1 CURVA TASSI

CURVA TASSI

1) Spot/ Curva

In ogni momento e' possibile calcolare la somma da restituire a fronte di un prestito che si estenda per un k periodi (anni ?). Il prestito si suppone sicuro e senza rischi.

Se un capitale C diventa C1 allora $C(1+t)^{k} = C1$ e

$$t = (C1/C)^{1/k} - 1$$

Il tasso annuale t e' detto tasso (spot) a k anni.

Il valore attuale della somma C1 tra k anni. e' C e la quantita'

$$\gamma_k = (1+t)^{-k} \quad [= [(C/C1)]$$

e' detta fattore di sconto a k anni .

Il tasso t dipende dal tempo scelto (k) e la curva che ad ogni tempo k associa il tasso (spot) t (k) e' detta curva tassi. L'andamento della curva tassi e' legato ad alcune considerazioni

2) Future/Arbitraggio

Dati due tempi i ,j, i < j e tassi spot t1 (= t(i)) , t2 (= t(j))
e' possibile ottenere./concedere

- prestito di C con restituzione al tempo j
- prestito di C con restituzione al tempo i
- contratto (future) : consegna di C al tempo i e restituzione al tempo j
  [contratto concluso ora, prezzi fissati ora, consegna e restituzione futura]

Se contemporaneamente

a) prendo a prestito C1 da restituire al tempo j

b) presto C2 da restituire al tempo i

c) stipulo contratto future (cessione C3 al tempo i e restituzione al tempo j con tasso =t)

Il mio bilancio e'

$$\text{tempo } 0 : \; -C1 + C2$$
$$\text{tempo } i \quad C2(1+t1)^{i} - C3$$
$$\text{tempo } j: \quad C3(1+t)^{j-i} - C2(1+t2)^{j}$$

Se C1=C2 =C e $C3 = C2(1+t1)^{i}$ ai tempi 0 e i il bilancio e' 0

Il bilancio al tempo j e'

$B = C(1+t1)^{i} (1+t)^{j-i} - C(1+t2)^{j}$

Se B > 0 realizzo un guadagno (futuro) senza esborso o rischio.

Se B<0 posso realizzare un guadagno a costo 0 stipulando i contratti (simmetrici)

prendo a prestito C2 da restituire al tempo i

presto C1 da restituire al tempo j

stipulo contratto future (prendero' C3 al tempo i con restituzione al tempo j e tasso t)

Necessariamente dovrebbe essere

$$(1+t1)^{i} (1+t)^{j-i} = C (1+t2)^{j}$$

2 CURVA TASSI

Se i tempi sono i = 1 , j = 2
"prevedo" che al tempo 1 il tasso (per un tempo 1) sara'

$$(1+t) = (1+t2)^2(1+t1)^{-1}$$

(e analogamente per altre scadenze: se per il tempo k il tasso spot e'
s tra un anno per il tempo k-1 si dovrebbe avere
$(1+t)^{k-1} = (1+s)^k(1+t1)^{-1}$
ecc…)

[N.B. Se si imponesse solo B $\leq$ 0 basterebbe $(1+t) \leq (1+t2)^2(1+t1)^{-1}$]
= non trovo da prendere C3 al tempo i , restituzione a j tasso t]

3) Preferenza liquidita'
Investire (bloccare) denaro per periodi lunghi diminuisce le possibilita' e la liquidita' possibile . E' sensato aspettare un premio nella forma di tassi a lungo piu' elevati di tassi a breve. Salvo casi particolari la curva tassi dovrebbe essere non decrescente nel tempo

4)
Le varie richieste (previsione dei tassi, assenza di arbitraggi, preferenza per la liquidita', tassi limitati) non sono perfettamente conciliabili. Esistono vari modelli che cercano descrivere ragionevolmente l'evoluzione nel tempo della curva tassi.

CALCOLO
Si suppone di avere a disposiziore vari bond uguali come rischiosita' (rating massimo) ognuno dei quali genera un flusso finanziario F^k caratterizzato da un vettore corrispondente ai pagamenti alle varie scadenze e da e da un prezzo P_k
I vettori F^k , $F^k = (F^k_1 , F^k_2, \ldots , F^k_n)$, sono definiti (definibili) per tutte le scadenze con $F^k_i = 0$ se alla scadenza i non vi sono pagamenti (cedola o rimborso)

<u>5) Calcolo (sostuzione)</u>
Noti i vari fattori di sconto γ_i si dovrebbe avere $\forall$ k

$$\Sigma_{i=1,n} \gamma_i F^k_i = P_k$$

E' possibile calcolare i valori attrverso il prezzo di ZC
e sostituendo successivamente nei vari in altri bond

Es (Titoli stato italiani)
Nel giugno 2010 vi sono a disposizione BOT con scadenza (mensile)
per i mesi giugno-dicembre e gennaio-maggio 2011 (anno successivo)
e CTZ con scadenza giugno,settembre 2011 e febbraio e aprile 2012

3 CURVA TASSI

E’ possibile calcolare i fattori di sconto γ_i (con frequenza almeno trimestrale) per circa 2 anni.
Utilizzando i fattori γ_i ottenuti si possono poi calcolare i rimanenti γ_i utilizzando opportuni BTP (a tasso fisso e cedole semestrale) di successiva scadenza .

6) Minimi quadrati

In linea generale i bond a disposizione sono molti piu’ delle scadenze (cioe’ dei γ)
Se si forma la matrice M con righe F^k i fattori di sconto formano un vettore z di componenti $(\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, .., \gamma_{in})$
Il vettore z dovrebbe generare il vettore p di componenti P_k e quindi
Mz=p
Le dimensioni sono M (bond,tempi) , z (tempi), p (bond)
Conviene calcolare z come soluzione di

$$\min \| Mz - p \|^2$$

(possono essere inclusi vincoli ulteriori e pesi sulle varie equazioni)

7) PL (tassi/ fattori “personali”)

Un operatore che deve effettuare dei pagamenti (coprire richieste) $r_1, ..., r_n$ a veri tempi
Puo’ acquistare dei Bond (flussi) F^k al prezzo corrente P_k
Si suppone che sia possibile acquistare qualunque quantita’ (non solo multipli del minimo)

Se acquista per quantita’ $w_1, .., w_m$ dei vari titoli spende

$$\Sigma_{k=1,m} w_k P_k$$

Per ogni scadenza n si assicura un flusso

$$\Sigma_{k=1,m} w_k F^k_n$$

Con cui deve assicurare

$$\Sigma_{k=1,m} w_k F^k_n \geq r_n$$

Si puo’ supporre una ulteriore disponibilita’ liquida e_n in ogni istante. Tale somma puo’ essere utilizzata per coprire la richiesta. L’eventuale eccessso puo’ essere utilizzato al tempo successivo.
La relazione diventa ($\forall$ n)

$$\Sigma_{k=1,m} w_k F^k_n + e_{n-1} - e_n = r_n$$

= (solo eq di bilancio)

$$\Sigma_{k=1,m} w_k F^k_n + e_{n-1} = e_n + r_n$$

Al tempo 0 e’ disponibile e_0 e l’equazione per 1 e’

$$\Sigma_{k=1,m} w_k F^k_1 + e_0 - e_1 = r_1$$

Si ha un problema (lineare) nelle variabili (non negative) w_m (pesi) e e_n (disponibilita' di cassa) .

$$\min \Sigma_{k=1,m} w_k P_k + e_0 = \max (\Sigma_{k=1,m} w_k - P_k) - e_0$$

[anche e_0 contbuisce alla spesa]
con vincoli

$$\Sigma_{k=1,m} w_k F^k_n + e_{n-1} - e_n = r_n \quad (\forall\ n)$$

Dato un problema { max $c^t x$, $Ax=b$, $x \geq 0$} si asssocia il problema duale
{min $b^t y$, $A^t y \geq c$, y non vincolato sui segni }

Le relazioni del duale (1 per ogni variabile/ colonna) del problema originale sono

$$\Sigma_{i=1,n} y_i F^k_i \geq -P_k \qquad (\forall\ k)$$
$$y_{i+1} - y_i \geq 0$$

e inoltre

$$y_1 \geq -1 \quad (\text{ da } e_0)$$
$$- y_n \geq 0 \quad (\text{ da } e_n)$$

Per i valori $(-y_i)$ si ha

$$(-y_1) \leq 1$$
$$(-y_{i+1}) \leq (-y_i)$$
$$(- y_n) \geq 0$$

I valori $(-y_i)$ sono positivi,decrescenti e compresi tra 0 e 1 (come i fattori di sconto) e inoltre

$$\Sigma_{i=1,n} (-y_i) F^k_i \leq P_k$$

Alla soluzione (bond per cui $w_1 > 0$) si ha vincolo duale = 0 cioe' $\Sigma -y_i F^k_i = P_k$
Le variabili duali sono parametri di sensibilita' per piccole variazioni (di quanto si modifica il valore ottimo (=minimo esborso) se la richiesta (r_i) al tempo i si modifica)
Quest'interpretazione e' ancora piu' evidente se tutte le richieste sono 0 tranne quella al tempo i .
I valori dipendono da un problema "soggettivo" (le richieste) .
Il problema duale non e' vuoto se esistono dei fattori di sconto che giustificano i prezzi.