1 AMMORTAMENTO

AMMORTAMENTO

A fronte di un prestito D a tasso t la somma dovuta dopo un anno (o periodo) e' (1+t) D .
Se al tempo finale il debitore non ha la somma dovuta (1+t) D ma solo P (< D) il debito puo essere rinnovato per la quantita' non pagata (= (1+t)D – P) .
Si suppone le restituzione (1+t) D e il prestito (nuovo) di (1+t) D – P
Il creditore
"riceve" (1+t) D ,
"presta" ((1+t)D – P) (>0) e ha quindi

$$((1+t) D - ((1+t) D - P) = P$$

In molti casi il creditore puo' accontentarsi di non avere un credito maggiore e quindi di ricevere un pagamento di (almeno) t D .
Se l'attivita' del creditore e' quella di effettuare dei prestiti (tipo banca) e' teoricamente indifferente chi e' il debitore a parita' di rischi. Se il debito fosse rinnovato infinite volte il creditore semplicemente trasforma una somma (= D) in una rendita infinita(= t D).

Per il debitore in generale e' conveniente pagare il debito il prima possibile, e quindi conviene pagare sempre una somma P (> t D) in modo da diminuire il debito (e gli interessi futuri).

Se il debitore avesse una somma in eccesso potrebbe versarla in una banca ma normalmente
il tasso di interesse che puo' ricavare e' s < t [la banca e' sempre meno rischiosa del singolo] .

Ad esempio se il debitore ha a disposizione la somma (1+t) D ma versa solo t D rinnovando il debito D dopo un anno(periodo) avra' in banca (1+s) D ma dovra' pagare la somma (1+t) D > (1+s) D .
Al debitore puo' convenire ritardare il pagamento solo in alcuni casi particolari quando si ritiene di poter ricavare un tasso s > t .
[attivita' industriale redditizia in cui il debito fornisce il capitale necessario, investimento rischioso finanziato dal debito…]
o equivalentemente se gli interessi pagati sul debito (= t D) comportano un vantaggio fiscale
[la somma pagata t D diminuisce il reddito e quindi la tassazione …]

Il rinnovo del debito comunque potrebbe non essere concesso ovvero il creditore potrebbe aver bisogno della somma dovuta.
Normalmente quando si riceve un prestito o si ha un debito si stipula un contratto che prevede con chiarezza i futuri pagamenti e l'estinzione del debito in n anni (o entro n anni).
Tale meccanismo si chiama ammortamento del debito o piano di ammortamento.

Equazioni base

Il contratto prevede normalmente

la durata (= n)

il debito iniziale D_0

i futuri pagamenti (rate) R_k ai tempi (futuri) k=1,…n

il tasso applicato t

2 AMMORTAMENTO

Senza pagamenti il debito verificherebbe equazioni del tipo

$$D_1 = D_0 (1 + t)$$

$$D_k = D_{k-1} (1 + t) = D_0 (1 + t)^k$$

in presenza di pagamenti R_k , k=1,…n

si ha invece

$$D_1 = D_0 (1 + t) - R_1$$

e in generale

$$D_k = D_{k-1} (1 + t) - R_k$$

La quantita' D_k indica il debito al tempo k (dopo il pagamento R_k) ed e' chiamata debito residuo al tempo k.

Le condizioni abituali sono

-(estinzione del debito in n periodi) $\Rightarrow$ $D_n = 0$:

-(non vengono mai contratti nuovi debiti) $\Rightarrow$ D_k decrescente :

Ogni singolo pagamento R_k si decompone in due parti ,

I_k detta quota interessi , Q_k detta quota capitale.

$$R_k = I_k + Q_k$$

$$I_k = t D_{k-1} \quad , \quad Q_k = R_k - I_k$$

Se

$$D_k = D_{k-1} (1 + t) - R_k$$

allora

$$D_k = D_{k-1} (1+t) - (I_k + Q_k) = D_{k-1} + t D_{k-1} - I_k - Q_k = D_{k-1} - Q_k$$

e semplicemente

$$Q_k = D_{k-1} - D_k$$

Se D_k non crescente $\Rightarrow$

$$D_k = D_{k-1}(1 + t) - R_k = D_{k-1} - Q_k \leq D_{k-1}$$

e quindi

$$R_k \geq I_k \ , Q_k \geq 0$$

Le rate, generalmente quelle iniziali, per cui vale $R_k = I_k$ si chiamano anche di preammortamento.

Proprieta' Q_k

si ha

$$\Sigma (Q_k) = \Sigma (D_{k-1} - D_k) = D_0$$

3 AMMORTAMENTO
(la relazione segue da $D_n = 0$)

Proprieta' R_k
Si ottiene

$$R_k = I_k + Q_k = t\ D_{k-1} + D_{k-1} - D_k = (1+t)\ D_{k-1} - D_k$$

Il valore attuale al tasso t dei versamenti futuri (rate)

$$\sum_{k=1,n} R_k(1+t)^{-k} = \sum_{k=1,n} \left((1+t)\,D_{k-1} - D_k \right) (1+t)^{-k}$$
$$= \sum_{k=1,n} \left((1+t)^{-(k-1)}\ D_{k-1} - (1+t)^{-k}\,D_k \right)$$

e quindi

$$\sum_{k=1,n} R_k\,(1+t)^{-k} = (D_0 - D_1(1+t)^{-1}) + (D_1(1+t)^{-1} - D_2(1+t)^{-2}) + \dots - D_n(1+t)^{-n}$$

e (somma telescopica)

$$\sum_{k=1,n} R_k(1+t)^{-k} = D_0 - D_n(1+t)^{-n} = D_0$$

Il debito iniziale corrisponde sia alle rate (attualizzate) R_k che alle somme (non attualizzate) delle quote di capitale Q_k

Un qualunque schema di ammortamento puo' essere facilmente calcolato una volta assegnato il debito D_0 , il tasso t , la durata n e o i futuri pagamenti

$$\sum_{k=1,n} R_k(1+t)^{-k} = D_0$$

o le quote di capitale

$$\sum_{k=1,n} (Q_k) = D_0$$

E' quindi possibile generare schemi di ammortamento imponendo condizioni sui valori (e quindi sul debito residuo) o sui pagamenti (e quindi sui valori attuali di tali pagamenti) o, ambedue se compatibili.

Noti i tempi k=1,…n, i valori D_0 (debito iniziale), e il tasso applicato t
se sono noti i valori R_k (futuri pagamenti) si ricavano prima i valori

$$D_k = D_{k-1}\,(1 + t) - R_k$$

e da questi le quantita'

$$Q_k = D_{k-1} - D_k$$

Viceversa noti i valori Q_k si ricavano i prima i valori D_k (ricordare $D_n = 0$) da

$$Q_k = D_{k-1} - D_k$$

e infine i valori R_k (futuri pagamenti) da

$$R_k = D_{k-1} (1 + t) - D_k = Q_k + t D_{k-1}.$$

Calcolo piano ammortamento (in generale)

AMMORTAMENTO Tasso t, n anni, debito D_0	Fissati pagamenti R_k, $\sum_{k=1,n} R_k(1+t)^{-k} = D_0$	Fissate quote capitale Q_k, $\sum (Q_k) = \sum (D_{k-1} - D_k) = D_0$
Deb residuo D_k (pagata rata k),	$\sum_{m=k+1,n} R_m(1+t)^{-m+k}$	$\sum_{m=k+1,n} (Q_m)$
Rata (k-esima)	R_k (assegnata)	(calcolata come) $Q_k + t D_{k-1}$
Quota interessi (rata k)	(calcolata come) $t D_{k-1}$	(calcolata come) $t D_{k-1}$
Quota cap (rata k)	(calcolata come) $R_k - t D_{k-1}$	Q_k (assegnata)

SCHEMI CLASSICI DI AMMORTAMENTO

a) pagamento solo interessi (preammortamento) e rimborso finale del debito

$\forall$ k=1,..n-1 $Q_k = 0$ ($\Rightarrow D_k = D_0$)

$$R_k = I_k = t D_k = t D_0$$

Per n

$$Q_n = D_0$$

$$R_n = I_n + D_0 = tD_{n-1} + D_0 = (1+ t) D_0$$

b) (schema francese) pagamento di una rata costante che estingue il debito
[= rendita periodica a fronte di un capitale D_0]

5 AMMORTAMENTO

Dalla formula $D_k = D_{k-1}(1+t) - R_k$ sapendo $R_k = R$ (costante) e $D_n = 0$

$$0 = D_n = (1+t)\, D_{n-1} - R$$

e usando $D_{n-1} = D_{n-2}(1+t) - R$ si ha

$$0 = D_n = (1+t)\, D_{n-1} - R = (1+t)^2 D_{n-2} - (1+t)\, R - R$$

In generale si ottiene

$$0 = D_n = (1+t)^p\, D_{n-p} - R \sum_{i=0,n-p-1} (1+t)^i$$

da cui

$$0 = D_n = (1+t)^p\, D_{n-p} - (R/t)\ ((1+t)^p - 1)$$

si ha cosi'

$$D_{n-p} = (R/t)\ ((1+t)^p - 1)/ (1+t)^p = (R/t)\ (1- (1+t)^{-p})$$

per p= n si ha

$$D_0 = (R/t)\ ((1+t)^n - 1)/ (1+t)^n = (R/t)\ (1- (1+t)^{-n})$$

e

$$R = (1+t)^n\, (t\, D_0)\ / ((1+t)^n - 1)$$

Assegnato il tasso t, il valore D_0 e il numero degli anni (periodi) il valore R risulta la rendita equivalente a D_0 . e analogamente

Per n-p= k (e p = n-k)

$$D_k = (R/t)\ ((1+t)^{n-k} - 1)/ (1+t)^{n-k}$$

(= rendita R per k periodi) e sostituendo R

$$D_k = D_0\ ((1+t)^n - (1+t)^k)\ /\ ((1+t)^n - 1)$$

Per le quantita' I_k ,Q_k si ha

$$I_k = t\, D_{k-1} = t\, D_0\ ((1+t)^n - (1+t)^{k-1})\ /\ ((1+t)^n - 1)$$

$$Q_k = D_{k-1} - D_{k-1} = (D_0 / ((1+t)^n - 1))\ ((1+t)^k - (1+t)^{k-1}) = (1+t)^{k-1}\ (t D_0) / ((1+t)^n - 1))$$

NOTA

Lo schema francese corrisponde agli abituali schemi per un mutuo a tasso fisso. (In realta' le rate e tassi si riferiscono o semestri o a mesi).

In un mutuo a tasso variabile si possono calcolare in anticipo (con un tasso t0 iniziale) tutti i debiti residui D_k e per i successivi pagamenti R_k si osserva il valore tx del tasso variabile scelto e si calcola semplicemente

$$R_k = D_{k-1}\,(1+tx) - D_k$$

Le varie rate R_k sono in generale diverse, anche se il tasso variabile tx ($\neq$t0) non cambia.

E' anche possibile procedere nel seguente modo: noto al tempo k-1 il debito residuo D_{k-1} e il tasso tx si calcola la rata fissa R(tx) per estinguere il debito con k pagamenti.

6 AMMORTAMENTO
L'operazione permette il calcolo di R_k (= R(tx)) e il valore di D_k (futuro) .

Al tempo successivo (= k) si osserva il tasso $(tx)^+$ e si calcolano i valori di R_{k+1} e D_{k+1} .

Le rate cosi' calcolate restano tutte coincidenti se il tasso tx non cambia.

c) (schema italiano) il capitale viene rimborsato in n quote uguali

$$Q_k = (D_0) / n$$

$$D_k = (1-k/n) D_0$$

e

$$R_k = t D_{k-1} + Q_k = t (n-k+1) D_0 / n + (D_0) / n = D_0 (1+nt-(k-1)t) / n$$

In questo caso $D_k > D_{k+1}$ e $R_k > R_{k+1}$.

AMMORTAMENTO (schemi classici)

AMMORTAMENTO Tasso t, n anni, debito D_0	FRANCESE (rata costante)	ITALIANO (Q_k costante)
Rata (k-esima)	$(t D_0) \quad (1+t)^n / ((1+t)^n -1)$	$D_0 (1+nt-(k-1)t) / n$
Quota interessi (rata k)	$(t D_0)*$ $((1+t)^n - (1+t)^{k-1}) / ((1+t)^n -1)$	$D_0 (1 -(k-1)t) / n$
Quota capitale (rata k)	$(t D_0) *$ $((1+t)^{k-1}) / ((1+t)^n -1)$	$Q_k = (D_0) / n$
Deb residuo D_k (pagata rata k)	$D_0 *$ $((1+t)^n - (1+t)^k) / ((1+t)^n -1)$	$D_k = (1-k/n) D_0$

In ogni schema di ammortamento le quote di capitale Q_k possono essere viste anche come n sottoprestiti.
Il singolo prestito Q_k va rimborsato in k anni pagando gli interessi ($t Q_k$) per gli anni 1..k-1 e interessi piu' capitale $(1+t) Q_k$ per l'anno k .
Si ha infatti

$$Q_k = D_{k-1} - D_k$$

e quindi si possono ricavare i vari debiti

$$D_0 = \Sigma_{k=1,n} (Q_k)$$

$$D_k = D_{k-1} - Q_k$$

ovvero

7 AMMORTAMENTO

$$D_k = \sum_{j=k+1,n} (Q_j)$$

le varie quote interessi sono infatti

$$I_k = t D_{k-1} = t \sum_{j=k,n} (Q_j) = \sum_{j=k,n} (t Q_j)$$

e sono semplicemente il pagamento degli interessi su tutti i sottoprestiti (quote capitale Q_j) o non ancora restituiti ($j > k$) o contemporaneamente restituiti ($j = k$) .

E' finanziariamente equivalente pagare per n anni solo l'interesse sul debito iniziale ($t D_0$) e versare/ritirare da in una banca la differenza ($R_k - t D_0$) . Se la banca paga/richiede un tasso t la somma che si accumula al tempo n permette di saldare il debito (D_0)

Infatti la somma finale presente in banca risulta anno per anno

$$B_1 = R_1 - t D_0$$

$$B_2 = B_1 (1+t) + R_2 - t D_0 = (R_1 - t D_0) (1+t) + R_2 - t D_0$$

$$B_n = \sum_{k=1,n} (R_k - t D_0) (1+t)^{n-k}$$

Usando

$$\sum_{k=1,n} R_k(1+t)^{-k} = D_0$$

si ha

$$\sum_{k=1,n} R_k(1+t)^{n-k} = (1+t)^n D_0$$

e da

$$\sum_{k=1,n} (1+t)^{-k} = (1/t) (1 – (1+t)^{-n})$$

segue

$$\sum_{k=1,n} (t D_0) (1+t)^{n-k} = (1/t) (1 - (1+t)^{-n}) = (D_0) ((1+t)^n -1)$$

e semplicemente

$$B_n = \sum_{k=1,n} (R_k - t D_0) (1+t)^{n-k} = (D_0)$$

In questo modo le quote di capitale Q_j vengono versate in banca ma si continuano a pagare gli interessi ($t Q_j$) su tali quote.
Se il pagamento previsto (R_k) e' minore degli interessi ($t D_0$) si preleva dalla banca la parte mancante ($t D_0 - R_k$)

Se la banca riconoscesse un tasso di interesse $s < t$ considerando separatemente i vari sottoprestiti (quote di capitale) si ottiene immediatamente che in banca si accumulerebbe

$$B_n = \sum_{k=1,n} (R_k - t D_0) (1+s)^{n-k} < (D_0)$$

e quindi pagare $t D_0$ e accumulare per il pagamento ad un tasso $s < t$ non risulta vantaggioso.

<u>Esempio</u>
Un capitale D_0 (al tempo 0) e' rimborsato (ammortamento francese , tasso t) da una rata

8 AMMORTAMENTO

$$R = t D_0 \ (1 - (1 + t)^{-n})^{-1} = t D_0 + t D_0 ((1 + t)^n - 1))^{-1}$$

[segue da $(1 - (1 + t)^{-n}) = ((1 + t)^n -1) / (1 + t)^n$,
$1 - (1 + t)^{-n})^{-1} = (1 + t)^n / ((1 + t)^n -1) = 1 + ((1 + t)^n - 1))^{-1}$]

La parte $t D_0$ (< R) sono gli interessi sul debito. La parte

$$RC = t D_0 \ ((1 + t)^n - 1))^{-1}$$

costituisce una ulteriore rata periodica.

Se la rata aggiuntiva RC fosse versata in un fondo (fondo di ammortamento) e capitalizzata al tasso t verrebbe a costituire al tempo n un capitale

$$CR = \Sigma_{k=1,n} \ (RC) \ (1+t)^{n-k}$$

$$= RC \ (1 + t)^n \quad \Sigma_{i=1,n} \ (1 + t)^{-i}$$

$$= RC \ (1 + t)^n \quad (1/t) \ (1 - (1+t)^{-n})$$

$$= (RC/t) \ ((1 + t)^n - 1)$$

$$= D_0 \ ((1 + t)^n - 1))^{-1} \ ((1 + t)^n - 1) = D_0$$

$\Rightarrow$ il capitale presente nel fondo di ammortamento al tempo n estinguerebbe il debito

Se le somme RC versate nel fondo di ammortamento fossero capitalizzate al tasso s
le rate RC sarebbe moltiplicate per $(1 + s)^k$ invece di $(1 + t)^k$]
e si avrebbe semplicmente
se $s < t \Rightarrow CR < D_0$
se $s > t \Rightarrow CR > D_0$

In un normale ammortamento il creditore opera come “banca” nel senso che riceve delle somme che attualizzate al tasso t ricostruiscono al tempo n il debito iniziale D_0.

Esistono alcuni schemi che usano a vantaggio del creditore tale osservazione (e l’ignoranza del debitore) .

SCHEMA INGLESE (a due tassi)

A fronte di un debito D_0 si paga periodicamente (fino al tempo n) la rata di interessi (tD_0)
Il capitale viene ricostruito invece attraverso pagamenti a_k (uguali ?) che capitalizzati al tasso s ricostruiscono la somma D_0.

$$\Sigma_{k=1,n} \ a_k(1+s)^{n-k} = D_0$$

[s tasso di ricostruzione, t tasso di remunerazione , si suppone $0 < s < t$]

9 AMMORTAMENTO

Il valore attuale (a tasso x) di quanto complessivamente il creditore paga/riceve e' espresso da

$$F(x) = - D_0 + \sum_{k=1,n} a_k (1+x)^{-k} + \sum_{k=1,n} (t D_0) (1+x)^{-k}$$

Se esiste un unico valore x* per cui F(x*) = 0 tale valore corrispnde al tasso effettivamente applicato

Si ossserva che tutte le quantita' ($t D_0$) e (a_k) sono non negative quindi F(x) e'decrescente come somma di funzioni strettamente decrescenti (per x > -1) o sempre nulle (se qualche $a_j = 0$) .
Inoltre si ha che $\lim_{x\to\infty} F(x) < 0$
Puo' esistere al piu' un solo punto x* per cui F(x*) = 0 .
Basta dimostrare che per t (tasso di remunerazione) si ha F(t) >0 allora t < x* (unica soluzione)

Per x > 0 si ha (tD_0 e' una rendita e x il tasso)

$$F(x) = - D_0 + \sum_{k=1,n} a_k(1+x)^{-k} + (t / x)(D_0) (1- (1+x)^{-n})$$

per x = t

$$F(t) = - D_0 + \sum_{k=1,n} a_k(1+t)^{-k} + (D_0) (1- (1+t)^{-n})$$

$$F(t) = \sum_{k=1,n} a_k(1+t)^{-k} - D_0 (1+t)^{-n}$$

e

$$(1+t)^{-n} F(t) = \sum_{k=1,n} a_k (1+t)^{n-k} - D_0$$

Dalla formula $\sum_{k=1,n} a_k(1+s)^{n-k} = D_0$ si ottiene ancora

$$(1+t)^{-n} F(t) = \sum_{k=1,n} a_k ((1+t)^{n-k} - (1+s)^{n-k})$$

Allora $t > s \Rightarrow F(t) > 0 \Rightarrow x^* > t > s$
[se fosse t < s si avrebbe F(t) < 0 e t > x*]

N.B.
In un piano ammortamento (tasso t) e' sempre ben definito D_k il debito residuo al tempo k (che corrisponde alla somma necessaria per estinguere immediatamente il debito).
In questo caso non e' ben definito il debito residuo al tempo k (< n).
E' possibile calcolarlo come
D0 - valore ricostruito (tasso s) al tempo k
sia come
valore attuale dei pagamenti futuri (residui) previsti per interessi e per ricostruzione
Non e' comunque chiaro qual'e' il tasso di attualizzazione da applicare (= s , t, x * ?)

Dalla formula

$$\sum_{i=1,n} a_i(1+s)^{n-i} = D_0$$

si ottiene che per ogni k , $1\le k< n$

$$(1+s)^{n-k} \sum_{i=1,n} a_i(1+s)^{k-i} = D_0$$

Si considerano gli indici I1= {i≤ k } , I2 ={i > k } si ha

$$(1+s)^{n-k} \left(\sum_{i\in I1} a_i(1+s)^{k-i} + \sum_{i\in I2} a_i(1+s)^{k-i} \right) = D_0$$

Il valore $\sum_{i\in I1} a_i(1+s)^{k-i}$ rappresenta il valore cumulato (a tasso s) al tempo k dai versamenti a_i e

$$\sum_{i\in I1} a_i(1+s)^{k-i} = D_0 (1+s)^{k-n} - \sum_{i\in I2} a_i(1+s)^{k-i}$$

Una stima possibile del debito residuo e'

$$D_{k1} = D_0 - \sum_{i\in I1} a_i(1+s)^{k-i} = \sum_{i\in I2} a_i(1+s)^{k-i} + D_0 (1 - (1+s)^{k-n})$$

L'espressione di destra e' data dal valore attuale dei futuri pagamenti a_i ($\sum_{i\in I2=1,n} a_i(1+s)^{k-i}$) mentre D_0 ($1 - (1+s)^{k-n}$) e' il capitale corrispondente a tasso s ad una rendita sD_0 .

Se pero' si scontano a tasso s tutti i futuri pagamenti (a_i e interessi tD_0) si ottiene

$$D_{k2} = \sum_{i\in I2} a_i(1+s)^{k-i} + (t/s) D_0 (1 - (1+s)^{k-n})$$

e chiaramente

$$D_{k1} < D_{k2}$$

11 AMMORTAMENTO

VALUTAZIONE A TASSO DIVERSO

Calcolato l' ammortamento di un debito D_0 ad un tasso t (remunerazione) interessa valutarlo ad un tasso x (attualizzazione), per esempio in caso di vendita, trasferimento ecc..
[Formule analoghe se si parte al tempo k con il debito residuo D_k]

La situazione capita quando ad esempio si effettua la surroga di un mutuo : i pagamenti futuri sono dovuti ad una banca diversa da quella con cui il mutuo era stipulato. La nuova banca "compra" il flusso futuro di denaro rimborsando il debito residuo alla banca. Interessa una valutazione del flusso (contrattualmente stabilito) non a tasso t ma a tasso x. Il tasso x potrebbe essere il tasso che ora viene applicato ai mutui. E' normale che nella durata di un mutuo (10-20 anni) i tassi di interesse variino sensibilmente.

Si definiscono

$$W(x) = \sum_{k=1,n} R_k (1+x)^{-k}$$

[attualizzazione dei pagamenti , valore]

$$U(x) = \sum_{k=1,n} I_k (1+x)^{-k}$$

[attualizzazione quote interesse , usufrutto]

$$P(x) = \sum_{k=1,n} Q_k(1+x)^{-k}$$

[attualizzazione quote capitale , nuda proprieta']

Con il tasso t si ha sempre

$$W(t) = U(t) + P(t) = D_0$$

e per ogni altro tasso si avra'

$$U(x)+P(x) = W(x) = ?$$

Per $x > t$ si ha banalmente $U(x) < U(t)$ e $P(x) < P(t)$

Vale sempre

$$x\, U(x) + t\, P(x) = t\, D_0$$

Infatti

$$xU(x) = \sum_{k=1,n} x\, I_k(1+x)^{-k} = \sum_{k=1,n} (x\, t)\, D_{k-1} (1+x)^{-k}$$

$$t\, P(x) = \sum_{k=1,n} t\, Q_k(1+x)^{-k} = \sum_{k=1,n} t\, (D_{k-1} - D_k) (1+x)^{-k}$$

e

$$xU(x) + t\, P(x) = t \sum_{k=1,n} (1+x)^{-(k-1)} D_{k-1} - D_k(1+x)^{-k}$$

Quindi (somma telescopica)

$$xU(x) + t\,P(x) = t\,(D_0 - D_n(1+t)^{-n}) = t\,D_0$$

In alcuni casi P(x) e' di facile calcolo e noto P(x) dalla formula si ricavano (per esempio) U(x) e W(x) come

$$U(x) = (t/x)\,(D_0 - P(x))$$

$$W(x) = U(x) + P(x) = P(x) + (t/x)\,(D_0 - P(x)) = P(x)(1 - t/x) + (t/x)\,D_0$$

[W(x) dipende dal tasso x, dal debito D_0, dal tasso t usato per conti e dalle sole quote capitale Q_k]

In qualche caso puo' essere noto il valore W a cui il flusso e' valutato e puo' essere facile calcolare P(x) per ogni tasso x (esempio preammortamento)
poiche'

$$x = (W(x))^{-1}\,(t\,(D_0 - P(x)) + x\,P(x))$$

si puo' stimare x con tecniche tipo punto fisso.

Invece noti x , D_0 ,W(x) per separare le due quantità U(x) e P(x) basta risolvere il sistema lineare (determinante = t-x)

$$\begin{aligned} U(x) + P(x) &= W(x) \\ x\,U(x) + t\,P(x) &= t\,D_0 \end{aligned}$$

Da

$$x\,U(x) + t\,P(x) = t\,D_0 = t\,U(t) + t\,P(t)$$

segue anche

$$x\,U(x) - t\,U(t) = t\,(P(t) - P(x))$$

e quindi limitazioni per U(x)

$$x > t \Rightarrow P(t) - P(x) > 0 \Rightarrow x\,U(x) > t\,U(t) \quad e \quad U(t) > U(x) > (t/x)\,U(t)$$

ecc...

<u>Ammortamento e matrici</u>

L'ammortamento si basa sulla relazione (lineare) $D_k = D_{k-1}(1+t) - R_k$
con R_k rata e D_k , D_{k-1} debiti residui.
Le varie relazioni ricavate si possono anche scrivere utilizzando matrici e vettori

Assegnato un vettore $D = (D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}) \in R^n$ (si suppone sempre $D_n=0$) le rate R_k derivano dalle equazioni

$$R_k = (1+t)\,D_{k-1} - D_k$$

13 AMMORTAMENTO

Sia R il vettore delle rate, R = (R_1, R_2,…, R_n) $\in R^n$ si ha la relazione R=M_t D dove M_t e' la matrice (dimensione n) del tipo (struttura)

$$\begin{matrix} 1+t & -1 & & & \\ & 1+t & -1 & & \\ & & \dots. & \dots & \\ & & & \dots. & -1 \\ & & & & 1+t \end{matrix}$$

L'ultima riga esprime $R_n = (1+t)\, D_{n-1}$ ovvero

$$D_n = 0 = D_{n-1}(1+t) – R_n$$

Assegnato un vettore D di debiti (iniziale D_0 + debiti residui)
si ha per le rate

$$R = M_t\, D$$

Se t>-1 M_t e invertibile e $(M_t)^{-1}$ e' (verifica immediata)

$$\begin{matrix} (1+t)^{-1} & (1+t)^{-2} & (1+t)^{-3} & \dots & (1+t)^{-n} \\ & (1+t)^{-1} & (1+t)^{-2} & \dots & \dots \\ & & \dots. & \dots & \dots \\ & & & \dots. & (1+t)^{-2} \\ & & & & (1+t)^{-1} \end{matrix}$$

Assegnato qualunque vettore di pagamenti R i debiti residui D
verificano semplicemente

$$D = (M_t)^{-1} R .$$

La prima riga esprime il debito residuo iniziale come v.a dei futuri pagamenti

$$\Sigma_{k=1,n}\ R_k(1+t)^{-k} = D_0$$

Ovvero i pagamenti R estinguono nei tempi 1,..,n un debito iniziale
D0 =($(M_t)^{-1}$ R $)_1$ (prima componente di D calcolato).

La generica riga j esprime il debito residuo al tempo j-1 come

$$\Sigma_{k=j,n}\ R_k(1+t)^{-(k-j+1)} = D_{j-1}$$

valore attuale (riferito al tempo j-1) dei successivi (rimanenti) pagamenti .

Se si indica con F la matrice

$$\begin{array}{ccccc}
0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
 & 0 & 1 & & \dots \\
 & & 0 & \dots & 0 \\
 & & & 0 & 1 \\
0 & & & & 0
\end{array}$$

allora

$$M_t = (1+t)I - F$$

e

$$M_t D = (1+t) D - F D$$

Le quote interessi I corrispondono al vettore tD .
Le differenze

$$Q = R-tD = (I-F) D$$

corrispondono alle quote capitale.
La matrice $M_0 = I - F$ ha struttura

$$\begin{array}{ccccc}
1 & -1 & & & \\
 & 1 & -1 & & \\
 & & \dots. & \dots & \\
 & & & \dots. & -1 \\
 & & & & 1
\end{array}$$

e inversa (inversa di M_t con $t = 0$)

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
 & & \dots. & \dots & \dots \\
 & & & 1 & 1 \\
 & & & & 1
\end{array}$$

Quindi le quote capitale verificano

$$Q = (I-F) D$$

e $(M_0)^{-1}Q$ genera i debiti residui da cui
le altre formule

(prima riga) $\Sigma_{k=1,n} (Q_k) = D_0$

(second riga) $\Sigma_{k=2,n} (Q_k) = D_1$

ecc…

15 AMMORTAMENTO

Nel caso dell'ammortamento francese (R costante) la prima riga esprime
la solita condizione (della rendita)

$$D_0 = R \sum_{i=1,n} (1+t)^{-i}$$

da cui $D_0 = (R/t)\ (1-(1+t)^{-n}) = (R/t)\ (\ (1+t)^n - 1\ )\ /\ (1+t)^n$

$R = (t\ D_0)\ (1+t)^n\ /\ ((1+t)^n - 1\ )$

La riga j+1 esprime la condizione debito residuo D_j = v.a. (n-j) rate successsive

$D_j = (R/t)\ (\ (1+t)^{n-j} - 1\ )\ /\ (1+t)^{n-j}$

ovvero

$$D_j = (t\ D_0)\ (1+t)^n / ((1+t)^n - 1\ )\ (1/t)\ (\ (1+t)^{n-j} - 1\ )\ /\ (1+t)^{n-j}$$
$$= (\ D_0)\ (1+t)^j (\ (1+t)^{n-j} - 1\ ) / ((1+t)^n - 1\ )$$
$$= (\ D_0)\ (\ (1+t)^n - (1+t)^j\ )\ /\ ((1+t)^n - 1\ )$$

<u>Usufrutto & Nuda Proprietà</u>

Se Z e' un qualsiasi vettore di (futuri) pagamenti il suo valore attuale (al tasso x) e' espresso da $(\ (M_x)^{-1}\ Z)_1$

(prima componente del vettore $(M_x)^{-1}\ Z$)

Si calcolano dal vettore Z dei pagamenti previsti (ottenuti al tasso t) le due quantita' (calcolate al tasso generico x)

Usufrutto U(x)

(=valore attuale al tasso x delle quote interessi (calcolate al tasso t))

e

Nuda prorieta' P(x)

(=valore attuale al tasso x delle quote di capitale calcolate al tasso t)

Attraverso le matrici si ricava facilmente la formula

$$xU(x) + t\ P(x) = t\ D_0$$

Infatti

$$xU(x) = x\ (\ (M_x)^{-1}\ (tD\ )\ )_1 = t\ (\ (M_x)^{-1}\ (x\ D)\ )_1$$

e

$$t\ P(x) = t\ (\ (M_x)^{-1} Q\ )_1 = t\ (\ (M_x)^{-1}\ (I-F)\ D\ )_1$$

e

$xU(x) + t\ P(x) = t\ (\ (M_x)^{-1}(I-F+ xD)\ D\ )_1 = t\ (\ (M_x)^{-1}\ (M_x)\ D\ )_1 = t\ (\ D)_1 = t\ D_0$

16 AMMORTAMENTO

FUNZIONI EXCEL UTILI
{ Notazione :
t tasso, k anno, n numero anni , D_0 debito iniziale, D_n debito residuo finale (abitualmente $D_n = 0$) }

1) Ammortamento italiano
Facile il calcolo dei debiti residui e delle quote Q_k
La quota capitale Q_k (costante) puo' essere ottenuta come
= SLN (D_0, D_n , n)
[in italiano SLN = AMMORT.COST]

La quota interessi I_k (anno k) si ottiene come =ISPMT (t, k-1, n, -D_0)

N.B. gli interessi I_k si calcolano partire dall'anno k-1. Esistono schemi che prevedono pagamento anticipato degli interessi (a inizio di periodo)
[in italiano ISPMT= INTERESSE.RATA]

2) Ammortamento francese
La rata (costante) R si ottiene come

=PMT(t,n,-D_0)
[in italiano PMT = RATA]

Calcolo Q_k (quota capitale)
= PPMT(t, k, n, -D_0)
[in italiano PPMT = P.RATA]

Calcolo I_k (quota interessi)
= IPMT(tasso,k,n, -D_0)
[in italiano IPMT = INTERESSI]

3) Valore attuale (Calcolo di W(x), U(x) , P(x))
Valore attuale
=NPV(t, valori)
valori puo' essere
un vettore di arbitraria lunghezza [es NPV(5% , A1:A44)]
piu' "singoli valori" (max 29) [es NPV(5% , A1,100,A4,….)]
.Ogni "singolo valore" puo' essere un intervallo [es NPV(5%, A31:A41, A51:A59, A71:A81)]
[in italiano NPV =VAN]
Le componenti di valori rappresentano i tempi 1,2,…..

4) Tasso interno di rendimento (per ammortamento a due tassi)
funzione IRR
argomento di IRR puo' essere intervallo es IRR(A1:A10) e
un vettore specificato es IRR({-10000,5000,6000})
un ulteriore argomento puo essere un tasso t0 che si suppone prossimo alla soluzione
(excel applica un metodo iterativo) es IRR (A1:A10 , 1%)

17 AMMORTAMENTO

Calcolo Con Excel

CALCOLO DELLE QUANTITA’	EXCEL	EXCEL ITALIANO
AMM. ITALIANO		
Q_k (costante)	= SLN (D_0, D_n , n)	[in italiano SLN = AMMORT.COST]
I_k (quota interessi)	=ISPMT (t, k-1, n, -D_0)	[in italiano ISPMT= INTERESSE.RATA]
AMM FRANCESE		
Q_k (quota capitale)	= PPMT(t, k, n, -D_0)	[in italiano PPMT = P.RATA]
I_k (quota interessi)	= IPMT(tasso,k,n, -D_0)	[in italiano IPMT = INTERESSI]
R (rata costante)	= PMT(t,n,- D_0)	[in italiano RATA]