COME RICAVARE UN' EQUAZIONE DALL'APPROCCIO BINOMIALE

Se si considera la formula

$V0(b,s) = (1+r)^{-1} (\Phi (u) q_u + \Phi (d) q_d)$

si puo' cercare di ottenere una analoga relazione per la funzione f(S,t) che esprima il valore del derivato f(S,t) al tempo t (e con l'azione a valore S) noto il derivato al tempo ($t + \Delta t$) nei due punti uS , dS

In generale F($x + \Delta x$, $t + \Delta t$) si puo' scrivere (approssimare con)

$$F(x,t) + F_x (x,t) \Delta x + F_t (x,t) \Delta t$$

oppure con

$$F(x,t) + F_x (x,t) \Delta x + (1/2) F_{xx}(x,t) (\Delta x)^2 + F_t (x,t) \Delta t$$

In questo caso

se S1 = uS vale S1 = S + (u-1)S

se S2 = dS vale S2 = S+ (d-1)S

Si approssima allora

$f(uS, t+\Delta t) = f (S+(u-1)S, t + \Delta t)$ con

$$f (S,t) + f_x (S,t) (u-1) S + (1/2) f_{xx}(S,t) (u-1)^2 S^2 + f_t (S,t) \Delta t$$

e analogamente $f(dS , t+\Delta t) = f (S+(d-1)S, t + \Delta t)$ con

$$f(S,t) + f_x (S,t) (d-1) S + (1/2) f_{xx}(S,t) (u-1)^2 S^2 + f_t (S,t) \Delta t$$

Nella relazione

$$V0(b,s) = (1+r)^{-1} (\Phi (u) q_u + \Phi (d) q_d)$$

si pone 1+r = R , segue

$$R\, V0(b,s) = (\Phi(u)\, q_u + \Phi(d)\, q_d)$$

si ottiene cosi'

$$R\; f(S,t) = f(uS, t + \Delta t)\, q_u + f(dS, t + \Delta t)\, q_d$$

Ultilizzando le formule e i pesi q_u q_d si ha

$$R\, f(S,t) = p_1\, f(S,t) + p_2\, f_x(S,t)\, S + p_3\, (1/2)\, f_{xx}(S,t)\, S^2 + p_4\, f_t(S,t)\, \Delta t$$

con pesi

$$p_1 = p_4 = q_u + q_d = 1$$

$$p_2 = q_u (u-1) + q_d (d-1) = q_u u + q_d d - 1$$

$$p_3 = q_u (u-1)^2 + q_d (d-1)^2 = q_u (u^2 -2u + 1) + q_d (d^2 -2d + 1)$$

$$= q_u u^2 + q_d d^2 - 2 (p_2 +1) + 1$$

Poiche'

$$(u-d) (q_u u + q_d d) = u (1+r -d) + d (u-(1+r)) = (u-d) (1+r)$$

$$(q_u u + q_d d) = (1+r) \;[\; = p_2 + 1]$$

e quindi $p_2 = r$.

Inoltre

$$p_3 = q_u u^2 + q_d d^2 - 2 (r +1) + 1$$

$$(u-d) (q_u u^2 + q_d d^2) = u^2 (1+r -d) + d^2 (u-(1+r)) =$$

(si usa ud = 1)

$$= (1+r) (u^2 - d^2) - (u-d) = (u-d) ((1+r) (u+d) -1)$$

Ovvero

$$(q_u u^2 + q_d d^2) = ((1+r)(u+d) -1)$$

e

$$p_3 = ((1+r)(u+d) -1) - 2 (r +1) + 1$$

$$= (1+r) (u+d-2)$$

Se il tasso di interesse annuo e' r0 per il periodo Δt e' circa $(1 + r0\Delta t)$.

Per il passo Δt il valore R = (1+r) viene approssimato con $1 + r0\Delta t$

La condizione $u > (1+r)$ richiede un'approssimazione di diversa precisione come

$\exp(\sigma \sqrt{\Delta t})$ e d = 1/u risulta $\exp(- \sigma \sqrt{\Delta t})$.

Per quanto interesssa si ha

$$u = 1 + \sigma \sqrt{\Delta t} + \sigma^2\Delta t /2 + o(\Delta t)$$

$$d = 1 - \sigma \sqrt{\Delta t} + \sigma^2\Delta t /2 + o(\Delta t)$$

$$u + d - 2 = \sigma^2\Delta t + o(\Delta t)$$

Si arriva a cosi' a

$R = 1 + r0\Delta t$, $p_1 =1$, $p_2 = r0\Delta t$, $p_3 = (1+r)(u+d-2)$, $p_4 = 1$]

e in particolare

$$p_3 = (1+ r0\Delta t)(\sigma^2\Delta t) = \sigma^2\Delta t + o(\Delta t))$$

allora

$$(1+ r0\Delta t) f(S,t) = f(S,t) + r0\Delta t\, f_x (S,t) S + \sigma^2 (1/2) f_{xx}(S,t) S^2\Delta t + f_t (S,t) \Delta t + o(\Delta t)$$

e

$$0 = (-r0 f(S,t) + r0 f_x (S,t) S + \sigma^2 (1/2) f_{xx}(S,t) S^2 + f_t (S,t)) \Delta t + o(\Delta t)$$

e alla soluzione vale l'equazione differenziale (alle derivate parziali)

$$0 = - r0 f(S,t) + r0 f_x (S,t) S + \sigma^2 (1/2) f_{xx}(S,t) S^2 + f_t (S,t)$$

La condizione iniziale in questo caso corrisponde e' una condizione finale : valore del derivato alla scadenza T noto il prezzo dell'azione (la funzione f (S , T))

Nell'equazione compaiono la funzione valore f(S,t) , le sue derivate f_x (S,t) , f_{xx}(S,t) , f_t il valore esplicito dell'azione (=S) il tasso di interesse (r0) e un parametro (σ^2) legato alla volatilita dell'azione. (maggiore e'σ , maggiore e' u , piu' l'azione puo' crescere improvvisamente…) Il parametro puo' essere interpretato come effettivo σ^2 dell'azione.

L'equazione descrive l' "evoluzione" del derivato nel tempo

$$f_t (S,t) = r0\, f(S,t) - r0\, f_x (S,t)\, S - \sigma^2 (1/2)\, f_{xx}(S,t)\, S^2$$

NOTA 1

Il modo di ricavare la formula e' euristico. La formula e' sicuramente non contadditoria con le approssimazioni usate ma occorebbe verificare l'effettiva applicabilita' (possibilita' di usare le approssimazioni, convergenza , controllo sull'errore commesso , eventuali amplifacazioni/smorzamenti dell'errore....)

NOTA 2

Le condizioni imposte implicano che $1+r = 1+ r0\Delta t$,

$$(u-d) = (1 +\sigma \sqrt{\Delta t} + \sigma^2\Delta t /2 + o(\Delta t)) -(1 -\sigma \sqrt{\Delta t} + \sigma^2\Delta t /2 + o(\Delta t)) = 2 \sigma \sqrt{\Delta t} +O(\Delta t)$$

e

$$(1+r)-d = 1+ r0\Delta t -(1 -\sigma \sqrt{\Delta t} + \sigma^2\Delta t /2 + o(\Delta t)) = \sigma \sqrt{\Delta t} + (r0-\sigma^2 /2) \Delta t + o(\Delta t)$$

Nella formula

il peso $(1+r)^{-1}$ (q_u) = (1+r-d) / (1+r)(u-d) e' approssimato da

$$(\sigma \sqrt{\Delta t} + (r0-\sigma^2 /2) \Delta t + o(\Delta t))/ (2 \sigma \sqrt{\Delta t} +O(\Delta t)) (1+ r0\Delta t)$$

che ha come valore limite (1/2)

NOTA 3

Eventuali ulteriori ulteriori condizioni (es. dividendi , opzioni americane ecc…) possono essere inserite nell'equazione differenziale