lg x$, ossia $y = Cx^k$.

5. Equazioni differenziali del $1°$ ordine a variabili separabili

DEFINIZIONE 5.1. Un'equazione differenziale del 1° ordine

$$y'(x) = f(x, y) \quad \text{con} \quad f(x, y) = Q(x)R(y) \qquad (\blacktriangleright)$$

è detta *a variabili separabili,* infatti, se $R(y) \neq 0$, otteniamo

$$\frac{dy}{R(y)} = Q(x)dx \quad \text{e quindi} \quad \int \frac{dy}{R(y)} = \int Q(x)dx$$[52].

OSSERVAZIONE 5.2. Dette rispettivamente $W(y)$ e $G(x)$ due primitive del 1° e 2° membro, risulta $W(y) = G(x) + C$[53], se W è invertibile si ottiene $y(x) = W^{-1}(G(x) + C)$, inoltre, se $y(x_0) = y_0$, da $y_0 = W^{-1}(G(x_0) + C)$ si ricava $C = W(y_0) - G(x_0)$.

ESEMPIO 5.3. (1) Dato il P.d.C.

$$\begin{cases} y'(x) = (x+1)e^{-y} & x \in (0, +\infty) \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

si ha: $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{e^y}$ da cui $\int e^y dy = \int (x+1)dx$, quindi $e^y = \frac{x^2}{2} + x + C$, ossia:

$$\begin{matrix} y = \lg(\frac{x^2}{2} + x + C) \\ y(0) = 0 \end{matrix} \quad \text{ossia} \quad \begin{matrix} y = \lg(\frac{x^2}{2} + x + C) \\ 0 = \lg C \end{matrix}$$

da cui $C = 1$ e $y = \lg(\frac{x^2}{2} + x + 1)$.

(2) Determinare quali sono le linee piane per le quali la tangente forma un medesimo angolo α con una retta fissa (e.g. l'asse x).

L'equazione differenziale che descrive il problema è:

$$\frac{dy}{dx} = \tan\alpha,$$

cioè $dy = \tan\alpha dx$, ossia $y = x\tan\alpha + C$,
pertanto, le linee cercate sono rette.

(3) Determinare per quali linee piane il coefficiente angolare della tangente alla curva in un punto della linea è sempre uguale al rapporto fra le coordinate x e y del punto.

L'equazione differenziale che descrive il problema è:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y},$$

cioè $ydy = xdx$, ossia $\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$, e quindi

$$x^2 - y^2 = C', \begin{cases} C' = 0 & 0 = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y), \quad \text{bisettrici degli assi} \\ C' \neq 0 & \text{iperboli equilatere con asintoti le bisettrici degli assi.} \end{cases}$$

[52] Se riconsideriamo gli esempi concreti di equazioni differenziali via via descritti ci accorgiamo che molti di essi erano a variabili separabili.

[53] Integrale generale in forma implicita di ($\blacktriangleright$).

6. Equazioni differenziali del 1° ordine omogenee

Definizione 6.1. Un'equazione differenziale del 1° ordine

$$y'(x) = f(x,y), \quad \text{in cui}, \quad f(tx,ty) = f(x,y)^{54} \qquad (◀)$$

è detta *omogenea (di grado 0)*.

Esempio 6.2. Le funzioni seguenti sono tutte omogenne di grado 0, $f(x,y) = \frac{y-x}{y+x}$, $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy}$, $f(x,y) = \lg x - \lg y$.

Osservazione 6.3. In particolare, se $f(x,y)$ è una funzione omogenea di grado 0 e $t = \frac{1}{x}, x \neq 0$, si ha che:

$$f(x,y) = f\left(x \cdot \frac{1}{x}, y \cdot \frac{1}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

da cui, ponendo $v = \frac{y}{x}$, cioè $y = vx$ si ottiene $y' = v'x + v$ e quindi l'equazione data (◀) diventa

$$x \cdot \frac{dv}{dx} = f(1,v) - v,$$

$$\frac{dv}{f(1,v) - v} = \frac{1}{x}dx,$$

ossia, un'equazione a variabili separabili.

Esempio 6.4. (1) Data $y' = \frac{y-x}{y+x}$ scriviamo $y' = \frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}$ da cui, ponendo come sopra $v = \frac{y}{x}$, cioè $y = vx$ e $y' = v'x + v$, si ottiene $x\frac{dv}{dx} = \frac{v-1}{v+1} - v$, ossia $x\frac{dv}{dx} = -\frac{v^2+1}{v+1}$, si ha quindi:

$$\int \frac{v+1}{v^2+1}dv = -\int \frac{1}{x}dx,$$

da cui $\frac{1}{2}\int \frac{d(v^2+1)}{v^2+1} + \int \frac{1}{v^2+1}dv = -\lg|x| + C$, ossia
$\frac{1}{2}\lg(1+v^2) + \arctan v = -\lg|x| + C$ e, sostituendo v con $\frac{y}{x}$,
$\frac{1}{2}\lg(\frac{x^2+y^2}{x^2}) + \arctan\frac{y}{x} = -\lg|x| + C$ o anche $\frac{1}{2}\lg(x^2+y^2) - \frac{1}{2}\lg x^2 + \arctan\frac{y}{x} = -\lg|x| + C$,
da cui, essendo $\lg x^2 = 2\lg|x|$,
$\frac{1}{2}\lg(x^2+y^2) + \arctan\frac{y}{x} = C$.

(2) Riprendiamo l'equazione di Es.1.9(3), $y' = \frac{y^2-x^2}{2xy}$ e scriviamo $y' = \frac{\frac{y^2}{x^2}-1}{2\frac{y}{x}}$, da cui con le solite sostituzioni, $x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2-1}{2v} - v$, $x\frac{dv}{dx} = -\frac{v^2+1}{2v}$ e quindi $-\frac{2vdv}{v^2+1} = \frac{dx}{x}$, da cui integrando si ottiene $\lg|x| = -\lg(v^2+1) + \lg D$, ossia $x = \frac{D}{v^2+1}$ e , sostituendo v con $\frac{y}{x}$,
$x = \frac{D}{\frac{y^2}{x^2}+1} \therefore x = \frac{Dx^2}{y^2+x^2} \therefore y^2 + x^2 = Dx$, che, per $D = 2c$ è proprio l'equazione della circonferenza di centro $C(0,c)$ passante per $O(0,0)$.

(3) Risolvere il P.d.C. $\begin{cases} y'(x) = \frac{x}{y} + 2\frac{y}{x} & x \in [1, +\infty) \\ y(1) = 1 \end{cases}$.

[54]Una funzione siffatta è detta *omogenea di grado* 0, piú in generale, se vale $f(tx,ty) = t^d f(x,y)$, $f(x,y)$ è detta *funzione omogenea di grado d*.

Riscrivendolo nella forma $\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{\frac{y}{x}} + 2\frac{y}{x} & x \in [1, +\infty) \\ y(1) = 1, \end{cases}$ possiamo operare la solita sostituzione $v = \frac{y}{x}$, e otteniamo $\begin{cases} v'x + v = \frac{1}{v} + 2v \\ v(1) = 1 \end{cases}$, siamo cosí di fronte all'equazione $\frac{dv}{dx}x = \frac{1+v^2}{v}$, o anche $\frac{v}{v^2+1}dv = \frac{dx}{x}$ e, integrando si ottiene: $\int_1^v \frac{sds}{s^2+1} = \int_1^x \frac{dt}{t}$, ossia $\left[\frac{1}{2}\lg(1+s^2)\right]_1^{v(x)} = [\lg|t|]_1^x$, da cui $\frac{1}{2}\left[\lg(1+v^2) - \lg 2\right] = \lg|x|$ e poi $\frac{1}{2}\lg\frac{(1+v^2)}{2} = \lg x$, infatti $x > 0$, e quindi $\sqrt{\frac{(1+v^2)}{2}} = x$, da cui $1+v^2 = 2x^2$ o anche $v = \sqrt{2x^2-1}$, finalmente $\frac{y}{x} = \sqrt{2x^2-1}$ fornisce $y = x\sqrt{2x^2-1}$.

7. Equazioni differenziali (lineari) ordinarie del 2° ordine

Definizione 7.1. Un'*equazione differenziale lineare del* 2° *ordine* è un'equazione differenziale della forma

$$y''(x) + P_1(x)y'(x) + P_2(x)y(x) = R(x) \ \ (\blacktriangle)^{55},$$

con $P_1(x), P_2(x), R(x)$ funzioni note della variabile indipendente su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$.

Noi considereremo solo equazioni della forma

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = R(x) \ \ (\blacktriangle'),$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, se $R(x) = 0$ l'equazione è detta *omogenea*.

Data $(\blacktriangle')$, consideriamo l'equazione omogenea associata

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \ \ (\blacktriangle''),$$

dobbiamo distinguere diversi casi a seconda dei valori di a e b.

(1) Se $a = b = 0$, $(\blacktriangle'')$ diventa $y''(x) = 0$, quindi $y'(x) = c_1$ e $y(x) = c_1x + c_2$.
(2) $a = 0, b \neq 0$, $(\blacktriangle'')$ diventa $y''(x) + by(x) = 0$, e (vedi Problema (3)) bisogna distinguere
$\begin{cases} 0 > b = -k^2 \Longrightarrow y''(x) = k^2y(x) \quad \text{e} \quad y(x) = c_1e^{kx} + c_2e^{kx}, \\ 0 < b = k^2 \Longrightarrow y''(x) = -k^2y(x) \quad \text{e} \quad y(x) = c_1\cos kx + c_2\sin kx, \end{cases}$
e in entrambi i casi si ha l'unicità della soluzione per $y(0)$ e $y'(0)$ dati.
(3) $a \neq 0, b = 0$, questo caso è stato trattato in Es. 1.7, ottenendo $y(x) = c_1e^{ax} + c_2$.
(4) $ab \neq 0$, posto $d = a^2 - 4b$, detto *discriminante,* $(\blacktriangle'')$ si riconduce al caso (2); siano infatti u, v tali che $y = uv$, si ha:
$y' = u'v + uv'$,
$y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv''$,
sostituendo queste espressioni in $(\blacktriangle'')$ si ottiene:

$$\begin{aligned} 0 &= u''v + 2u'v' + uv'' + a(u'v + uv') + buv = \\ &= vu'' + (2v' + av)u' + (v'' + av' + bv)u \end{aligned}$$

se $v' = -\frac{a}{2}v$ (e.g. $v = e^{-\frac{a}{2}x}$) si ha $v'' = \frac{a^2}{4}v$, da cui

[55]Osserviamo che per questo tipo di equazioni si ha un teorema di $\exists!$ soluzione, ma $\nexists$ formula risolutiva tranne che per $P_1(x) = a = cost.$, $P_2(x) = b = cost.$.

$0 = vu'' + 0u' + \left(\frac{a^2}{4}v - \frac{a^2}{2}v + bv\right)u = v\left(u'' + \frac{4b-a^2}{4}u\right)$, ossia, posto $d = ab - a^2$, siccome v non è mai nulla,

$$u'' - \frac{d}{4}u = 0 \ \ (\blacktriangledown)$$

e y soddisfa $(\blacktriangle'')$ se e solo se u soddisfa $(\blacktriangledown)$, pertanto, la soluzione di $(\blacktriangle'')$ con $ab \neq 0$ è

$$y(x) = e^{-\frac{a}{2}x}(c_1u_1(x) + c_2u_2(x)),$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e $u_1(x), u_2(x)$ soluzioni di $(\blacktriangledown)$, ossia per

$$\begin{array}{llll} d = 0, & u_1(x) = x & u_2(x) = 1 & \\ d > 0, & u_1(x) = e^{kx} & u_2(x) = e^{-kx} & k = \frac{1}{2}\sqrt{d} \\ d < 0, & u_1(x) = \cos kx & u_2(x) = \sin kx & , \end{array}$$

o anche, posto $v_1(x) = e^{-\frac{a}{2}x}u_1(x), v_2(x) = e^{-\frac{a}{2}x}u_2(x)$, al variare di d come sopra,

$$y(x) = c_1v_1(x) + c_2v_2(x)$$

è l'integrale generale di $(\blacktriangle'')$.

7.1. Metodo di variazione delle costanti di Lagrange(1736-1813).

Torniamo ora alla generica equazione lineare a coefficienti costanti $y''(x)+ay'(x)+by(x) = R(x)$ $(\blacktriangle')$.

Dati $a, b \in \mathbb{R}$, $\forall\ f \in C^2(\mathbb{R})$ poniamo

$$L(f) := f'' + af' + bf,$$

per le proprietà delle derivate, $\forall\ f_1, f_2 \in C^2(\mathbb{R}), c \in \mathbb{R}$, risulta:

$$\begin{aligned} L(f_1 + f_2) &= (f_1 + f_2)'' + a(f_1 + f_2)' + b(f_1 + f_2) = \\ &= f_1'' + af_1' + bf_1 + f_2'' + af_2' = bf_2 = L(f_1) + L(f_2), \end{aligned}$$

$$L(cf) = (cf)'' + a(cf)' + bcf = cf'' + acf' + bcf = cL(f),$$

(linearità dell'operatore $L : C^2(\mathbb{R}) \longrightarrow C^2(\mathbb{R})$*).*

L'equazione $(\blacktriangle')$ diventa allora $L(y) = R(x)$, inoltre, se y_1, y_2 sono due soluzioni di $(\blacktriangle')$ si ha: $L(y_1 - y_2) = L(y_1) - L(y_2) = R(x) - R(x) = 0$, ossia $y_1 - y_2$ è soluzione dell'equazione omogenea associata $(\blacktriangle'')$, vale cioè

$$y_1(x) - y_2(x) = c_1v_1(x) + c_2v_2(x),$$

per cui

$$y_1(x) = y_2(x) + c_1v_1(x) + c_2v_2(x),$$

è l'integrale generale di $(\blacktriangle')$ dove $y_2(x)$ ne è un integrale particolare[56].
Non ci resta quindi altro da fare che costruire un integrale particolare di $(\blacktriangle')$.

Definizione 7.2. Date $v_1(x), v_2(x) \in C^1(\mathbb{R})$ il *Wronskiano*[57] di $v_1(x), v_2(x)$ è

$$W(x) := v_1(x)v_2'(x) - v_1'(x)v_2(x)^{58}.$$

[56]Del quale occorre verificare l'esistenza.
[57]Dal cognome del matematico polacco J.M. Hoene-Wronski (1778-1853)
[58]Si verifica che $W(x) \neq 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Metodo di variazione delle costanti 7.3. Noi cercheremo di determinare due funzioni $t_1(x), t_2(x)$ tali che

$$y_2(x) := t_1(x)v_1(x) + t_2(x)v_2(x) \quad \text{soddisfi} \quad L(y_2(x)) = R(x),$$

si ha:
$y_2' = t_1v_1' + t_2v_2' + t_1'v_1 + t_2'v_2,$
$y_2'' = t_1v_1'' + t_2v_2'' + t_1'v_1' + t_2'v_2' + (t_1'v_1 + t_2'v_2)',$

$$\begin{array}{rcl} L(y_2) & = & y_2'' + ay_2' + by_2 = t_1v_1'' + t_2v_2'' + t_1'v_1' + t_2'v_2' + (t_1'v_1 + t_2'v_2)' + \\ + & & a(t_1v_1' + t_2v_2' + t_1'v_1 + t_2'v_2) + b(t_1v_1 + t_2v_2) = \\ & = & t_1(v_1'' + av_1' + bv_1) + t_2(v_2'' + av_2' + bv_2) + t_1'v_1' + t_2'v_2' + (t_1'v_1 + t_2'v_2)' + \\ & + & a(t_1'v_1 + t_2'v_2) \end{array}$$

siccome

con $v_1''+av_1'+bv_1 = 0, v_2''+av_2'+bv_2 = 0$, affinché $L(y_2) = R$, possiamo scegliere $\begin{cases} t_1'v_1 + t_2'v_2 = 0 \\ t_1'v_1' + t_2'v_2' = R \end{cases}$
sistema lineare nelle incognite t_1', t_2' il cui determinante è

$$v_1v_2' - v_1'v_2 = W(v_1, v_2) \text{ nonnullo!},$$

quindi il sistema ha un'unica soluzione

$$t_1' = -v_2\frac{R}{W}, \; t_2' = v_1\frac{R}{W}.$$

Esempio 7.4. Dato il problema $\begin{cases} y''(x) + y(x) = \sin x & \text{su } (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ y'(0) = y(0) = 1 \end{cases}$
si ha
$v_1(x) = \cos x, v_2(x) = \sin x, W(x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$
$t_1(x) = -\int \sin^2 x dx = \int \frac{\cos 2x - 1}{2} dx = \frac{1}{4}\int \cos 2x d(2x) - \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x,$
$t_2(x) = \int \cos x \sin x dx = \int \frac{\sin 2x}{2} dx = \frac{1}{4}\int \sin 2x d(2x) = -\frac{1}{4}\cos 2x,$

$$\begin{array}{rcl} y_2(x) & := & = t_1(x)v_1(x) + t_2(x)v_2(x) = (\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x)\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x \sin x \\ & = & (\frac{1}{4}\sin x\left[2\cos^2 x - (\cos^2 x - \sin^2 x)\right] - \frac{1}{2}x\cos x = \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{2}x\cos x, \end{array}$$

verifichiamo la correttezza del risultato:
$y_2'(x) = -\frac{1}{4}\cos x + \frac{1}{2}x\sin x$, e $y_2''(x) = \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{2}x\cos x$, da cui,
$y_2'' + y_2 = \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{2}x\cos x = \sin x.$

7.2. Casi speciali di integrali particolari per $y''(x) + ay'(x) + by(x) = R(x)$.

I caso: $R(x)$ è un polinomio di grado n, se $b \neq 0$, $\exists$ soluzione polinomiale

$$y_2(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

(per la quale occorre determinare i coefficienti procedendo come in Es.3.3(3)).
L'integrale generale è ottenuto sommando la soluzione polinomiale trovata all'integrale generale dell'equazione omogenea associata.

(1) Riprendiamo l'equazione $y'' + y = x^3$ di Es.3.3(3), il cui integrale generale abbiamo visto essere $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^3 - 6x$, il metodo di variazione delle costanti fornisce:

$$\begin{aligned}
t_1(x) &= -\int \sin x \cdot x^3 dx = x^3 \cos x - 3\int x^2 \cos x dx = \\
&= x^3 \cos x - 3\left[x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx\right] = \\
&= x^3 \cos x - 3x^2 \sin x + 6\int x \sin x dx = \\
&= x^3 \cos x - 3x^2 \sin x + 6\left[-x \cos x + \int \cos x dx\right] = \\
&= x^3 \cos x - 3x^2 \sin x - 6x \cos x + 6 \sin x = \\
&= (x^3 - 6x)\cos x + (6 - 3x^2)\sin x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_2(x) &= \int \cos x \cdot x^3 dx = x^3 \sin x \cos x - 3\int x^2 \sin x dx = \\
&= x^3 \sin x + 3\left[x^2 \cos x - \int 2x \cos x dx\right] = \\
&= x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6\int x \cos x dx = \\
&= x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6\left[-x \sin x - \int \sin x dx\right] = \\
&= x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x = \\
&= (x^3 - 6x)\sin x + (3x^2 - 6)\cos x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= (x^3 - 6x)\cos^2 x + (6 - 3x^2)\sin x \cos x + \\
&+ (x^3 - 6x)\sin^2 x + (3x^2 - 6)\sin x \cos x = \\
&= (x^3 - 6x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = x^3 - 6x,
\end{aligned}$$

ossia lo stesso polinomio calcolato direttamente.

Osservazione 7.5. Se $b = 0$ l'equazione $y''(x) + ay'(x) = R(x)$[59] ammette una soluzione polinomiale di grado
$n + 1$ se $a \neq 0$,
$n + 2$ se $a = 0$.

II caso: $R(x) = p(x)e^{mx}, p(x)$ polinomio di grado $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{R}$.
Ponendo $y(x) = u(x)e^{mx} \quad (\star)$,
siccome: $y'(x) = u'(x)e^{mx} + mu(x)e^{mx}$,
$y''(x) = u''(x)e^{mx} + mu'(x)e^{mx} + mu'(x)e^{mx} + m^2u(x)e^{mx}$,
si ha:

$$u''(x)e^{mx} + (2m + a)u'(x)e^{mx} + (am + m^2 + b)u(x)e^{mx} = p(x)e^{mx},$$

con $e^{mx} \neq 0$, $\forall\ x$, ossia:

$$u''(x) + (2m + a)u'(x) + (am + m^2 + b)u(x) = p(x) \quad (\bigstar)$$

che, per il *caso I* ammette soluzione polinomiale $u_2(x)$[60].

[59] Con $R(x)$ polinomio di grado n.

[60] Di grado n se $am + m^2 + b \neq 0; n + 1$ se $am + m^2 + b = 0, 2m + a \neq 0; n + 2$ se $am + m^2 + b = 0, 2m + a = 0$.

L'equazione data ammette allora una soluzione particolare $y_2(x) = u_2(x)e^{mx}$.
III caso: $R(x) = p(x)e^{mx}\cos\alpha x$ o $R(x) = p(x)e^{mx}\sin\alpha x$, con lo stesso metodo *dei coefficienti indeterminati* si costruisce un integrale particolare del tipo $y_2(x) = e^{mx}[q(x)\cos\alpha x + r(x)\sin\alpha x]$ con $p(x), r(x)$ polinomi.