

applicazioni della matematica alla medicina

anno accademico 2013/2014

matematica e medicina - 1

una rivoluzione concettuale:

- nascita e sviluppo dell'era digitale
- corpus computazionale per l'analisi e l'interpretazione dell'informazione digitale

matematica e medicina - 2

1. interrogazione del tessuto per mezzo di radiazione
2. modello dell'interazione radiazione/materia
3. metodi di ricostruzione dei parametri fisici e fisiologici
4. metodi di elaborazione per l'interpretazione delle ricostruzioni

matematica e medicina - 3

ruolo della matematica:

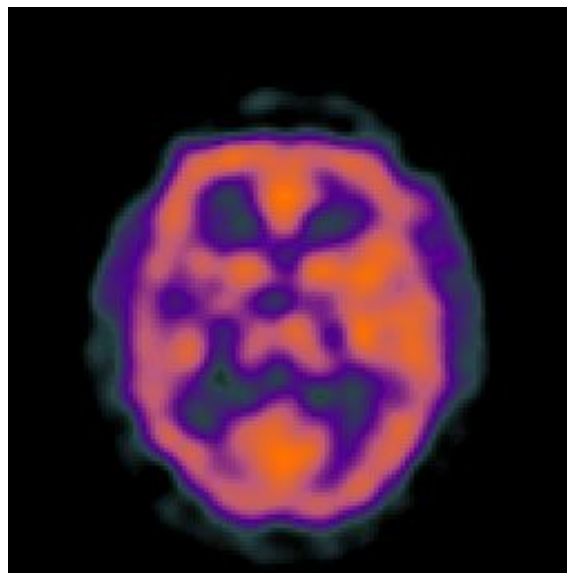
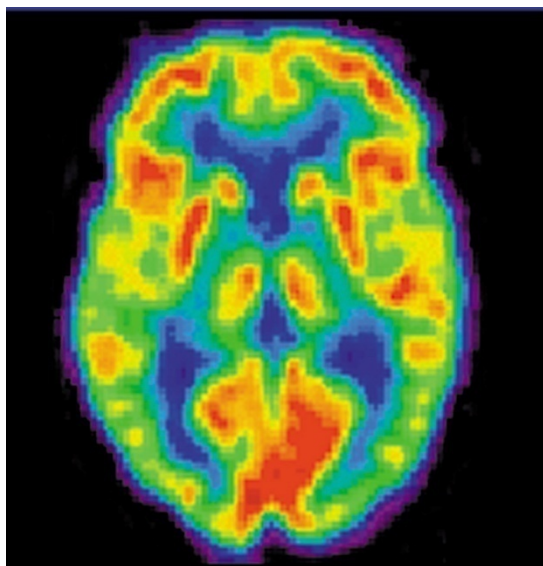
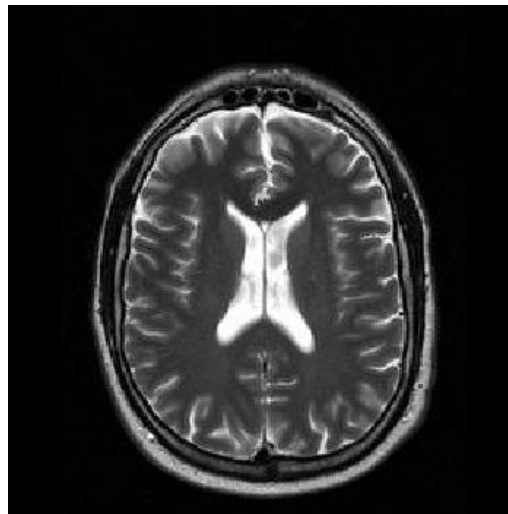
- fisica matematica: modelli integrali e differenziali
 - ✓ modelli di sistemi continui e applicazioni
 - ✓ problemi di scattering
 - ✓ amm
- analisi e statistica: metodi di ricostruzione
 - ✓ amm
 - ✓ problemi di scattering
- statistica, analisi, geometria: post-processing
 - ✓ elaborazione di immagini
 - ✓ IGS (per applicazioni)
 - ✓ soft computing

nomenclatura

multi-modalita':

- ogni modalita' fornisce informazioni su un singolo parametro
- la malattia altera solo alcuni parametri e ne lascia invariati altri
- impatto dell'invasivita'

quattro teste



immagini, matematica e ematologia

mostrare come il calcolo permetta di estrarre da immagini funzionali (pet) e morfologiche (x-ray ct) informazioni sulla distribuzione e l'attività metabolica del midollo osseo

positron emission tomography (pet) - i

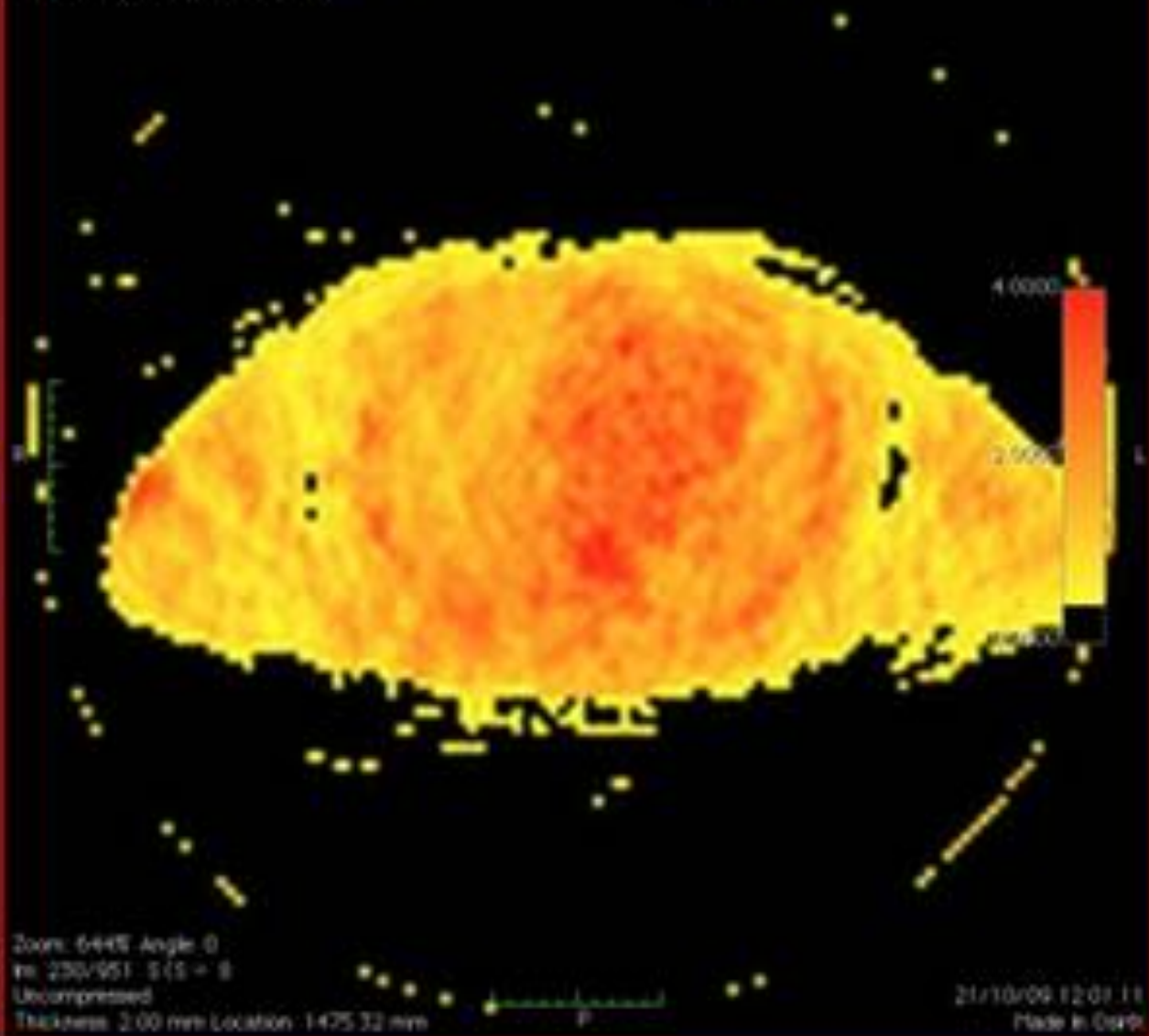
1. un composto chimico (tipicamente uno zucchero) e' marcato con un radionuclide che emette positroni (elettroni positivi)
2. il composto e' iniettato nel soggetto che, dopo un tempo di attesa, e' posizionato nello scanner
3. il radionuclide emette positroni che annichilano con gli elettroni del tessuto biologico ed emettono una coppia di fotoni
4. dalla misurazione della posizione in cui i fotoni colpiscono il rivelatore e' possibile, attraverso la matematica, ricostruire la posizione in cui sono stati emessi

positron emission tomography (pet) - ii

pet in ematologia:

- il valore del pixel e' legato a una misura dell'attivita' metabolica del midollo osseo, ovvero alla sua capacita' di captare lo zucchero marcato con il radionuclide
- i pixel con valore di grigio grande corrispondono a midollo ematopoieticamente attivo (midollo rosso); i pixel con valore di grigio piccolo corrispondono a midollo inerte (midollo giallo)
- la risoluzione spaziale e' cosi' bassa che dalle sole immagini pet e' impossibile distinguere il midollo dai tessuti circostanti

Image size: 128 x 128
View size: 524 x 524
wL: 2.9kV: 4
From: 0.0° (0.00) to: 18.0° (4.00)



tomografia a raggi x (x-ray ct) - i

1. un fascio di raggi x emesso da una sorgente attraversa il tessuto biologico secondo un percorso rettilineo e raggiunge il rilevatore
2. il coefficiente di attenuazione, legato alla densità del tessuto modifica l'intensità del fascio secondo un semplice modello lineare
3. il processo emissione – cammino rettilineo – rilevazione viene ripetuto per molte posizioni della coppia sorgente – ricevente
3. la ricostruzione dell'immagine del tessuto avviene retroproiettando ogni vista, lungo il cammino rettilineo del fascio
4. il valore del pixel (misurato in hounsfield) è proporzionale al coefficiente di attenuazione

LEFT

RIGHT

FRONT

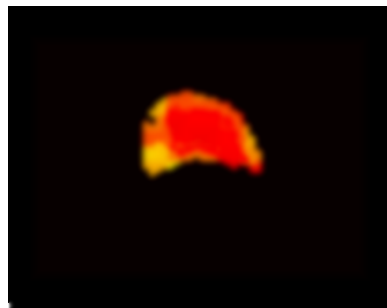
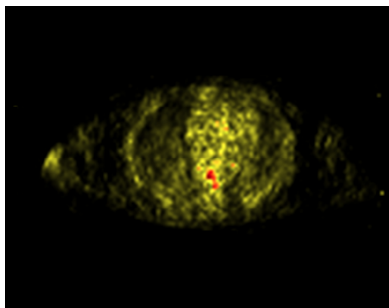
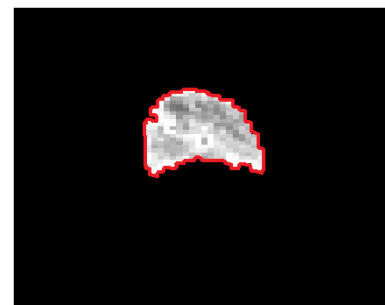
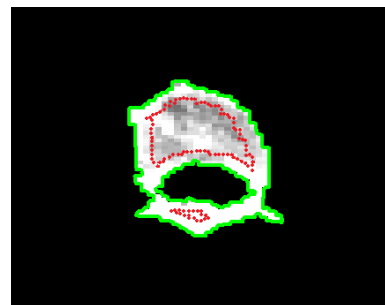
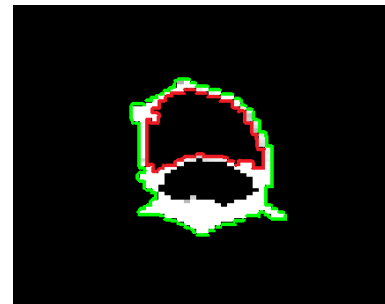
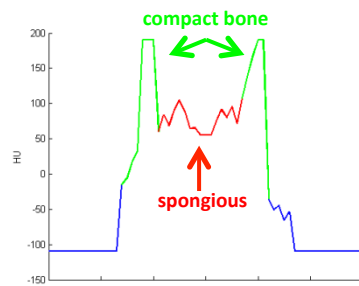
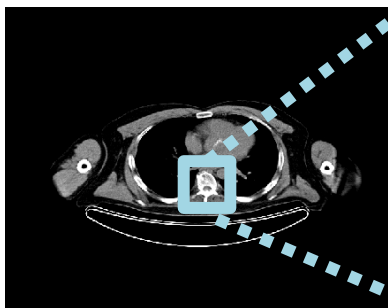
REAR



tomografia a raggi x (x-ray ct) - ii

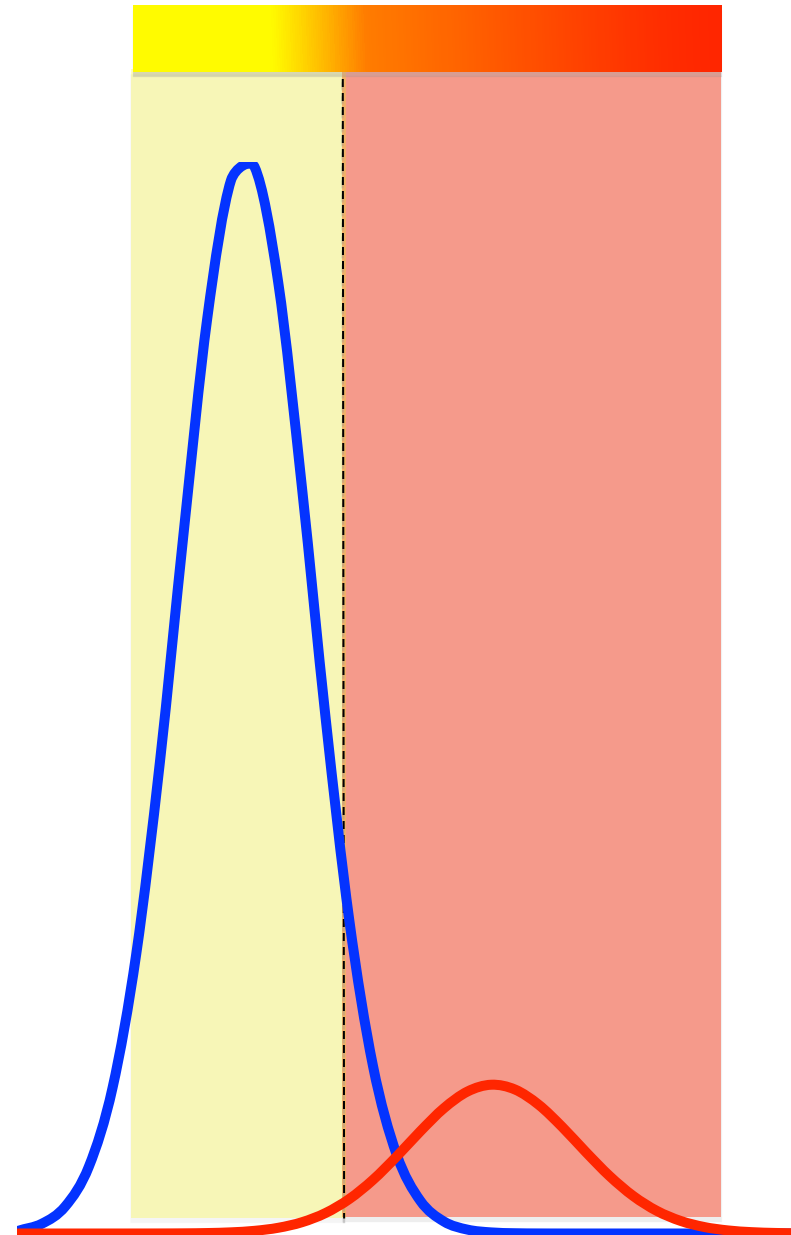
x-ray ct in ematologia:

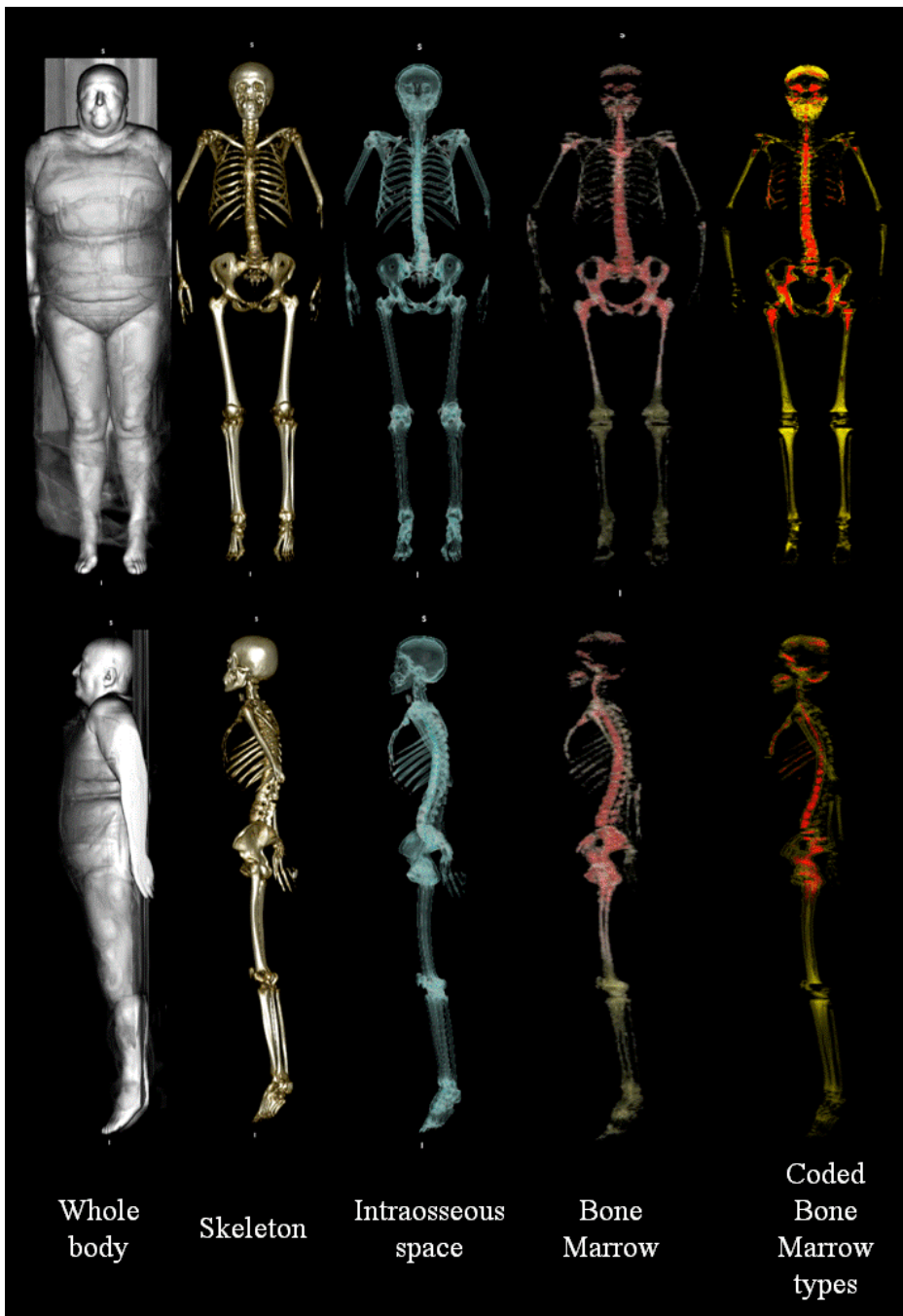
- il coefficiente di attenuazione dell'osso compatto e' molto grande (piu' di 500 hounsfield): una procedura di edge detection permette di distinguere l'osso compatto dagli altri tessuti
- la risoluzione spaziale e' notevole (circa 2 mm): una procedura di sogliatura permette di distinguere lo spazio intraosseo dall'osso compatto e quindi determinare la regione potenzialmente a disposizione del midollo osseo



Thoracic and lumbar vertebrae
Mean SUV 2.2 ± 0.36 , volume 243 ± 24 ml

Rest of the skeleton
Mean SUV 0.96 ± 0.28 , volume 1631 ± 592





morfológico o funzionale?

morfológico (strutturale, anatomico):

- informazioni sull'anatomia
- nessuna informazione sul metabolismo
- alta risoluzione spaziale
- bassa risoluzione temporale

funzionale (dinamico):

- molte informazioni sul metabolismo
- poche informazioni sulla struttura
- bassa risoluzione spaziale
- alta risoluzione temporale

morfologico o funzionale?

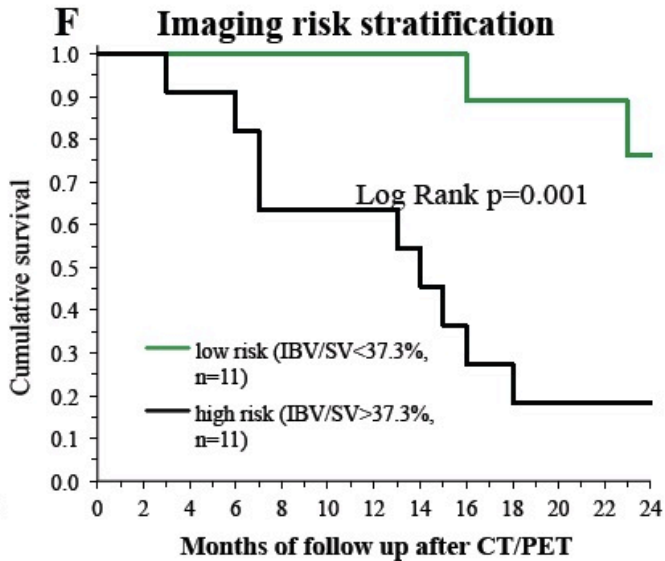
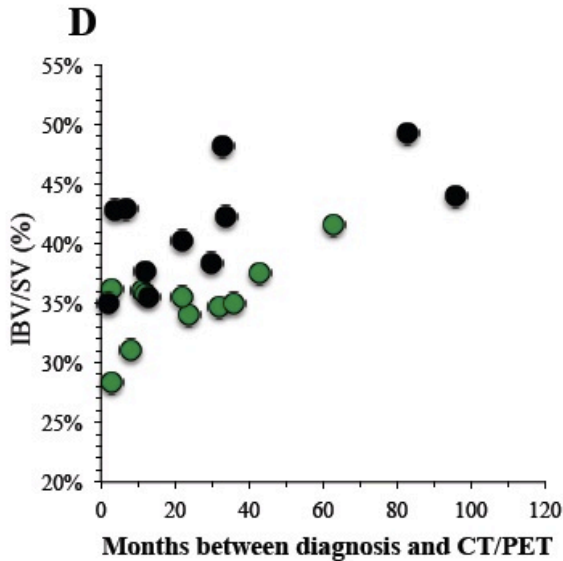
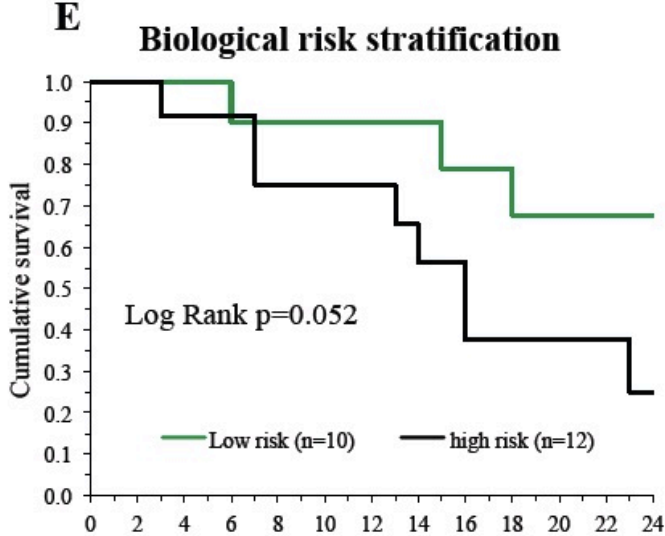
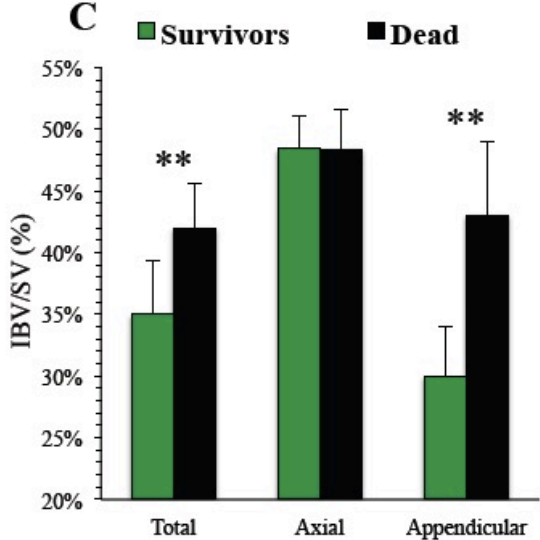
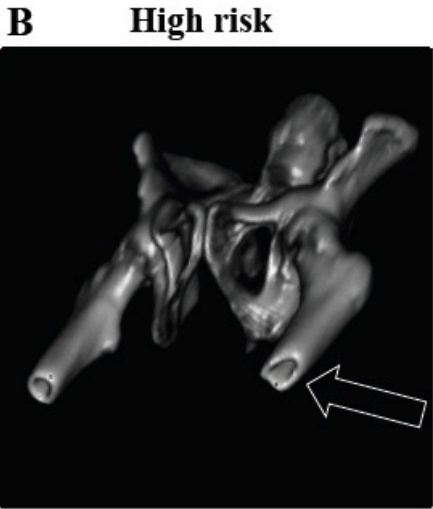
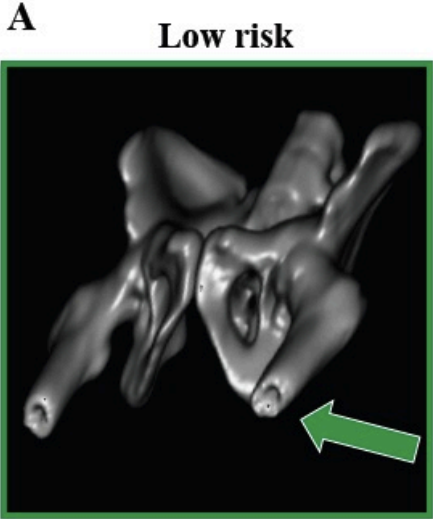
morfologico:

- x-ray ct: densita'
- mri: contenuto d'acqua
- microonde: permittivita' e conduttivita'

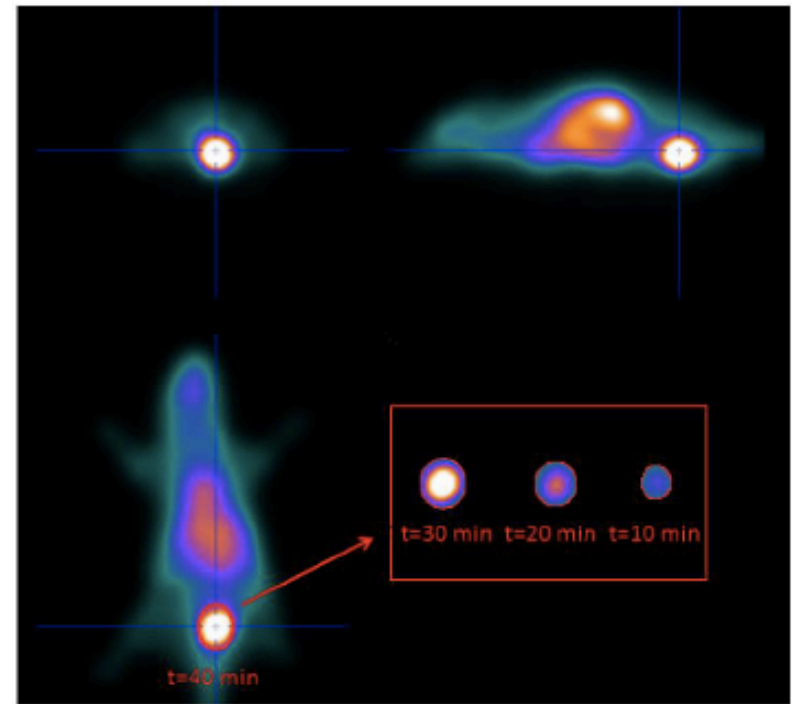
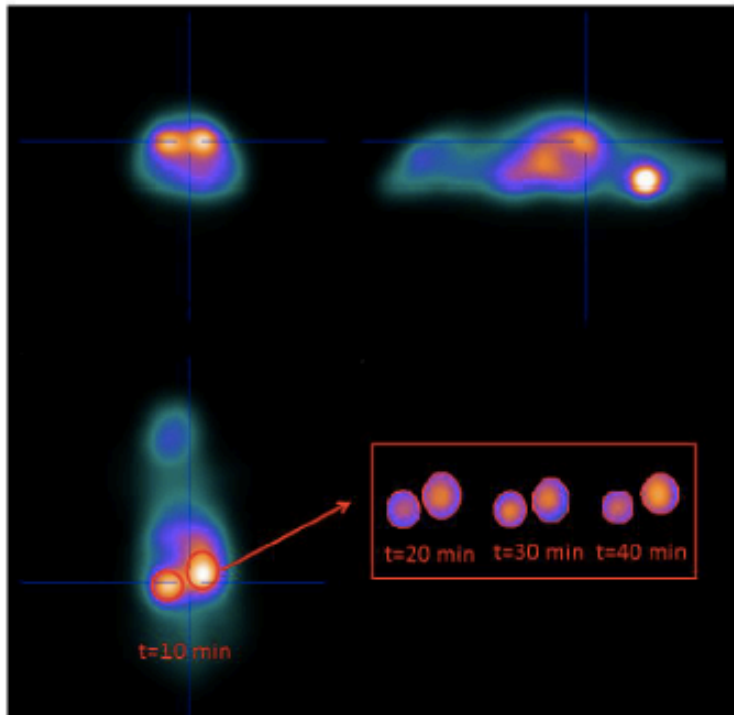
funzionale:

- fmri: consumo di ossigeno
- pet: consumo di zucchero
- meg/eeg: corrente neurale

esempio: morfologico



esempio: funzionale (1)



esempio: funzionale (2)

f: free tracer

b: tracer in the blood

p: phosphorylated (trapped) tracer

t: reabsorbed tracer (in the tubuli)

u: tracer in the urine

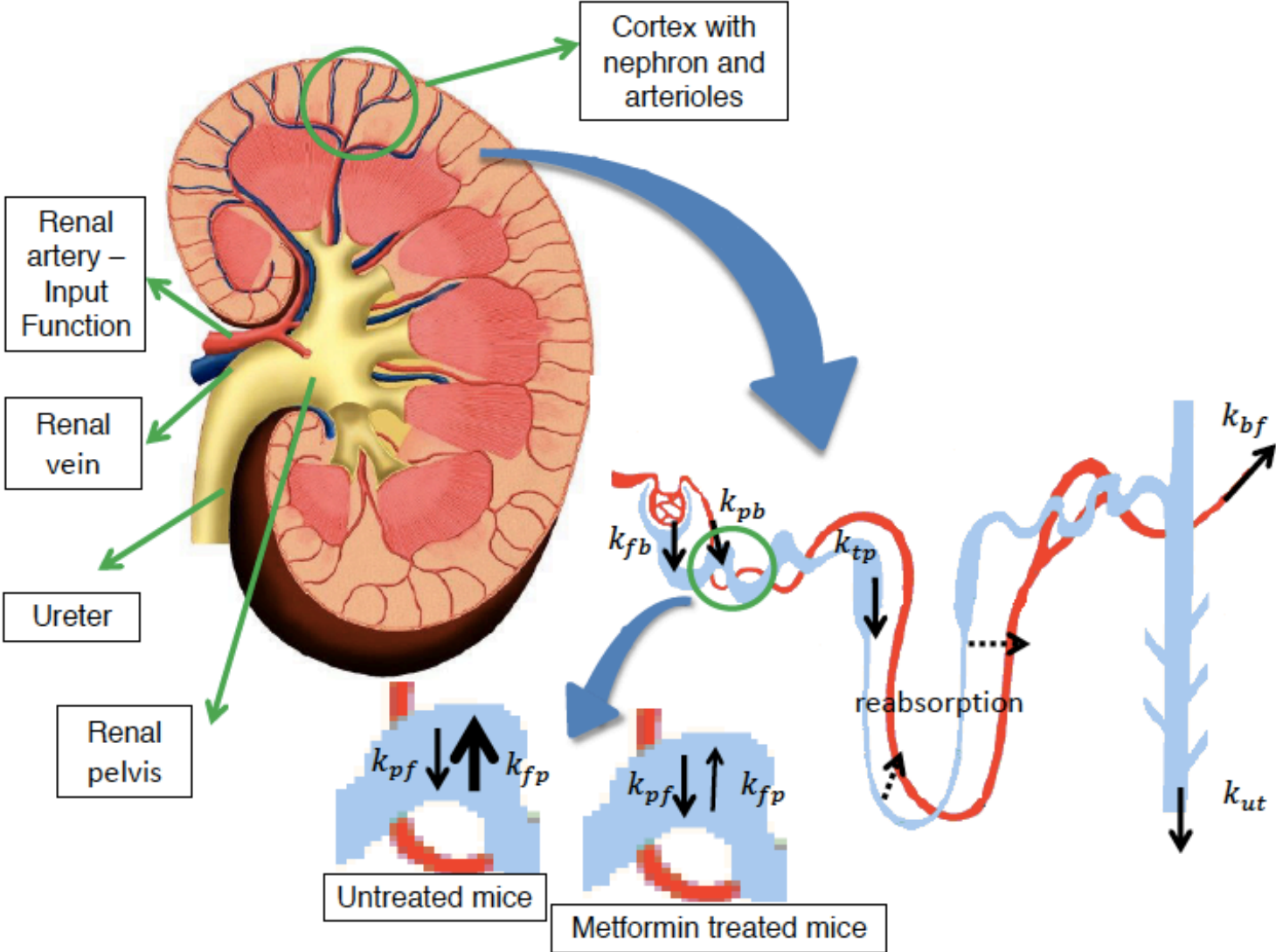
$$\dot{C}_f = -(k_{bf} + k_{pf}) C_f + k_{fp} C_p + k_{fb} C_b,$$

$$\dot{C}_p = k_{pf} C_f - (k_{fp} + k_{tp}) C_p + k_{pb} C_b,$$

$$\dot{C}_t = -k_{ut} C_t + k_{tp} C_p,$$

$$\frac{d}{dt}(V_u C_u) = F_{ut} C_t,$$

esempio: funzionale (3)



programma del corso - 1

il problema della tomografia a raggi x

- modelli di formazione del dato
- trasformata di radon e fourier slice theorem
- formula di inversione
- questioni di localita'
- questioni di unicità
- questioni di analisi funzionale

programma del corso - 2

il problema della magnetoencefalografia (meg):

- equazione di biot-savart
- problemi inversi statistici
- filtro bayesiano
- filtro di kalman
- filtro a particelle

questioni pratiche

- prova di laboratorio obbligatoria: implementazione della fbp
- esame orale
- dispense
- non ci sarà lezione: lunedì 31 marzo – martedì 1 aprile

libri

- dispense on-line
<http://www.dima.unige.it/~piana/insegnamenti.html>
- natterer 1986 'the mathematics of computerized tomography'
- natterer and wuebbeling 2001 'mathematical methods in image reconstruction'
- kaipio and somersalo 2004 'statistical and computational inverse problems'